JEAN-PIERRE KAHANE

Séries de Fourier aléatoires

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 200, p. 441-450

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__441_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 200

Mai 1960

SÉRIES DE FOURIER ALÉATOIRES

par Jean-Pierre KAHANE

1. Historique.

La considération, implicite, de séries de Taylor aléatoires remonte à 1896 [1]. Emile BOREL formulait, comme application de la transformation $\sum_0^\infty a_n z^n \to \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$, une idée fort curieuse pour l'époque : "Si les coefficients sont quelconques, le cercle de convergence est une coupure". Et il précisait ainsi sa pensée : "Dire que les coefficients sont quelconques, c'est en effet dire que (sauf la condition qui résulte de ce que le rayon de convergence est donné) les valeurs des n premiers coefficients n'ont aucune influence sur les valeurs des suivants". Manque évidemment une définition d'un nombre "quelconque".

La première formulation correcte de ces considérations en terme de probabilités (ou de mesure) est due à STEINHAUS [2] en 1929. Elle peut s'exprimer ainsi : la série $\sum_0^\infty r_n e^{i\Phi_n} z^n$, où les Φ_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes équiparties sur $[0, 2\pi]$, et $\overline{\lim}\, r_n^{1/n} < \infty$, admet presque sûrement son cercle de convergence pour coupure. Un peu plus tard, PALEY et ZYGMUND obtenaient le même résultat pour les séries $\sum_0^\infty \pm a_n z^n$ (a_n fixés, $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} < \infty$) [4].

Les mémoires de PALEY et ZYGMUND [4] sont surtout consacrés aux séries $\sum_0^\infty \pm (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ et contiennent une foule d'idées et de résultats ; en particulier, des conditions suffisantes et des conditions nécessaires pour qu'une telle série représente presque sûrement une fonction continue. Beaucoup plus récemment [10], les mêmes séries sont considérées par SALEM et ZYGMUND qui donnent de nouvelles conditions suffisantes pour la continuité presque sûre, et étudient le comportement asymptotique des sommes partielles dans le cas $\sum(a_n^2 + b_n^2) = \infty$. Les méthodes de [4] et [10] sont utilisées en [15] pour l'étude de la régularité des fonctions représentées.

Dans une autre direction, WIENER introduisit dès 1930 [3], en liaison avec l'analyse harmonique généralisée, une mesure sur l'ensemble des fonctions continues, qui n'est autre qu'une probabilité associée au mouvement brownien. Dans [5] et surtout [6] le mouvement brownien est étudié en relation avec son développement de Fourier. La notion fondamentale est celle de distribution brownienne (distribution au sens de SCHWARTZ) qui est représentée sur le cercle par $\sum_{-\infty}^{\infty} Z_n e^{int}$, où les Z_n sont des variables aléatoires complexes normales, mutuellement indépendantes. Le mouvement brownien, qui admet pour dérivée la distribution brownienne, admet des réalisations presque sûrement (p. s.) continues, mais non dérivables en chaque point ; pour une étude détaillée, voir [9]. Plus généralement, les processus stochastiques faiblement stationnaires sont justiciables d'une analyse harmonique [7], [8], [11]. L'étude faite en [15] concerne tous les processus sur le cercle représentables par $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{int}$, où les A_n sont des variables aléatoires indépendantes ; on indique des conditions pour la continuité, l'appartenance à Lip α, la non dérivabilité, etc. presque sûres.

L'idée de remplacer des constructions plus ou moins laborieuses par un théorème d'existence presque sûre, remonte, on vient de le voir, à BOREL et STEINHAUS. Elle est aussi utilisée dans [3] par WIENER pour mettre en évidence des fonctions à spectre continu (au sens de ce mémoire).

Voici un autre cas typique ([12], page 215) : si $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, il est presque sûr que presque partout la série $\sum_{-\infty}^{\infty} \pm c_n e^{int}$ n'est pas sommable par le procédé d'Abel; donc qu'elle ne représente pas une fonction sommable. Corollaire : la meilleure condition suffisante, ne portant que sur les $|c_n|$, pour que la série $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ soit une série de Fourier-Lebesgue, est $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

SALEM a pensé que cette idée devait permettre de simplifier la théorie de MALLIAVIN sur l'impossibilité de la synthèse harmonique dans ℓ^∞ [13]. Il en est bien ainsi [14].

On peut également remplacer l'exemple de KOLMOGOROV d'une fonction sommable dont la série de Fourier diverge presque partout ([12], page 305) par un théorème d'existence, beaucoup plus intuitif [17].

2. Rudiments de probabilités. Variables aléatoires.

Une variable aléatoire est une fonction mesurable du hasard ; elle sera toujours notée par une lettre capitale. Le hasard est un point $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ de l'hypercube $\mathcal{H} = [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots$ à une infinité de dimensions. Un événement est une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$, et sa probabilité $p(\mathcal{E})$ est sa mesure de Lebesgue (si elle existe) ; $\mathcal{E}$ est presque sûr si $p(\mathcal{E}) = 1$. A toute propriété d'une variable aléatoire ou d'une famille de variables aléatoires on associe l'événement qui la réalise : on parlera donc de "propriété presque sûre".

La valeur moyenne d'une variable aléatoire (v. a.) T est $E(T) = \int_{\mathcal{H}} T(\omega)\, d\omega$. Pour toute suite de v. a. T_k, telles que T_k ne dépende que de ω_k, on a $E(\Pi T_k) = \Pi E(T_k)$. La fonction caractéristique d'une v. a. réelle T est $E(e^{iuT})$; si $E(e^{iuT}) = e^{-u^2/2}$, T est une variable normale (réelle). Deux variables aléatoires T_1 et T_2 sont orthogonales si $E(T_1 T_2) = 0$.

Des variables aléatoires indépendantes T_j ($j = 1, 2, \ldots$) sont des variables aléatoires telles qu'existe une application $\omega \to \omega'$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, préservant la mesure, au moyen de laquelle presque sûrement T_j = fonction de ω'_j. Deux v. a. T et T' dépendent de la même loi s'il existe une telle application avec presque sûrement $T'(\omega) = T(\omega')$. Une v. a. complexe T est invariante par rotation si, pour tout t, Te^{it} dépend de la même loi que T. Si les T_j sont normales réelles indépendantes, alors, pour tout t, $T_1 \cos t + T_2 \sin t$ est une v. a. normale, et $T_1 + iT_2$ s'appelle une v. a. normale complexe ; une v. a. normale complexe est invariante par rotation.

Si T est une v. a. normale (réelle ou complexe), $a + bT$ est une v. a. laplacienne (gaussienne).

LEMME de Kolmogorov. - Si l'on a une suite infinie de v. a. indépendantes T_j, et un événement $\mathcal{E}$ qui, pour tout n, ne dépend pas de la réalisation (= valeur prise) de T_j pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on a $p(\mathcal{E}) = 0$ ou 1.

LEMME de Khintchine. - Si les T_j sont des v. a. réelles indépendantes, $E(T_j) = 0$, $E(T_j^2) = 1$, la série $\sum c_j T_j$ converge p. s. dès que $\sum |c_j|^2 < \infty$.

LEMME de Zygmund (moins évident ; démonstration copiée sur [12], pages 203 et 214). - Si l'on suppose de plus que les T_j dépendent de la même loi, p. s. la série $\sum c_j T_j$ n'est sommable par aucun procédé régulier de sommation dès que $\sum |c_j|^2 = \infty$.

3. Fonctions aléatoires. Séries trigonométriques aléatoires.

On s'intéresse aux fonctions aléatoires $T \to F(t)$ sur le cercle, où $F(t)$ est une v. a. : $\omega \to F_\omega(t)$.

Considérons une propriété locale de F (exemple : $F(t) > 0$; F continue en t, etc.). Dire que, en presque tout point t, elle est presque sûre, c'est dire qu'il est presque sûr qu'elle a lieu en presque tout point t ; on dira sans ambiguité qu'elle a lieu presque sûrement presque partout (p. s. p. p.). Par contre, du fait que partout elle est presque sûre ne suit pas que p. s. elle ait lieu partout. La probabilité qu'une propriété locale ait lieu partout est souvent beaucoup plus difficile à étudier que sa probabilité en chaque point fixe.

Une fonction aléatoire est dite ("strictement") stationnaire si les probabilités associées sont invariantes par les translations $t \to t - t_o$; autrement dit, si pour chaque t_o existe une transformation $\omega \to \omega'$ (n° 3) telle que $F_{\omega'}(t) = F_\omega(t - t_o)$ p. s. Dire alors qu'une propriété locale a lieu p. s. p. p., c'est dire qu'elle a lieu p. s. en un point t_o fixé. La convolution d'une fonction aléatoire stationnaire par une fonction certaine est une fonction aléatoire stationnaire.

Il n'y a pas lieu de se limiter à des fonctions aléatoires stationnaires. Il est naturel de considérer des séries trigonométriques formelles $\Sigma A_n e^{int}$, dont les coefficients A_n sont des variables aléatoires complexes ; elles seront dites stationnaires si toutes leurs convolutions avec des polynômes trigonométriques le sont.

Dans la suite (sauf n° 8 et suivants), on se limitera à l'étude des <u>séries de Steinhaus</u> F , pour lesquelles les A_n sont des variables aléatoires indépendantes, et invariantes par rotation. On notera $F \sim \Sigma A_n e^{int}$, de façon à identifier le cas échéant F à une fonction (resp. distribution). Si cette identification déplaît, on conviendra que toute série trigonométrique formelle représente un fourbi, éventuellement identifiable à une distribution (resp. ultradistribution), et on traduira les énoncés qui suivent en termes de fourbis.

4. <u>Théorème de Steinhaus</u>.

On considère des propriétés P des séries trigonométriques f sur des intervalles, astreintes aux conditions naturelles :

1° Si f satisfait P sur (a , b) , toute translatée f_t satisfait P sur (a + t , b + t) ;

2° Si f satisfait P sur deux intervalles empiétants, f satisfait P sur leur réunion ;

3° Si f satisfait P sur un intervalle, il en est de même, quel que soit le polynôme trigonométrique p , pour $f + p$;

4° Si F est une série de Steinhaus, " F satisfait P sur (a , b) " est probabilisable.

THÉORÈME. - <u>On considère une série de Steinhaus</u> F <u>et une propriété</u> P . <u>Alors p. s.</u> F <u>satisfait</u> P <u>partout, ou bien</u> F <u>ne satisfait</u> P <u>nulle part</u>.

DÉMONSTRATION. - Soit $\{I_n\}$ une famille finie d'intervalles égaux, de longueur ε , recouvrant le cercle, $x_{\varepsilon,n} = p$ (sur I_n , F satisfait P) et $x_\varepsilon = p$ (F satisfait P sur au moins un I_n). D'après (4°), $x_{\varepsilon,n}$ et x_ε existent. Supposons $x_\varepsilon > 0$. On a $x_\varepsilon \leqslant \sum_n x_{\varepsilon,n}$ et, d'après (1°) (F étant stationnaire) tous les $x_{\varepsilon,n}$ sont égaux ; donc $x_{\varepsilon,n} > 0$. D'après (3°) et l'indépendance des A_n , $x_{\varepsilon,n} = 1$ (lemme de Kolmogorov). D'après (2°), p (F satisfait P partout) = 1 .

COROLLAIRES.

1° Toute série de Taylor-Steinhaus admet son cercle de convergence (s'il existe) comme coupure.

2. Si une série de (Fourier)-Steinhaus représente p. s. une distribution F , et si avec une probabilité positive existe un intervalle (dépendant de ω) où F égale une fonction continue (resp. analytique), etc. alors p. s. F est une fonction continue (resp. analytique) etc.

5. <u>Conditions pour que p. s.</u> $F \in L^p$ <u>ou</u> $\mathfrak{F}(\ell^p)$; <u>convergence p. s. p. p.</u>

Notation : $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \in \mathfrak{F}(\ell^p) \Longleftrightarrow \|\{a_n\}\|_p = (\sum |a_n|^p)^{1/p} < \infty$. On démontre facilement, pour tout $p > 0$

$$F \in \mathfrak{F}(\ell^p) \ \underline{\text{p. s. si et seulement si}} \ \sum_1^\infty E(\min(1 , |A_n|^p)) < \infty \quad .$$

Pour $p = 2$, on déduit du lemme de Khintchine

$$F \in L^2 \ \underline{\text{p. s.}} \Longleftrightarrow \sum A_n e^{int} \ \underline{\text{converge p. s. p. p.}} \Longleftrightarrow \sum_1^\infty E(\min(1 , |A_n|^2)) < \infty \ .$$

Supposons maintenant $A_n = a_n T_n$, où les T_n dépendent du même type. Alors, d'après le lemme de Zygmund :

$$F \in L \ \underline{\text{p. s.}} \Longleftrightarrow F \in L^2 \ \underline{\text{p. s.}} \Longleftrightarrow \sum |a_n|^2 < \infty \quad .$$

D'où le corollaire annoncé dans l'introduction.

6. <u>Séries de Steinhaus laplaciennes</u>.

Il est plus difficile, et plus intéressant, d'obtenir des conditions pour que F soit p. s. continue. Pour cela, il sera commode (quoique dans [15] les circonstances soient plus générales) d'énoncer les résultats dans le cas des séries $\sum a_n Z_n e^{int}$, où les Z_n sont normales complexes indépendantes, et $a_n \geqslant 0$.

Hypothèse : F continue p. s. $\Longleftrightarrow F \in L^\infty$ p. s. $\Longleftrightarrow \sum a_n Z_n e^{int}$ p. s. uniformément convergente.- Du moins, dans tous les énoncés ultérieurs, on pourra remplacer continue par $\in L^\infty$ etc. On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante simple, portant sur les a_n, pour que F soit p. s. continue. Cependant on a les résultats suivants.

1. Si $F \sim \sum a_n Z_n e^{int}$ est p. s. continue, toute $F' \sim \sum a'_n Z_n e^{int}$ avec $0 \leqslant a'_n \leqslant a_n$ est p. s. continue (évident : $a'_n = a_n \cos \varphi_n$).

2. Posons $s_j = \left(\sum_{2^j \leqslant |n| < 2^{j+1}} a_n^2\right)^{1/2}$, supposons $\{s_j\}$ décroissante et $\sum^\infty s_j < \infty$. Alors p. s. F est continue ([15] d'après [10]).

3. Supposons $\sum^\infty s_j = \infty$; alors p. s. $F \notin L^\infty$ ((4), [15]).

4. La condition $\{s_j\}\downarrow$ dans (2) n'est pas superflue ([10]).

5. Supposons que Spectre $F = \{n | a_n \neq 0\} \subset \underbrace{\Lambda + \Lambda + \dots \Lambda}_{k \text{ termes}}$, où Λ est une suite > 0 lacunaire $\{\lambda_j\}$ telle que $\lambda_{j+1} > k\lambda_j$ $(j = 1, 2, \dots)$. Posons $t_j = \left(\sum_{\lambda_j \leqslant n < \lambda_{j+1}} a_n^2\right)^{1/2}$, supposons $\{t_j\}$ décroissante et $\sum^\infty t_j < \infty$. Alors p. s. F est continue ([15]).

On obtient (2) et (5) en donnant des majorations probables de polynômes trigonométriques, à une ou plusieurs variables qui peuvent aussi servir pour d'autres problèmes. On peut ainsi compléter (2), en considérant la classe Lip α des fonctions lipschitziennes d'ordre α, avec la convention usuelle : pour $\alpha > 1$, $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha \Longleftrightarrow f' \in \mathrm{Lip}(\alpha - 1)$.

6. Soit $\beta = \varliminf_{j\to\infty} \dfrac{-\log s_j}{j \log 2}$. Si $\alpha < \beta$, $F \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ p. s.

7. Si $\alpha > \beta$, $F \notin \mathrm{Lip}\,\alpha$ p. s. ; donc p. s. p. p. $\varlimsup_{h\downarrow 0} \dfrac{|F(t + h) - F(t)|}{h^\alpha} = \infty$.

Un résultat plus laborieux concerne l'irrégularité locale en tout point.

8. Soit $\gamma = \varlimsup_{j\to\infty} \dfrac{-\log s_j}{j \log 2}$. Si $\alpha > \gamma$, on a p. s. $\varlimsup_{h\downarrow 0} \dfrac{|F(t + h) - F(t)|}{h^\alpha} = \infty$ en tout point t .

On peut encore affiner ces résultats. Indiquons seulement ce qui se passe quand $a_n = |n|^{-3/2}(\log n)^\delta$ $(|n| > 1)$.

$\delta < -1$: p. s. F est continûment dérivable.

$-1 \leqslant \delta < -\frac{1}{2}$: p. s. F est absolument continue, et $F \notin \mathrm{Lip}\, 1$.

$\delta \leqslant -\frac{1}{2}$: p. s. F n'est pas absolument continue.

$\delta < 0$: p. s. F est partout non dérivable.

7. La distribution brownienne.

C'est $W \sim \sum_{-\infty}^{\infty} Z_n e^{int}$. Le mouvement brownien est sa primitive ; à l'addition près de $Z_0 t$, il est défini par la série de Steinhaus laplacienne $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_n}{|n|} e^{int}$. D'après (2), (6) et (8), p. s. la réalisation du mouvement brownien est continue ; elle appartient à $\mathrm{Lip}\,\alpha$ pour $\alpha < \frac{1}{2}$, et satisfait partout $\lim_{h \downarrow 0} \frac{|F(t+h) - F(t)|}{h^\alpha} = \infty$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$; on peut encore un peu préciser. En particulier, p. s. W est une distribution d'ordre 1 .

On vérifie facilement la propriété suivante :

Soit φ et ψ deux fonctions $\in L^2$, portées par des intervalles disjoints ; alors $\langle W , \varphi \rangle$ et $\langle W , \psi \rangle$ sont des v. a. laplaciennes centrées indépendantes.

On a la réciproque suivante :

Soit S une distribution de Steinhaus laplacienne, et φ une fonction assez régulière portée par $[-0 , \alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$. Supposons que $S * \varphi(t)$ et $S * \varphi(s)$ sont des v. a. indépendantes dès que $\cos(t - s) > \cos\alpha$. Alors $S = kW + S_1$, k constante et $S_1 * \varphi = 0$. (Exemple : si φ est la fonction caractéristique de $[0 , \alpha]$, S_1 est α-périodique ; si α/π est irrationnel, $S_1 = 0$).

Pour une interprétation intuitive de la distribution brownienne, voir n° 9, dernier alinéa.

8. Le théorème de Malliavin sur la synthèse harmonique.

Pour toute fonction réelle continue f définie sur le cercle, on pose $e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u) e^{int}$. Sous la condition

$(C_{p,\gamma})$ $$\int |u|^p \, \|\{p_n(u)\}\|_\gamma \, du < \infty$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} (iu)^p e^{iuf} du$ converge dans $\mathfrak{F}(\ell^\gamma)$ vers une distribution $\delta^{(p)}(f)$ à support dans $f^{-1}(0)$; on vérifie $< \delta^{(p)}(f) , f^p > = (-1)^p p! \int_{-\infty}^{\infty} p_o(u) du$.

Contre-exemple à la synthèse harmonique dans ℓ^∞ : il s'agit de construire $g \in \mathfrak{F}(\ell^1)$ et $t \in \mathfrak{F}(\ell^\infty)$ à support dans $g^{-1}(0)$, telles que $<t , g> \neq 0$. Il suffit donc de construire une $f \in \mathfrak{F}(\ell^1)$ satisfaisant $(C_{p,\gamma})$ et $\int p_o(u) du \neq 0$. En appliquant Hölder, on voit que pour $\gamma > 2$ et $q > \frac{8p + 8}{\gamma - 2} - 1$, $(C_{p,\gamma})$ résulte de

(D_q) $$\int_0^\infty u^q \sum |p_n(u)|^4 < \infty \quad .$$

Au lieu de construire f , considérons

$$F \sim \sum_0^\infty a_k(X_k \cos kt + X_k' \sin kt) , \qquad a_k \geqslant 0 , \ \sum_0^\infty a_k < \infty \quad ,$$

les X_k et X_k' étant des variables aléatoires normales réelles indépendantes. P. s. $F \in \mathfrak{F}(\ell^1)$ (n° 5). Un calcul immédiat (reposant sur la remarque $E(\Pi T_k = \Pi E(T_k)$ faite au n° 2) donne

$$E(\int P_o(u) du) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{u^2}{2}\sum a_k^2) du > 0 \quad ;$$

donc $p(\int P_o(u) du \neq 0) > 0$. Un calcul analogue donne

$$E(\int_0^\infty u^q \sum_{-\infty}^{\infty} |P_n(u)|^4 du) = \frac{\Gamma(\frac{q+1}{2})}{8\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (8 \sum_0^\infty a_k^2 \sin^2 \frac{ks}{2} \sin^2 \frac{kt}{2})^{-\frac{q+1}{2}} ds\, dt \ .$$

On a donc l'énoncé suivant.

<u>Supposons que pour tout</u> $r > 0$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_1^\infty a_k^2 \sin^2 \frac{ks}{2} \sin^2 \frac{kt}{2})^{-r} ds\, dt < \infty \quad .$$

<u>Alors p. s., pour tout entier</u> $p > 0$ <u>et tout</u> $\gamma > 2$, $\delta^{(p)}(F) \in \mathfrak{F}(\ell^\gamma)$; <u>et</u> $<\delta^{(p)}(F) , F^p> \neq 0$ <u>avec une probabilité positive</u>.

La même méthode donne facilement :

<u>Pour tout entier positif</u> p , <u>il existe des</u> $f \in \mathfrak{F}(\ell^1)$, <u>satisfaisant une condition de Lipschitz d'ordre</u> > 0 , <u>telles que</u> $f^p \notin$ <u>idéal fermé de</u> $\mathfrak{F}(\ell^1)$ <u>engendré par</u> f^{p+1} .

Des détails et compléments sont donnés en [16].

On retrouve également ainsi une partie des résultats de Malliavin sur le calcul symbolique individuel (cf. Séminaire Bourbaki, Février 1960).

9. Masses ponctuelles disposées au hasard sur le cercle.

Soit $\{m_k\}$ une suite sommable. On considère $T = \sum_1^\infty m_k \, \delta_{\Phi_k}$ (δ_α étant la masse unité en α), où les Φ_k sont des v. a. indépendantes équiparties sur $[0, 2]$; $T \sim \sum_n \sum_k m_k \, e^{in(t-\Phi_k)}$. C'est une mesure stationnaire, mais non de Steinhaus. Les sommes partielles $S_n(T\,;\,t)$ de la série de Fourier de T s'écrivent, pour $t = 0$, $\sum_k m_k \dfrac{\sin n\Phi_k}{\Phi_k} + O(1)$. L'étude de cette fonction de n (somme d'une série trigonométrique à coefficients et à fréquences aléatoires) mène aux énoncés suivants.

Si $\sum_1^\infty |m_j| \log \dfrac{1}{|m_j|} < \infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n(T\,;\,t) < \infty$ p. s. p. p. .

Si $\sum_1^\infty |m_j| \log \dfrac{1}{|m_j|} = \infty$, quelle que soit la suite infinie d'entiers Λ, $\sup\limits_{n\in\Lambda} S_n(T\,;\,t) = \infty$ p. s. p. p.

Dans ce dernier cas, il existe une $f \in L^1$ telle que la série de Fourier de $\sum_1^\infty m_j\, f(t - \Phi_j)$ diverge p. s. p. p.

Soit maintenant $\{m_j\}$ une suite de carré sommable. La série $\sum_{n\neq 0} c_n \, e^{int}$ avec $c_n = \sum_j m_j \, e^{in\Phi_j}$ représente p. s. une distribution. Ainsi $\sum_1^\infty m_j \, \delta'_{\Phi_j}$ est une distribution aléatoire.

Si $\{m_j\}$ n'est pas de carré sommable, les séries $\sum_n D_n^{(\nu)} \, e^{int}$ avec

$$D_n^{(\nu)} = \frac{\sum_{j=1}^{\nu} m_j \, e^{in\Phi_j}}{\left(\sum_{j=1}^{\nu} m_j^2\right)^{1/2}}$$

tendent dans un sens à préciser, vers $\sum_n^{\nu} Z_n \, e^{int}$, de sorte que les mesures aléatoires $\left(\sum_1^\nu m_j^2\right)^{-1/2} \sum_1^\nu m_j \, \delta_{\Phi_j}$ tendent vers la distribution brownienne W. Il conviendrait d'étudier la convergence adéquate.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Emile). - Sur les séries de Taylor, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 123, 1896, p. 1051-1052.

[2] STEINHAUS (J.). - Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, Math. Z., t. 31, 1930, p. 408-416.

[3] WIENER (N.). - Generalized harmonic analysis, Acta Math., t. 55, 1930, p. 117-258.

[4] PALEY (R.) and ZYGMUND (A.). - On some series of functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 26, 1930, p. 337-357 et p. 458-474 ; t. 28, 1932, p. 190-205.

[5] PALEY (R.), WIENER (N.) and ZYGMUND (A.). - Notes on random functions, Math. Z., t. 37, 1933, p. 647-668.

[6] PALEY (R.) and WIENER (N.). - Fourier transforms in the complex domain. - New York, American mathematical Society, 1934 (American mathematical Society Colloquium Publications, 19).

[7] LÉVY (Paul). - Processus stochastiques et mouvement brownien. - Paris, Gauthier-Villars, 1948 (Monographies des Probabilités, 6).

[8] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, Wiley, 1953.

[9] LÉVY (Paul). - Le mouvement brownien. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Mémorial des Sciences mathématiques, 26).

[10] SALEM (R.) and ZYGMUND (A.). - Some properties of trigonometrical series whose terms have random signs, Acta Math., t. 91, 1954, p. 245-301.

[11] BOCHNER (S.). - Harmonic analysis and the theory of probability. - Berkeley, University of California Press, 1955 (California Monographies in mathematical Science).

[12] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, 2d ed. - Cambridge, at the University Press, 1959.

[13] MALLIAVIN (Paul). - Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2155-2157.

[14] KAHANE (J.-P.). - Sur un théorème de Paul Malliavin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2943-2944.

[15] KAHANE (J.-P.). - Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires, Studia Math., t. 19, 1960, p. 1-25.

[16] KAHANE (J.-P.). - Sur la synthèse harmonique dans ℓ^{∞} (à paraître dans un périodique brésilien).

[17] KAHANE (J.-P.). - Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae (à paraître).