JEAN DIEUDONNÉ

Les groupes simples déduits des algèbres de Lie simples complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 194, p. 359-368
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__359_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 194

Février 1960

LES GROUPES SIMPLES DÉDUITS DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES COMPLEXES

par Jean DIEUDONNÉ

L'analogie observée de longue date entre la théorie des groupes "abstraits" simples (en particulier, les groupes finis simples) et celle des groupes de Lie simples a trouvé son expression mathématique dans le travail fondamental de CHEVALLEY [4], qui a montré comment à toute algèbre de Lie simple sur le corps des complexes, on peut associer, pour tout corps commutatif K, un groupe linéaire sur K qui est simple à 4 exceptions près (petites dimensions et corps K à 2 ou 3 éléments). Des travaux ultérieurs, notamment de HERTZIG [6], TITS [12], [13], [14], [15] et STEINBERG [11] ont complété les résultats de CHEVALLEY, et on peut actuellement obtenir par ces méthodes tous les groupes simples finis connus (groupes alternés et groupes de Mathieu exceptés). On exposera ici les grandes lignes des mémoires de CHEVALLEY [4] et de STEINBERG [11].

1. Résultats préliminaires sur les algèbres de Lie simples complexes.

Pour les définitions et résultats classiques, voir [10] ou [3]

On considère une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ sur $\mathbf{C}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, de dimension ℓ (rang de $\mathfrak{g}$) ; P désigne le groupe additif engendré par les poids des représentations de $\mathfrak{g}$; c'est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^{\ell}$; P_r est le sous-groupe de P engendré par les racines de $\mathfrak{g}$; le groupe P/P_r est fini. Un élément H de $\mathfrak{h}$ est appelé copoids si $\rho(H)$ est entier pour tout poids $\rho \in P$; pour toute racine $r \in P_r$, il y a un copoids H_r bien déterminé tel que $r(H_r) = 2$. Les copoids forment un sous-groupe additif de $\mathfrak{h}$, le dual de P, qui est donc de rang ℓ, et il a une base formée de ℓ des H_r qui est aussi une base de $\mathfrak{h}$. Pour toute racine s, on a $s(H_r) = p - q$, où $[-p , q]$ est l'intervalle de $\mathbf{N}$ formé des entiers j tels que $s + jr$ soit une racine ; on a $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ et $p + q \leqslant 3$. Deux racines r, s sont dites orthogonales si $r(H_s) = 0$, ce qui équivaut à $s(H_r) = 0$.

La donnée de $\mathfrak{h}$ définit canoniquement une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe de $\mathfrak{h}$ et de sous-espaces $V(r)$ de dimension 1 dont chacun correspond à une racine r ; en outre, on peut choisir un élément de base X_r de chaque $V(r)$ de sorte que l'on ait

(1) $$[X_r , X_{-r}] = H_r$$

et

(2) $$[X_r , X_s] = N_{rs} X_{r+s} \quad ,$$

pour deux racines r , s linéairement indépendantes, avec $N_{rs} = 0$ lorsque $r + s$ n'est pas une racine, et dans le cas contraire

(3) $$N_{rs} = \pm (p + 1)$$

p étant l'entier introduit plus haut ; ces conditions déterminent les X_r aux signes près. Lorsque r , s sont deux racines distinctes appartenant à un même système fondamental, on a $p = 0$, $q = a_{rs}$ est l'entier de Cartan correspondant ; dans le diagramme de Dynkin de g , le nombre de liens joignant r à s est le plus grand des entiers a_{rs} , a_{sr} .

Si $\langle H , H \rangle$ est la forme de Killing restreinte à $\mathfrak{h}$ (non dégénérée positive) et r_o une racine pour laquelle $\langle H_{r_o} , H_{r_o} \rangle$ est maximum,

$$\lambda(r) = \langle H_{r_o} , H_{r_o} \rangle / \langle H_r , H_r \rangle$$

est un entier, la <u>longueur</u> de r , qui peut prendre les valeurs 1 , 2 ou 3 ; on a $\lambda(r)/\lambda(s) = r(H_s)/s(H_r)$.

Pour toute racine r , l'application $u \rightarrow u - u(H_r)\, r$ est un automorphisme σ_r d'ordre 2 de P , et ces automorphismes engendrent un groupe fini, le <u>groupe de Weyl</u> W qui permute les racines. Le groupe W permute transitivement les systèmes fondamentaux de racines, et est aussi transitif sur l'ensemble des racines de même longueur.

2. <u>Le groupe de Chevalley associé à une algèbre de Lie simple complexe.</u>

A. Pour tout élément $X \in \mathfrak{g}$, $t \rightarrow \exp (t \operatorname{ad} X)$ est un homomorphisme du groupe additif $\underset{\sim}{C}$ dans le groupe adjoint Γ de $\mathfrak{g}$. En particulier, pour $X = X_r$, on a un isomorphisme de $\underset{\sim}{C}$, $t \rightarrow x_r(t)$ sur un groupe de matrices $\mathcal{X}_r$ ($\mathfrak{g}$ étant rapporté à une base formée des X_r et de ℓ des H_r formant une base de P), qui se trouvent (en vertu de (3)) avoir des éléments qui sont des <u>polynômes en</u> t <u>à coefficients entiers</u>. De même, $\exp (t \operatorname{ad} H_r)$ est une matrice diagonale $h'_r(t)$ telle que

$$h'_r(t).H_s = H_s \qquad \text{pour tout } s$$

$$h'_r(t).X_s = e^{t.s(H_r)} X_s \qquad \text{pour tout } s$$

Posant $z = e^t$, on a ici un homomorphisme $z \longrightarrow h_r(z)$ du groupe multiplicatif $\underset{\sim}{C}^*$ sur un groupe $\mathfrak{H}_r$ de matrices diagonales, la diagonale de $h_r(z)$ étant formée de puissances de z à exposants <u>entiers</u>.

Enfin, H_r, X_r et X_{-r} forment une base d'une sous-algèbre $\mathfrak{g}_r$ de $\mathfrak{g}$ isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe simple $\underset{\sim}{SL}(2, \underset{\sim}{C})$; on en conclut l'existence d'un homomorphisme φ_r de $\underset{\sim}{SL}(2, \underset{\sim}{C})$ sur le sous-groupe Γ_r de Γ engendré par $\mathcal{X}_r$, $\mathcal{X}_{-r}$ et $\mathfrak{H}_r$. On peut montrer (utilisant encore (3)) qu'il existe une matrice $F_r(Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22})$ dont les termes sont des polynômes à coefficients <u>entiers</u>, telle que

$$\varphi_r\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = F_r(z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22})$$

pour toute matrice de $\underset{\sim}{SL}(2, \underset{\sim}{C})$; on a d'ailleurs $F_r(1, 0, t, 1) = x_r(t)$ et $F_r(1, t, 0, 1) = x_{-r}(t)$.

B. Soit maintenant K un corps commutatif <u>arbitraire</u> ; on peut dans $x_r(t)$ remplacer t par un élément de K, et on a ainsi un homomorphisme $t \longrightarrow x_r(t)$ du groupe additif K dans le groupe des matrices d'ordre $n = \dim \mathfrak{g}$ sur K ; soit encore $\mathcal{X}_r$ son image. Le <u>groupe de Chevalley</u> G_K associé à g est le sous-groupe du groupe $\underset{\sim}{SL}(n, K)$ engendré par les $\mathcal{X}_r$, r parcourant toutes les racines de $\mathfrak{g}$. Pour chaque r, on a encore un homomorphisme φ_r de $\underset{\sim}{SL}(2, K)$ dans G_K défini comme dans A) à l'aide de la matrice polynomiale F_r ; l'image de $\underset{\sim}{SL}(2, K)$ par cet homomorphisme est engendrée par $\mathcal{X}_r$ et $\mathcal{X}_{-r}$ et contient le groupe $\mathfrak{H}_r$, image de K^* par l'homomorphisme $z \longrightarrow h_r(z)$ tel que $h_r(z).H_s = H_s$ et $h_r(z).X_s = z^{s(H_r)} X_s$; enfin, elle contient aussi l'élément

$$\omega_r = \varphi_r\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tel que $\omega_r.X_s = \pm X_{\sigma_r(s)}$ et $\omega_r.H_s = H_{\sigma_r(s)}$.

Le sous-groupe $\mathfrak{H}$ de G_K engendré par les $\mathfrak{H}_r$ est commutatif ; il peut encore être défini comme suit. A tout homomorphisme χ de P dans le groupe multiplicatif K^*, on fait correspondre la matrice $h(\chi)$ de $\underset{\sim}{SL}(n, K)$ laissant fixes les H_r et telle que $h(\chi).X_r = \chi(r) X_r$; alors $\mathfrak{H}$ est le groupe des $h(\chi)$. D'autre part, soit $\mathfrak{M}$ le sous-groupe de G_K engendré par $\mathfrak{H}$ et les ω_r ; on montre que $\mathfrak{H}$ est distingué dans $\mathfrak{M}$ et qu'il y a un isomorphisme $\omega : W \longrightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{H}$ tel que $\omega(w).X_r = \pm X_{w(r)}$ et $\omega(w).H_r = H_{w(r)}$ pour tout élément w du groupe de Weyl W.

On a

$$\omega(w)\,\mathfrak{X}_r\,\omega(w)^{-1} = \mathfrak{X}_{w(r)}$$

et

$$h(\chi)\,x_r(t)\,h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)\,t) \qquad .$$

3. Les résultats fondamentaux de Chevalley.

Choisissons une fois pour toutes un système fondamental de racines $a(1)$, ... , $a(\ell)$; la hauteur d'une racine $r = \sum_{i=1}^{\ell} c_i\, a(i)$ est l'entier

$$ht(r) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i$$

(on rappelle que les c_i sont des entiers tous ≥ 0 ou tous ≤ 0). On ordonne P_r totalement de sorte que $ht(r)$ soit fonction croissante de r , structure compatible avec celle de groupe additif de P_r . Pour tout ensemble Σ de racines > 0 telles que, lorsque la somme de 2 racines de Σ est une racine, alors elle est dans Σ , on désigne par $\mathfrak{U}_\Sigma$ le sous-groupe de G_K engendré par les $\mathfrak{X}_r$ pour $r \in \Sigma$; $\mathfrak{U}$ sera le groupe $\mathfrak{U}_\Sigma$ correspondant à l'ensemble Σ de toutes les racines > 0 . En particulier, pour tout élément $w \in W$, soit $\mathfrak{U}_w$ le groupe $\mathfrak{U}_\Sigma$ correspondant à l'ensemble Σ_w des racines $r > 0$ telles que $w(r) < 0$. On démontre le lemme suivant [7] :

LEMME 1. - Tout élément $x \in \mathfrak{U}_\Sigma$ se met d'une seule manière sous la forme $\prod_r x_r(t_r)$, où $t_r \in K$, et le produit est étendu aux racines $r \in \Sigma$ rangées par ordre croissant.

En outre, on a la formule de commutation :

$$(4) \qquad x_s(u)^{-1}\,x_r(t)\,x_s(u)\,x_r(t)^{-1} = \prod_{i,j} x_{ir+js}(C_{ijrs}\,t^i\,u^j)$$

quelles que soient les racines $r > 0$, $s > 0$, $t \in K$, $u \in K$, i , j parcourant les couples d'entiers > 0 tels que $ir + js$ soit racine, le produit étant pris dans l'ordre choisi pour P_r et les C_{ijrs} étant entiers.

Le premier théorème fondamental est la généralisation à G_K du lemme de BRUHAT [2] :

THÉORÈME 1. - Lorsque w parcourt le groupe de Weyl W , les ensembles $\mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega(w)\mathfrak{U}_w$ forment une partition de G_K ; en outre, tout élément de

$\mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega(w)\mathfrak{U}_w$ <u>s'écrit d'une seule manière</u> $uh\omega(w)u'$ <u>avec</u> $u \in \mathfrak{U}$, $u' \in \mathfrak{U}_w$ <u>et</u> $h \in \mathfrak{H}$.

Ce résultat a de nombreuses conséquences. Lorsque $K = \underset{\sim}{C}$, la décomposition du théorème 1 fournit une décomposition en "cellules" de l'espace homogène G_c/T, G_c étant un sous-groupe compact maximal de $G = G_{\underset{\sim}{C}}$ et T un tore maximal. Si $N(w)$ est le nombre d'éléments de Σ_w, on obtient ainsi le <u>polynôme de Poincaré</u> de G sous la forme

$$P(T) = (T-1)^{\ell} \sum_{w \in W} T^{2N(w)} .$$

Lorsque K est un <u>corps fini</u> à q éléments, la même décomposition fournit un moyen facile de calculer le nombre d'éléments de chacun de ses termes, donc l'ordre de G_K ; on trouve ainsi

$$u^{-1}(q-1)\, q^N \sum_{w \in W} q^{N(w)} ,$$

N étant le nombre total de racines >0, u l'ordre du groupe des homomorphismes de P/P_r dans K^*.

On démontre aussi que le normalisateur de $\mathfrak{U}$ est $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$, le normalisateur de $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{W}$; lorsque K est algébriquement clos, G_K est un groupe algébrique connexe, dont $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$ est un groupe de Borel, $\mathfrak{H}$ un tore maximal ; lorsque K est infini, G_K n'est pas algébrique en général, mais est le groupe des commutateurs d'un groupe algébrique connexe.

THÉORÈME 2. - <u>Si le corps</u> K <u>a au moins 5 éléments</u>, G_K <u>est simple</u>.

En fait, si K a au plus 4 éléments, G_K est encore simple sauf dans quatre cas : $K = \underset{\sim}{F}_2$, $\mathfrak{g} = A_1$, B_2 ou G_2 ; $K = \underset{\sim}{F}_3$, $\mathfrak{g} = A_1$ [4], mais nous esquisserons seulement la démonstration du théorème 2, <u>en supposant</u> $\ell \geq 3$.

LEMME 2. - <u>Si</u> r, s <u>sont deux racines non proportionnelles, il existe un homomorphisme</u> χ <u>de</u> P <u>dans</u> K^* <u>tel que</u> $\chi(r) = 1$, $\chi(s) \neq 1$ ([4], lemme 11).

LEMME 3. - <u>Pour tout</u> $w \in W$ <u>distinct de l'identité, il y a un</u> $h \in \mathfrak{H}$ <u>tel que</u> $\omega(w)\, h \neq h\, \omega(w)$.

Il suffit de remarquer qu'il existe une racine r telle que $w(r)$ soit distinct de r et de $-r$, sauf si $w(r) = -r$ pour tout r. Si on n'est pas dans ce dernier cas, on a un homomorphisme χ de P dans K^* tel que

$$\chi(w(r)) \neq \chi(r)$$

(lemme 2) et alors $h(\chi)$ répond à la question. Sinon, on prendra deux racines r, s telles que

$$s(H_r) = 1 \qquad \text{et} \qquad \chi(\alpha) = z^{\alpha(H_r)}$$

pour tout $\alpha \in P$, avec $z^2 \neq 1$ dans K^* ; on aura encore $\chi(-s) \neq \chi(s)$ et on termine comme précédemment.

Soit maintenant N un sous-groupe distingué de G_K, non réduit à e ; le point essentiel de la démonstration consiste à prouver qu'<u>il existe une racine r telle que</u> $\mathfrak{X}_r \subset N$. Pour cela, on prouve successivement :

LEMME 4. - $N \cap \mathfrak{U}\mathfrak{H} \neq \{e\}$.

Comme N est distingué, il résulte du théorème 1 qu'il y a un $x \neq e$ dans N tel que $x = uh_1\,\omega(w)$; si $w \neq 1$, il existe $h \in \mathfrak{H}$ tel que $\omega(w)\,h \neq h\,\omega(w)$ (lemme 3) ; alors $y = hxh^{-1}\,x^{-1} \in N \cap \mathfrak{U}\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ et le choix de h entraîne $y \neq e$; transformant y par un élément de $\mathfrak{U}$, on obtient un élément de $N \cap \mathfrak{U}\mathfrak{H}$ distinct de e.

LEMME 5. - $N \cap \mathfrak{U} \neq \{e\}$. - Soit $x \in N$ tel que $x = uh \neq e$, $u \in \mathfrak{U}$, $h \in \mathfrak{H}$ et supposons $h \neq e$. Alors il y a une racine fondamentale r telle que $h.X_r = cX_r$, $c \in K$, $c \neq 1$; on a $y = xx_r(1)\,x^{-1}\,x_r(1)^{-1} \in N \cap \mathfrak{U}$ et il reste à prouver que $y \neq e$. Sinon, on aurait $x_r(1-c) = x_r(1)\,x_r(c)^{-1} = ux_r(c)\,u^{-1}\,x_r(c)^{-1}$, donc cet élément serait dans le groupe des commutateurs de $\mathfrak{U}$, qui est engendré par les $\mathfrak{X}_s$ correspondant aux racines de hauteur $\geqslant 2$; comme $c \neq 1$, cela contredit le lemme 1

LEMME 6. - <u>Il existe une racine</u> $r > 0$ <u>telle que</u> $N \cap \mathfrak{X}_r \neq \{e\}$.

Parmi les $x \neq e$ de $N \cap \mathfrak{U}$, on en prend un tel que la plus petite racine α, pour laquelle dans $x = \prod_\alpha x_\alpha(t_\alpha)$ (lemme 1) on a $t_\alpha \neq 0$, soit la plus grande possible ; soit s cette racine. Alors on a $x = x_s(t_s)$. Sinon, on aurait $x = x_s(t_s)\,x_r(t_r)\,x_1$ avec $r > s$, $t_r \neq 0$, x_1 étant un produit $\prod_\alpha x_\alpha(t_\alpha)$ ou les racines α sont $> r$. Par le lemme 2, il y a $h \in \mathfrak{H}$ telle que $hx_s(t_s)\,h^{-1} = x_s(t_s)$ et $hx_r(t_r)\,h^{-1} \neq x_r(t_r)$; donc $hxh^{-1} \neq x$. Alors $y = x^{-1}\,hxh^{-1} \in N$, $y \neq e$; en outre, $y \in \mathfrak{U}$ et dans l'expression $y = \prod_\alpha x_\alpha(t_\alpha)$ la plus petite racine α telle que $t_\alpha \neq 0$ serait $> s$, contrairement à la définition de s.

On observe maintenant que $\varphi_r(\mathbf{SL}(2, K))$ est simple <u>sur son centre</u> puisque $\mathbf{SL}(2, K)$ l'est, et $N \cap \varphi_r(\mathbf{SL}(2, K))$ est un sous-groupe distingué <u>non dans le centre</u> de $\varphi_r(\mathbf{SL}(2, K))$, donc ce dernier est contenu dans N.

Par transformation par les ω_s, on en conclut que $\mathcal{H}_{w(r)} \subset N$ pour tout $w \in W$; si toutes les racines sont de même longueur (types A , D et E) le théorème 2 est démontré. Sinon, il faut utiliser la formule de commutation (4) pour montrer que l'on a encore $\mathcal{H}_s \subset N$ pour toute racine s ([4], p. 62).

4. La méthode de descente.

On peut dire que la description usuelle des groupes classiques sur un corps commutatif K consiste à les considérer comme les sous-groupes de $\underline{SL}(n , K)$ commutant à un automorphisme σ de $\underline{SL}(n , K)$ d'ordre fini (en fait, une involution). Si $K = \underline{R}$ ou $K = \underline{C}$ et si on suppose σ analytique réel, il correspond à un automorphisme linéaire ou antilinéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n , K)$ encore noté σ , et si $\underline{SL}(n , K)$ est considéré comme le groupe adjoint de $\mathfrak{sl}(n , K)$, le sous-groupe en question est formé des automorphismes de $\mathfrak{sl}(n , K)$ qui permutent à σ . Cette description peut alors se généraliser aux groupes de Chevalley G_K : étant donné un semi-automorphisme σ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g} \otimes_Z K$ (dont G_K peut être considéré comme groupe d'automorphismes) G_K^σ est le sous-groupe de G_K qui permute avec σ .

On va considérer d'abord le cas où σ est involutif, correspondant à un automorphisme involutif $\xi \longrightarrow \bar{\xi}$ de K , distinct de l'identité ; K_0 sera le sous-corps des invariants de cette involution. On supposera d'autre part que σ provient (par tensorisation avec l'automorphisme précédent de K) d'un automorphisme (encore noté σ) de l'algèbre de Lie sur $\underline{Z}$, laissant globalement invariant $\mathfrak{h}$; cela entraîne que σ permute les racines, donc transforme un système fondamental de racines en un autre. On supposera que σ laisse invariant un système fondamental ; comme les seuls schémas de Dynkin admettant un automorphisme non identique sont du type A , D ou E_6 , on se limite à de l'un de ces types. Les classes d'intransitivité S de σ sont alors de trois types possibles :

1° $S = \{r\}$ avec $\sigma r = r$; r non somme de deux racines ;

2° $S = \{r , \sigma r\}$ formé de deux racines distinctes (de même hauteur) telles que $r + \sigma r$ n'est pas une racine ;

3° $S = \{r , \sigma r , r + \sigma r\}$ (r et σr de même hauteur), cas qui ne se présente que pour A_ℓ , ℓ pair.

On désigne par W^1 le sous-groupe de W formé des permutations qui commutent avec σ , et on démontre que W^1 est transitif sur les classes S ayant même nombre d'éléments [11]. On montre en outre, qu'on peut choisir les signes des X_r , de sorte que $\sigma X_r = \varepsilon X_r$ avec $\varepsilon = 1$ si $\sigma r \neq r$, ou si $\sigma r = r$ et si r n'est pas somme de deux racines, $\varepsilon = -1$ si r est de la forme $s + \sigma s$.

Cela étant, on construit, non pas G_K^σ, mais un sous-groupe G_K^1 de ce dernier, d'indice fini, en considérant pour chaque classe d'intransitivité S, le sous-groupe $\mathfrak{U}_S$ de G_K, et le sous-groupe $\mathfrak{U}_S^1$ de $\mathfrak{U}_S$ qui commute avec σ : ce sont les groupes

$$t \longrightarrow x_r(t) \quad \text{dans le cas } 1°, \text{ avec } t \in K_0 \quad ;$$

$$t \longrightarrow x_r(t)\, x_{\sigma r}(\bar{t}) \quad \text{dans le cas } 2°, \text{ avec } t \in K \quad ;$$

$$t \longrightarrow x_r(t)\, x_{\sigma r}(\bar{t})\, x_{r+\sigma r}(N_{r,\sigma r}\, t\bar{t}) \quad \text{dans le cas } 3°, \text{ avec } t \in K \quad .$$

On fait alors jouer aux $\mathfrak{U}_S^1$ le rôle que jouaient les $\mathcal{X}_r$ dans la définition de G_K, ce qui définit le sous-groupe G_K^1. Les deux théorèmes principaux de Steinberg sont les analogues des théorèmes 1 et 2 :

THÉORÈME 3. - <u>Lorsque w parcourt W^1, les ensembles $\mathfrak{U}^1\,\mathfrak{H}^1\,\omega(w)\,\mathfrak{U}_w^1$ forment une partition de G_K^1, et tout élément d'un de ces ensembles s'écrit d'une seule manière comme produit d'éléments des ensembles indiqués.</u>

Dans cet énoncé, $\mathfrak{U}^1$ est le sous-groupe engendré par les $\mathfrak{U}_S^1$, $S > 0$, $\mathfrak{U}_w^1 = \mathfrak{U}^1 \cap \mathfrak{U}_w$, $\mathfrak{H}^1$ est le sous-groupe de $\mathfrak{H}$ formé des $h(\chi)$, où χ est restreint aux homomorphismes $P \longrightarrow K^*$ tels que $\chi(\sigma\alpha) = \overline{\chi(\alpha)}$.

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> K_0 <u>a au moins 5 éléments et si</u> $\ell \geqslant 3$, G_K^1 <u>est simple.</u>

Les démonstrations sont calquées sur celles de Chevalley pour le théorème 1 et sur la suite de lemmes donnée plus haut pour le théorème 2, avec les petites complications qu'apporte l'existence des trois types de classes S (compensées par le fait que toutes les racines sont de même longueur, ce qui simplifie (4)).

Le théorème 3 permet naturellement le calcul des ordres des groupes obtenus.

Le schéma D_4 admet comme on sait, un groupe d'automorphismes isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et contient entre autres une substitution d'ordre 3. Combinant cette substitution avec un automorphisme d'ordre 3 de K, on peut transporter à cette situation toutes les définitions et tous les théorèmes obtenus dans le cas d'une involution σ, avec les modifications appropriées, ce qui donne des groupes $D_4^2(K)$, qu'on vérifie être simples dès que le corps K_0 des invariants a au moins 4 éléments. On peut aussi faire opérer sur D_4 tout le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, en le combinant avec un groupe d'automorphismes de K isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, d'où encore des résultats analoques pour une famille de groupes $D_4^3(K)$, où cette fois

K est nécessairement infini.

5. Caractérisation géométrique des groupes obtenus.

R. REE [9] a vérifié que les groupes de Chevalley G_K de types A, B, C, D et G_2 étaient bien les groupes classiques (formes d'"indice maximum") et le groupe d'automorphismes des "octaves de Cayley" comme lorsque $K = \underset{\sim}{C}$. Les groupes A_ℓ^1 (paragraphe 4) sont les groupes unitaires $U(\ell + 1, K)$ relatifs à une forme d'indice maximum et les groupes D_ℓ^1 les groupes orthogonaux $O(2\ell, K_0)$ d'indice $\ell - 1$ [11]. TITS a d'autre part, identifié le groupe D_4^2 à un groupe permutant à une "trialité" [12] et le groupe E_6^1 à un groupe permutant à une "polarité" dans un "plan" dont les "droites" sont des demi-quadriques à 8 dimensions sur K, avec certaines "conditions d'incidence" [13] ; c'est d'ailleurs, un cas particulier des "géométries" associées par cet auteur à tout groupe de Chevalley [14], [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABE (E.). - On the groups of C. Chevalley, J. Math. Soc. Japan, t. 11, 1959, p. 15-41.

[2] BRUHAT (François). - Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 437-439.

[3] BRUHAT (François). - Structure des algèbres de Lie semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55, n° 107.

[4] CHEVALLEY (Claude). - Sur certains groupes simples, Tohoku math. J., 2. Series, t. 7, 1955, p. 14-66.

[5] DIEUDONNÉ (Jean). - On simple groups of type B_n, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 922-923.

[6] HERTZIG (D.). - On simple algebraic groups, Abstracts of short communications presented at the International Congress of Mathematicians, [1958. Edinburgh], p. 18. - Edinburgh, University of Edinburgh, 1958.

[7] LAZARD (Michel). - Groupes semi-simples : structure de B et de G/B, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-58 : Classification des groupes de Lie algébriques, n° 13.

[8] ONO (Takahashi). - Sur les groupes de Chevalley, J. Math. Soc. Japan, t. 10, 1958, p. 307-313.

[9] REE (Rimhak). - On some simple groups defined by C. Chevalley, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 392-400.

[10] Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie.

[11] STEINBERG (Robert). - Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 875-891.

[12] TITS (Jacques). - Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent, Publ. Inst. Hautes Etudes scient., 1959, n° 2, p. 37-84.

[13] TITS (Jacques). - Les "formes réelles" des groupes de type E_6 ; Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58, n° 162.

[14] TITS (Jacques). - Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique, Bull. Soc. math. Belgique, t. 8, 1956, p. 48-81.

[15] TITS (Jacques). - Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes, Colloque d'Algèbre supérieure [1956 Bruxelles], p. 261-289. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).