JACQUES-LOUIS LIONS

Sur les théorèmes d'interpolation

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 196, p. 391-403
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__391_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 196

Février 1960

SUR LES THÉORÈMES D'INTERPOLATION

par Jacques-Louis LIONS

1. Généralités, I.

Soient E et F deux espaces de Hilbert séparables, avec $E \subset F$ algébriquement et topologiquement, E étant dense dans F . Soit W l'espace des fonctiòns $u \in L^2\ (0\ ,\ \infty\ ;\ E)$ avec $u' = du/dt \in L^2\ (0\ ,\ \infty\ ;\ F)$ (u définit une distribution sur l'ouvert $]0\ ,\ \infty[$ à valeurs dans E , ce qui permet de définir u') ; dans ces conditions $u(0)$ a un sens : de façon précise, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables de $t \geqslant 0$ à valeurs dans E et à support compact, est dense dans W , et l'application $u \longrightarrow u(0)$ se prolonge par continuité en une application encore notée $u \longrightarrow u(0)$ de W dans F ; mais il y a plus : lorsque u parcourt W , $u(0)$ parcourt un espace intermédiaire entre E et F , soit $E^{1/2}\ F^{1/2}$ cet espace (caractérisé directement plus loin). Cet espace donne lieu à la propriété suivante (que j'avais utilisée dans des cas particuliers ; la remarque générale est due à N. ARONSZAJN) : si $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ est un deuxième couple d'espaces hilbertiens, si π est un opérateur linéaire continu de E dans $\tilde{E}$ et de F dans $\tilde{F}$, alors π est un opérateur linéaire continu de $E^{1/2}\ F^{1/2}$ dans $\tilde{E}^{1/2}\ \tilde{F}^{1/2}$. Si l'on remplace la dérivée d/dt par une dérivée fractionnaire, on obtient une famille à un paramètre d'espaces intermédiaires, $E^{1-\theta}\ F^{\theta}$ (cf. [9]). De façon précise, si $E \subset F$ alors E est le domaine d'un opérateur auto-adjoint A , > 0 dans F , et $E^{1-\theta}\ F^{\theta} = D(A^{1-\theta})$ (domaine de $A^{1-\theta}$). Alors on a le théorème suivant

THÉORÈME 1, 1. - *Si* π *est un opérateur linéaire continu de* E *dans* $\tilde{E}$ *et de* F *dans* $\tilde{F}$, π *est linéaire continu de* $E^{1-\theta}\ F^{\theta}$ *dans* $\tilde{E}^{1-\theta}\ \tilde{F}^{\theta}$.

Ce théorème est une conséquence du théorème de traces que voici :

THÉORÈME 1, 2. - *Soit* $u \in L^2\ (-\infty\ ,\ +\infty\ ;\ E)$, *sa transformée de Fourier* $\hat{u}$ *en* t *vérifiant* $|\tau|^{\gamma}\ \hat{u} \in L^2\ (-\infty\ ,\ +\infty\ ;\ F)$, $\gamma = 1/2\ \theta$. *Alors* $u(0) \in E^{1-\theta}\ F^{\theta}$, *l'application* $u \longrightarrow u(0)$ *étant continue et surjective* [9].

En effet, si $e \in E^{1-\theta}\ F^{\theta}$, on lui associe u , avec les propriétés du théorème 1, 2, $u(0) = e$, et u dépendant continûment de e (ce qui est loisible). On considère ensuite $\pi(u(t)) = v(t)$, qui vérifie : $y \in L^2\ (-\infty\ ,\ +\infty\ ;\ E)$, sa transformée de Fourier en t , $\hat{v}$, vérifiant : $|\tau|^{\gamma}\ \hat{v} \in L^2\ (-\infty\ ,\ +\infty\ ;\ F)$. Alors,

$v(0) = \pi e \in \tilde{E}^{1-\theta}\tilde{F}^{\theta}$ et le théorème 1, 1 suit. On renvoie à [9] pour la démonstration du théorème 1, 2.

Cette méthode se prête évidemment à une infinité de généralisations : soient E et F deux espaces de Banach (ou non d'ailleurs...) tous deux contenus algébriquement et topologiquement dans un même espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$. Soit $\Phi(E)$ et $\Psi(F)$ deux espaces de fonctions d'une variable réelle t, à valeurs dans E et F (par exemple, des espaces de Orlicz). On suppose que si $u \in \Phi(E)$, alors, pour tout T fini, $u \in L^1(0, T; E)$. Soit W l'espace des $u \in \Phi(E)$ avec $u^{(j)} \in \Psi_j(F)$, $j = 1, \dots, k$; si cela implique : " $u^{(j)}$ est dans $L^1(0, T; F)$ pour T fini", on peut définir $u(0)$, $u'(0)$, ..., $u^{(k-1)}(0)$. Le problème essentiel est alors de déterminer de la façon la plus précise possible les espaces **de traces** parcourus par les $u^{(j)}(0)$ lorsque u parcourt W. Si alors π est un opérateur linéaire continu de E dans $\tilde{E}$ et de F dans $\tilde{F}$, alors π appliquera les espaces de traces dans les espaces de traces correspondants, si l'on suppose que π applique $\Phi(E)$ dans $\Phi(\tilde{E})$ et $\Psi_j(F)$ dans $\Psi_j(\tilde{F})$.

Il n'y a naturellement aucune raison de se borner à <u>deux</u> espaces E et F (cf. [13]), ni à <u>une</u> variable t (cf. [12]), etc.

Cette méthode permet de retrouver (au moins pour l'essentiel) la plupart des théorèmes d'interpolation connus, et d'en trouver d'autres. Des exemples seront donnés aux n° 3, 4, 5.

La "méthode des traces" est un cas particulier de la suivante : soit W l'espace des $u \in \Phi(E)$ avec $u' \in \Psi(F)$ (pour fixer les idées) ; soit L un opérateur linéaire continu de W <u>sur</u> $G \in \mathcal{E}$. Alors, si $\tilde{G}$ est défini par "là même" L à partir de $\Phi(\tilde{E})$ et $\Psi(\tilde{F})$, on aura encore un théorème d'interpolation. Un exemple utile est : $L(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, dt$, cf. [14], ce que nous ne développerons pas ici.

2. <u>Généralités, II.</u>

Soit encore E et F deux espaces de Banach, contenus algébriquement et topologiquement dans $\mathcal{E}$. On va donner ici la construction de **Gagliardo** [5] et [6] d'espaces intermédiaires "entre" E et F. Soit $U = E + F$; à $u \in U$ on associe l'ensemble M_u du quadrant $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, défini comme suit :
$\{x, y\} \in M_u$ s'il existe $e \in E$, $f \in F$, avec $u = e + f$, $\|e\| \leqslant x$, $\|f\| \leqslant y$.
M_u a les propriétés suivantes : il est convexe ; si $\{x, y\} \in M_u$ alors $\{x + h, y + k\} \in M_u$ quels que soient $h \geqslant 0$, $k \geqslant 0$; $M_{\lambda u} = |\lambda| M_u$,

$M_{u+u^*} \supset M_u + M_{u^*}$; si $E \cap F$ est dense dans E (resp. F), $\inf_{\{x,y\}\in M_u} x = 0$ (resp. $\inf y = 0$) .

Soit alors $\Phi(M)$ une fonctionnelle (finie ou non) définie sur les ensembles du type M_u , et soit $\Phi(E, F)$ l'ensemble des $u \in U$ tels que $\Phi(M_u) < \infty$. Sous certaines conditions, faciles à expliciter, cet ensemble est un espace vectoriel, "intermédiaire" entre E et F .

EXEMPLE 2, 1. - $\Phi(M) = \sup x^{1-\theta} y^{\theta}$, $\{x , y\} \in \partial M$ = frontière de M , $0 \leq \theta \leq 1$.

Soit maintenant π une application linéaire continue de E dans $\tilde{E}$, soit M_0 sa norme, et de F dans $\tilde{F}$, soit M_1 sa norme. On vérifie aisément que

$$TM_u \subset M_{\pi u} \quad ,$$

où

$$TM_u = \{M_0 x , M_1 y \mid \{x , y\} \in M_u\} \quad .$$

Alors (on doit avoir $\Phi(M) \geq \Phi(M^*)$ si $M \subset M^*$) :

$$\Phi(TM_u) \geq \Phi(M_{\pi u}) \quad ,$$

et par conséquent si la fonctionnelle Φ vérifie :

$$\Phi(TM_u) \leq c\,\Phi(M_u) \quad ,$$

on aura

$$\Phi(M_{\pi u}) \leq c\,\Phi(M_u) < \infty \quad ,$$

de sorte que π appliquera $\Phi(E , F)$ dans $\Phi(\tilde{E} , \tilde{F})$.

La difficulté est maintenant exactement de même type que dans la première méthode : il faut pouvoir interpréter de la façon la plus précise possible $\Phi(E , F)$ à partir de E et F ; par exemple, étant donnés L^p et L^q , et étant donné r compris entre p et q , l'espace L^r est-il de la forme $\Phi(L^p , L^q)$ pour une fonctionnelle Φ convenable ?

Comparaison des méthodes. - La première méthode, plus souple, permet plus facilement d'obtenir des constructions explicites d'espaces intermédiaires ; c'est celle que nous suivrons ci-après. Toutefois, la deuxième méthode permet de considérer des opérateurs non linéaires de façon plus systématique que la première. Il serait donc intéressant de savoir si la méthode de Gagliardo s'applique chaque fois que la première méthode s'applique ; seuls des cas très particuliers de ce problème sont résolus pour l'instant.

3. Résultats généraux à l'aide des semi-groupes.

Pour ce numéro, cf. [10].

3, 1. - Dans le Banach E, on désigne par Λ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \longrightarrow G(t)$; on supposera :

(SG) $\qquad t \longrightarrow G(t)$ est fortement continu, borné, $G(0) = I$.

On munit $D(\Lambda)$ (domaine de Λ) de la norme $\|e\| + \|\Lambda e\|$ qui en fait un espace de Banach. On peut définir très simplement des espaces intermédiaires entre $D(\Lambda)$ et E :

DÉFINITION 3, 1. - On désigne par $T(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$ tels que $t^{\alpha-1}(G(t)\, e - e) \in L^p(0, \infty, E)$, $\quad 1 < p \leq \infty$, $\quad 1/p + \alpha = \theta \in]0, 1[$

On le munit de la norme :

$$\|e\| + \left(\int_0^{\infty} t^{(\alpha-1)p} \|G(t)\, e - e\|^p \, dt\right)^{1/p}$$

(modification évidente si $p = \infty$), qui en fait un espace de Banach. On vérifie facilement que $D(\Lambda) \subset T(p, \alpha) \subset E$.

Désignons maintenant par $W(p, \alpha)$ l'espace des fonctions u avec

(3, 1) $$t^{\alpha} u \in L^p(0, \infty ; D(\Lambda)) \quad ,$$

(3, 2) $$t^{\alpha} u' \in L^p(0, \infty ; E)$$

(il résulte de (3, 1) que $u \in L^1(0, T ; D(\Lambda))$ pour tout T fini, de sorte que (3, 2) a un sens).

THÉORÈME 3, 1. - On suppose que (SG) a lieu. Alors, pour tout $u \in W(p, \alpha)$, $u(0) \in T(p, \alpha)$, l'application $u \longrightarrow u(0)$ étant continue. Réciproquement, si e est donné dans $T(p, \alpha)$, il existe u dépendant continûment de e dans $W(p, \alpha)$ avec $u(0) = e$.

Il résulte de ce théorème, par le procédé indiqué au n° 1, le théorème suivant.

THÉORÈME 3, 2. - On donne $\tilde{E}$, avec $\tilde{\Lambda}$ vérifiant (SG) dans $\tilde{E}$. On donne π opérateur linéaire continu de $D(\Lambda)$ dans $D(\tilde{\Lambda})$ et de E dans $\tilde{E}$. Alors, quels que soient p et α avec $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha = \theta \in]0, 1[$, π est un opérateur linéaire continu de $T(p, \alpha)$ dans $\tilde{T}(p, \alpha)$.

Plus généralement, on considère ν opérateurs, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$, chaque Λ_i étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $G_i(t)$ fortement continu et borné ; on suppose les $G_i(s)$ commutatifs aux $G_j(t)$. On désigne par $D(\Lambda)$ l'espace $\bigcap_{i=1}^{\nu} D(\Lambda_i)$, et par $T(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}(G_i(t)\, e - e) \in L^p(0\,,\infty\,;\,E) \qquad \text{pour} \quad i = 1\,,\,\dots\,,\nu \quad .$$

Les théorèmes 3, 1 et 3, 2 sont valables dans ce cas.

Plan de la démonstration du théorème 3, 1.

1° On considère u prolongé par 0 pour $t < 0$, et on pose $u(0) = e$. Alors $-\Lambda u + u' = f + \delta \otimes e$, où $t^{\alpha} f \in L^p(0\,,\infty\,;\,E)$; on en déduit

$$u = G * f + G(t)\, e \quad ,$$

d'où

$$G(t)\, e - e = \int_0^t u'(\sigma)\, d\sigma - G * f \quad .$$

Mais par hypothèse, $t^{\alpha} u' = v$, $t^{\alpha} f = g$, avec $v\,,\, g\, \sigma\, L^p(0\,,\infty\,;\,E)$. Donc

$$G(t)\, e - e = \Psi_1 - \Psi_2\,, \quad \Psi_1(t) = \int_0^t \sigma^{-\alpha}\, v(\sigma)\, d\sigma, \quad \Psi_2(t) = \int_0^t G(t-\sigma)\, \sigma^{-\alpha}\, g(\sigma)\, d\sigma \quad ,$$

donc

$$\|\Psi_2(t)\| \leq M \int_0^t \sigma^{-\alpha}\, \|g(\sigma)\|\, d\sigma \quad ..$$

On utilise alors le théorème suivant de HARDY [7] : si $f \in L^p(0\,,\infty)$ et si $\mathcal{H}_\alpha f(x) = x^{\alpha-1} \int_0^x y^{-\alpha} f(y)\, dy$, alors $\mathcal{H}_\alpha$ est un opérateur linéaire continu de $L^p(0\,,\infty)$ dans lui-même.

Des évaluations qui précèdent et du théorème de Hardy résulte aussitôt que $e \in T(p\,,\alpha)$.

2° Soit e donné dans $T(p\,,\alpha)$. On introduit (cf. [4]) :

$$v(t) = t^{-1} \int_0^t G(\sigma)\, e\, d\sigma = t^{-1}\, Y_1 * Ge \quad .$$

Alors $v(0) = e$, et $\Lambda v(t) = t^{-1}(G(t)\, e - e)$, de sorte que $t^{\alpha} \Lambda v \in L^p(0\,,\infty\,;\,E)$
Ensuite

$$v' = -\, t^{-2}\, Y_1 * (G(t)\, e - e) + t^{-1}(G(t)\, e - e) \quad ,$$

d'où l'on déduit que $t^{\alpha} v' \in L^p(0\,,\infty\,;\,E)$, en utilisant le théorème de Hardy avec $\alpha = 0$.

Compléments : [13].

3, 2. EXEMPLES.

EXEMPLE 3, 1. - On prend $E = L^q(R^n)$, $1 < q < \infty$, et $\Lambda_i = \partial/\partial x_i$,

$i = 1, \ldots, n$. Le semi-groupe (et même le groupe) correspondant est défini par $G_i(t)\, f(x) = f(\ldots, x_i + t, \ldots)$.

On voit alors que $f \in T(p, \alpha)$ équivaut à $f \in L^q(R^n)$, avec

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\left(\int_{R^n} |f(\ldots, x_i + t, \ldots) - f(x)|^q\, dx\right)^{p/q} dt < \infty$$

on retrouve des espaces introduits dans [16] ; on sait maintenant que ce sont des espaces de traces et qu'ils donnent lieu à des théorèmes d'interpolation. Pour $\alpha = 0$, le théorème de traces correspondant est dû à GAGLIARDO [4].

REMARQUE 3, 1. - Si $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$, on peut, à l'aide d'un résultat général, non publié, sur la dualité dans les espaces de traces, déterminer les duals des espaces précédents.

PROBLÈME 3, 1. - **Désignons par** $H^{\sigma,q}$ l'espace des fonctions f telles que $\mathcal{F}^{-1}((1 + \xi^2)^{\sigma/2}\mathcal{F}f) \in L^q$, $\mathcal{F}$ désignant l'opérateur de transformation de Fourier. On obtient ainsi de nouveaux (?) espaces intermédiaires entre $H^{1,q}$ et L^q $(H^{1,q} = D(\Lambda))$, si $0 < \sigma < 1$. Ces espaces donnent lieu au théorème d'interpolation. Il serait intéressant de connaître la position des $T(p, \alpha)$ par rapport aux $H^{\sigma,q}$. NIRENBERG conjecture que $T(q, 0) = H^{\sigma,q}$, $\sigma = 1 - 1/q$. (On verra d'ailleurs au numéro 4 qu'il y a lieu d'introduire encore d'autres (?) espaces intermédiaires...).

PROBLÈME 3, 2. - Comment définir des espaces intermédiaires entre L^q et l'espace des $u \in L^q$ avec $\partial u/\partial x_i \in L^{q_i}$, $q_i \neq q$?

EXEMPLE 3, 2. - Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière une variété de dimension $n - 1$, une fois continûment différentiable. L'espace $\mathrm{Lip}_\alpha(\bar{\Omega})$ est un espace intermédiaire entre $C^0(\bar{\Omega})$ (continues sur $\bar{\Omega}$) et $C^1(\bar{\Omega})$ (fonctions une fois continûment différentiables dans $\bar{\Omega}$) : $\mathrm{Lip}_\alpha(\Omega) = T(\infty, 1 - \alpha)$; les espaces $\mathrm{Lip}_\sigma(\bar{\Omega})$ donnent donc lieu à un théorème d'interpolation.

EXEMPLE 3, 3. - Soit X localement compact, $d\mu$ une mesure positive sur X, ψ une fonction > 0 mesurable ; $E = L^q(X)$, $G(t)\, f(x) = \exp(-t\,\psi(x))\, f(x)$. Alors $f \in T(p, \alpha)$ équivaut à $f \in L^q(X)$ avec

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\left(\int_{R^n} |1 - \exp(-t\,\psi(x))|^q\, |f(x)|^q\, dx\right)^{p/q} dt < \infty \quad .$$

Si $p = q$ cette condition équivaut à $\psi^{(1-\theta)} f \in L^p$. Le théorème d'interpolation correspondant est un cas particulier de [18].

EXEMPLE 3, 4. - Utilisant ce qui précède et un théorème de Mikhlin [15], on peut montrer que, si π est un opérateur linéaire continu de

$H^{2,p} = \{u \mid u\ ,\ \partial u/\partial x_i\ ,\ \partial^2 u/\partial x_i\, \partial x_j \in L^p\}$, $1 < p < \infty$, dans $C^1(\bar{\Omega})$

et de L^p dans $C^0(\bar{\Omega})$, alors π applique continûment $H^{1,p}$ dans $Lip_{1/2}(\bar{\Omega})$.

EXEMPLE 3, 5. - Dans le cas hilbertien du numéro 1 on peut vérifier que $T(2\ ,\alpha) = E^{1-\theta}F^{\theta}$, $1/2 + \alpha = \theta$.

3, 3.- Problèmes. - Il y a évidemment d'autres possibilités que la définition 3, 1 pour introduire des "espaces intermédiaires". Voici trois exemples :

EXEMPLE I. - Posons :

$$H(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ G(a_j\ t) \qquad ,$$

$a_j > 0$, les λ_j et les a_j étant choisis de façon que $H(0) = I$, $H'(0) = \dots = H^{(m-1)}(0) = 0$. Soit alors X l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-m}(H(t)\ e - e) \in L^p(0\ ,\infty\ ;\ E)\ ,\quad 1/p + \alpha = \theta \in]0\ ,m[\qquad .$$

On vérifie que $D(\Lambda^m) \subset X \subset E$.

EXEMPLE II. - On pose :

$$G*(t) = t^{-1}\int_0^{\infty} \exp\,(-\sigma/t)\ G(\sigma)\ d\sigma \qquad ,$$

et on définit l'espace Y des éléments $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}(G*(t)\ e - e) \in L^p(0\ ,\infty\ ;\ E) \qquad .$$

On vérifie que $D(\Lambda) \subset Y \subset E$.

EXEMPLE III. - Soit Z l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-2}\int_0^t (G(\sigma)\ e - e)\ d\sigma \in L^p(0\ ,\infty\ ;\ E) \qquad ;$$

ici encore $D(\Lambda) \subset Z \subset E$.

Relativement à ces exemples (et à d'autres du même genre) se pose naturellement la question suivante : quels sont ceux de ces espaces donnant lieu à des théorèmes d'interpolation ? Pour essayer d'y voir clair, il serait probablement utile d'obtenir, si possible, une démonstration directe du théorème 3, 2, i. e. sans passer par les traces. (On peut songer à utiliser les "puissances" de Λ (cf. [2], [8])).

4. Cas des groupes.

Supposons maintenant que Λ est générateur infinitésimal d'un groupe $t \longrightarrow G(t)$, continu et borné. Naturellement, les résultats du numéro 3 sont valables !, mais on peut cette fois introduire deux nouvelles classes d'espaces intermédiaires et donnant lieu à des théorèmes d'interpolation. Cf. [11].

On donne p et α, avec $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha = \theta \in]0, 1[$. Alors on désigne par $S_0(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-2}(G(t)\, e + G(-t)\, e - 2e) \in L^p(0, \infty\, ; E) \quad ;$$

on désigne par $S_1(p, \alpha)$ l'espace des $e \in E$ avec

$$t^{\alpha-2} \int_0^t (G(\sigma)\, e + G(-\sigma)\, e - 2e)\, d\sigma \in L^p(0, \infty\, ; E) \quad .$$

On a :

$$D(\Lambda^2) \subset S_0(p, \alpha) \subset E, \quad D(\Lambda) \subset S_1(p, \alpha) \subset E \quad .$$

THÉORÈME 4, 1. - On suppose que $G(t)$ est continu et borné. Si $u(t)$ vérifie

(4, 1) $$t^{\alpha} u \in L^p(0, \infty\, ; D(\Lambda^2)) \quad ,$$

(4, 2) $$t^{\alpha} u'' \in L^p(0, \infty\, ; E) \quad ,$$

alors $u(0) \in S_0(p, \alpha)$, $u'(0) \in S_1(p, \alpha)$, l'application $u \longrightarrow \{u(0), u'(0)\}$ étant continue. Réciproquement, si $e_0 \in S_0(p, \alpha)$ et si $e_1 \in S_1(p, \alpha)$, il existe u vérifiant (4, 1) et (4, 2) avec $u(0) = e_0$, $u'(0) = e_1$, et u dépendant continûment de $\{e_0, e_1\}$.

On déduit de ce théorème le résultat d'interpolation suivant :

THÉORÈME 4, 2. - Soit π opérateur linéaire continu de E dans $\tilde{E}$ et de $D(\Lambda^2)$ dans $D(\tilde{\Lambda}^2)$ ($\tilde{\Lambda}$ est générateur infinitésimal d'un groupe borné dans $\tilde{E}$). Alors, si $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha = \theta \in]0, 1[$, π est un opérateur linéaire continu de $S_0(p, \alpha)$ dans $\tilde{S}_0(p, \alpha)$ et de $S_1(p, \alpha)$ dans $\tilde{S}_1(p, \alpha)$.

Ces résultats se généralisent au cas d'une famille finie de générateurs infinitésimaux de groupes bornés et commutatifs.

EXEMPLE 4, 1. - On prend $E = L^q(R^n)$, $1 < q < \infty$, $\Lambda_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$. Alors $D(\Lambda^2)$ coïncide avec l'espace $H^{2,q}$ des fonctions $f \in L^q$ ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre ≤ 2. La fonction f sera dans $S_0(p, \alpha)$ si $f \in L^q$ et si

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-2)p}\left(\int_{R^n} |f(\dots, x_i + t, \dots) + f(\dots, x_i - t, \dots) - 2f(x)|^q \, dx\right)^{p/q} dt < \infty \quad .$$

Remarquons que dans ce cas, on a le résultat suivant : si π est un opérateur linéaire continu de $H^{2,q}$ dans lui-même et de L^q dans lui-même, alors π est un opérateur linéaire continu de $H^{1,q}$ dans lui-même. Donc, si π applique $D(\Lambda^2)$ dans lui-même et E dans lui-même, il applique $D(\Lambda)$ dans lui-même. Ce résultat n'est très probablement pas général, mais on manque de contre-exemples...

Notons également ceci : si $u \in L^q$, $1 < q < \infty$, et si $\Delta u \in L^q$, Δ étant le Laplacien, alors $u \in H^{2,q}$, et Δ est générateur infinitésimal du semi-groupe de la chaleur. Ceci, avec les résultats du numéro 3, permet de définir de nouveaux (?) espaces intermédiaires entre $H^{2,q}$ et L^q-espaces qu'il est facile d'expliciter, mais qu'il est moins facile de situer par rapport aux espaces de type $S_0(p, \alpha)$, $S_1(p, \alpha)$ et $T(p, \alpha)$ déjà introduits. Cela complète le problème 3, 1. (Signalons aussi le problème de l'analyse harmonique dans les $T(p, \alpha)$, etc. ; il est possible que, pour $1/p + \alpha = \theta > 1/2$, ces espaces se comportent de ce point de vue comme des L^q).

REMARQUE 4, 1. - Soit Λ_1 et Λ_2 deux générateurs infinitésimaux de semi-groupes bornés et commutatifs. Soit alors X l'espace des $e \in E$ tels que

$$(4,\ 3) \qquad t_1^{\alpha_1 - 1}(G_1(t_1)\, e - e) \in L^p(0, \infty ; E) \quad ,$$

$$(4,\ 4) \qquad t_2^{\alpha_2 - 1}(G_2(t_2)\, e - e) \in L^p(0, \infty ; E) \quad ,$$

$$(4,\ 5) \qquad t_1^{\alpha_1 - 1}\, t_2^{\alpha_2 - 1}(G_1(t_1) - I)(G_2(t_2) - I)\, e \in L^p((0, \infty) \times (0, \infty) ; E) \quad .$$

On suppose que $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha_i = \theta_i \in]0, 1[$. Cet espace donne lieu au théorème d'interpolation suivant ([12]) : si π est un opérateur linéaire continu de E dans $\widetilde{E}$ et de $D(\Lambda_i)$ dans $D(\widetilde{\Lambda}_i)$, $i = 1, 2$, et de $D(\Lambda_1 \Lambda_2)$ dans $D(\widetilde{\Lambda}_1 \widetilde{\Lambda}_2)$, alors π est linéaire continu de X dans $\widetilde{X}$.

5. Quelques théorèmes du type "Marcel RIESZ".

Si l'on veut obtenir par ce genre de procédé le théorème de Marcel Riesz [17], le problème est le suivant : soit X un espace localement compact, $d\mu$ une mesure positive sur X ; on donne $L^a(X)$, $L^b(X)$ et s compris entre a et b ; l'espace L^s est-il un espace intermédiaire entre L^a et L^b ? On peut apporter trois solutions (et il serait intéressant d'en trouver d'autres) à ce problème :

1° On peut construire une fonctionnelle de Gagliardo, donnant L^s à partir de L^a et L^b, [6] ;

2° A l'aide de la fonctionnelle $L(u) = \int u(t)\, dt$, [14] ;

3° A l'aide des traces, [14].

La solution (3°) étant la plus simple (mais (1°) fournit de nouveaux résultats non linéaires) c'est celle que l'on va indiquer brièvement ici.

THÉORÈME 5, 1. - Soit $u(t) = u(x, t)$ vérifiant

$$t^{\alpha} u \in L^a(0, \infty ; L^a(X)) \quad , \tag{5, 1}$$

$$t^{\beta} u' \in L^b(0, \infty ; L^b(X)) \quad . \tag{5, 2}$$

On suppose que α et β vérifient $1/a + \alpha = 1/b + \beta = \theta$, et soit s donné par

$$1/s = (1 - \theta)/a + \theta/b , \quad 0 < \theta < 1 \quad . \tag{5, 3}$$

Alors $u(x, 0) \in L^s(X)$, l'application $u \to u(x, 0) = u(0)$ étant continue. Réciproquement, si f est donné dans $L^s(X)$, il existe u vérifiant (5, 1), (5, 2), avec $u(0) = f$, et u dépendant continûment de f.

DÉMONSTRATION. -

1° On applique l'inégalité suivante :

$$|f(0)| \leq c\left(\int_0^{\infty} |t^{\alpha} f(t)|^a\, dt\right)^{\frac{1-\theta}{a}} \left(\int_0^{\infty} |t^{\beta} f'(t)|^b\, dt\right)^{\theta/b} \quad , \tag{5, 4}$$

à la fonction $t \to u(x, t)$ (presque partout en x), puis l'inégalité de Holder donne $u(0) \in L^s(X)$.

2° f étant donné, on prend $u = f \exp(-t|f|^{\lambda})$, λ choisi convenablement. (Ce point apparaît sous forme très voisine dans la solution de Gagliardo).

REMARQUE 5, 1. - Soit ψ_0 et ψ_1 deux fonctions μ-mesurables, > 0 ; on désigne par $L^a(X, \psi)$ l'espace des fonctions f telles que $\psi f \in L^a(X)$. Alors, si

$$t^{\alpha} u \in L^a(0, \infty ; L^a(X, \psi_0)) \quad ,$$

$$t^{\beta} u' \in L^b(0, \infty ; L^b(X, \psi_1)) \quad ,$$

on a : $u(0) \in L^s(X, \psi_0^{1-\theta} \psi_1^{\theta})$, l'application $u \to u(0)$ étant surjective. On déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME 5, 2 (Marcel RIESZ). - Si π est une application linéaire continue de $L^a(X)$ dans $L^{a_0}(X)$, $L^b(X)$ dans $L^{b_0}(X)$, avec $a_0 \geq a$, $b_0 \geq b$, alors π est une application linéaire continue de $L^s(X)$ dans $L^{s_0}(X)$, où s est donné par (5, 3) et $1/s_0 = (1-\theta)/a_0 + \theta/b_0$.

(Je n'ai pas pu obtenir toute la convexité de la norme).

DÉMONSTRATION. - On construit u avec (5, 1), (5, 2), $u(0) = f$. On considère ensuite $\pi(u(t)) = v(t)$, qui vérifie :

$$t^{\alpha} v \in L^a(0, \infty ; L^{a_0}(X)), \quad t^{\beta} v' \in L^b(0, \infty ; L^{b_0}(X)) \quad .$$

Il reste à montrer que cela entraîne que $v(0) \in L^{s_0}(X)$. Pour cela, on commence par utiliser (5, 4) pour la fonction $t \to v(x, t)$. Puis on doit utiliser l'inégalité d'Ingham-Jessen, que voici :

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x, y)|^s dy\right)^{r/s} dx\right)^{1/n} \leq \left(\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^r dx\right)^{s/r} dy\right)^{1/s} \quad ,$$

si $r \geq s$. C'est donc ici que l'on a besoin de $a_0 \geq a$, $b_0 \geq b$. Ces conditions apparaissent également dans les deux autres méthodes : est-il possible d'obtenir l'inégalité de Thorin par ces méthodes ?

REMARQUE 5, 2. - Il serait intéressant de savoir si l'on peut également obtenir par les méthodes précédentes

a. Le théorème de Marcinkiewicz, cf. [22]

b. Le complément apporté par COTLAR [3] au théorème de M. RIESZ.

REMARQUE 5, 3. - On peut dans ce qui précède remplacer les L^a par un grand nombre d'autres espaces, construits à partir de L^a. Par exemple, les espaces de Hardy, on retrouve alors certains résultats de [18] (cf. aussi [21]). Utilisant la remarque (5, 1), on retrouve [19] (cf. aussi [20]).

Voici un résultat obtenu en mélangeant toutes les méthodes :

THÉORÈME 5, 3. - Soit π opérateur linéaire continu de $D(\Lambda)$ dans $L^a(X, \psi_0)$ (Λ étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe borné), et de E dans $L^b(X, \psi_1)$. Alors π est un opérateur linéaire continu de $T(p, \alpha)$ dans $L^s(X, \psi_0^{1-\theta}\psi_1^{\theta})$; $1 < p \leq \infty$, $1/p + \alpha = \theta$.
(Cf. autres résultats de ce genre dans [14]).

REMARQUE 5, 4. - On peut se proposer d'interpoler systématiquement entre les $H^{k,a}$ (espace des fonctions $u \in L^a$ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$) et les $L^b(X)$. La situation est la suivante :

1° k <u>varie</u>, a <u>est fixé</u> ; on a le résultat suivant : si π est linéaire continu de $H^{k_0,a}$ dans L^{b_0} et de $H^{k_1,a}$ dans L^{b_1} , alors, si $1 < a < \infty$, π est linéaire continu de $H^{(1-\theta)k_0+\theta k_1,a}$ dans L^{b_θ} , $0 < \theta < 1$ (ici $H^{\sigma,a}$ est défini à l'aide de la transformation de Fourier).

2° k <u>est fixé et</u> a <u>varie</u> ; situation satisfaisante si $1 < a < \infty$; en effet en utilisant FOURIER [15] et Marcel RIESZ, on voit que si π est un opérateur linéaire continu de $H^{k,a}$ dans L^{a_0} et de $H^{k,b}$ dans L^{b_0} , alors π est un opérateur linéaire continu de $H^{k,s}$ dans L^{s_0} (et sans restriction sur a_0 , b_0 en utilisant les résultats de Riesz-Thorin).

3° k <u>et</u> a <u>varient simultanément</u> ; le problème n'est pas résolu.

La suggestion suivante est aimablement fournie au lecteur : soit π opérateur linéaire continu de $H^{1,a}$ dans L^{a_0} et de L^b dans L^{b_0} . Alors π applique T dans L^{s_0} , où T est défini de la façon suivante ; s étant donné par (5, 3), $f \in T$ si $f \in L^s$ et si

$$t^{\sigma-1}(f(\dots , x_i + t , \dots) - f(x)) \in L^s(0 , \infty ; L^s) , \quad 1/s + \sigma = \theta ,$$
$$i = 1 , \dots , n \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - Theory of Bessel potentials, II (à paraître).

[2] BALAKRISHNAN (A. V.). - An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 91, 1959, p. 330-353.

[3] COTLAR (Mischa). - A general interpolation theorem for linear operations, Revista matematica Cuyana, t. 1, 1955, p. 57-84 ; Math. Reviews, t. 19, 1958, p. 563-564.

[4] GAGLIARDO (Emilio). - Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relativa ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Semin mat. Univ. Padova, t. 27, 1957, p. 284-305.

[5] GAGLIARDO (Emilio). - Interpolation d'espaces de Banach et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1912-1914, 3388-3390 et 3517-3518.

[6] GAGLIARDO (Emilio). - Interpolazioni di spazi di Banach e applicazioni, Ricerche di Matematica (à paraître).

[7] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) and PÓLYA (George). - Inequalities. - Cambridge, at University Press, 1959.

[8] HILLE (Einar) and PHILIPS (Ralph S.). - Functional analysis and semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1957 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 31)