JEAN-PIERRE SERRE

Revêtements ramifiés du plan projectif

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 204, p. 483-489

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__483_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 204

Mai 1960

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS DU PLAN PROJECTIF

par Jean-Pierre SERRE

(d'après S. ABHYANKAR [2])

1. Résultats classiques.

Commençons par rappeler l'énoncé du "théorème d'existence" de Riemann-Enriques... :

THÉORÈME 1. - Soit V une variété algébrique, définie sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, et soit $\pi : V' \to V$ un revêtement fini (au sens topologique) de V. Il existe alors sur V' une structure algébrique et une seule qui soit compatible avec la structure analytique de V', et qui soit telle que π soit un morphisme (algébrique).

(De façon plus imagée : tout revêtement topologique d'une variété algébrique est algébrique).

Noter que l'on ne suppose pas V projective ; au contraire, on s'intéresse particulièrement au cas où $V = W - F$, W étant projective et F une sous-variété de W ; le théorème 1 montre alors que les sous-groupes d'indice fini de $\pi_1(W - F)$ correspondent biunivoquement aux revêtements connexes $W' \to W$ qui sont non ramifiés en dehors de F. Lorsque W est la droite projective (resp. le plan projectif), c'est bien là le théorème d'existence de Riemann (resp. d'Enriques).

Il n'est pas question d'exposer ici la démonstration du théorème 1. Indiquons seulement que, si V est normale, il se déduit de deux résultats de GRAUERT-REMMERT ([3], théorème 1, et [4], théorème 32), et que le cas général se ramène au cas normal grâce à la théorie de la descente de GROTHENDIECK (cf. [5], p. 10 et 11).

Le théorème 1 montre quel intérêt il y a (même d'un point de vue purement algébrique) à déterminer le groupe $\pi_1(V)$. Cette détermination est facile lorsque $\dim(V) = 1$. Il n'en est plus de même en dimension 2. Le cas le plus étudié est celui où $V = \mathbf{P}_2 - C$, C étant une courbe du plan $\mathbf{P}_2$. Une méthode générale permettant d'obtenir générateurs et relations pour $\pi_1(\mathbf{P}_2 - C)$ a été donnée par VAN KAMPEN (cf. ZARISKI, [8], chapitre VIII). De nombreux cas particuliers ont été étudiés par ZARISKI, CHISINI, etc. Le résultat le plus frappant est sans doute le suivant, dû à ZARISKI ([8], p. 163) :

THÉORÈME 2. - Si la courbe C n'a que des points simples ou des points doubles à tangentes distinctes, le groupe $\pi_1(\underset{\sim}{P}_2 - C)$ est commutatif.

(Noter que, une fois que l'on sait que $\pi_1(\underset{\sim}{P}_2 - C)$ est commutatif, des arguments homologiques donnent immédiatement sa structure : si C est réunion de courbes irréductibles de degrés $d_1, \ldots, d_r$, le groupe $\pi_1(\underset{\sim}{P}_2 - C)$ est quotient de $\underset{\sim}{Z}^r$ par le sous-groupe engendré par l'élément $(d_1, \ldots, d_r)$).

ZARISKI commence par vérifier cet énoncé lorsque C est formé d'un certain nombre de droites (ce n'est pas aussi facile que l'on pense !), et passe de là au cas général par un argument de "dégénérescence" ; j'ignore quel travail serait nécessaire pour rendre sa démonstration complète.

L'un des objectifs du mémoire d'ABHYANKAR [2] est de démontrer un résultat analogue au théorème 2 en géométrie algébrique de caractéristique quelconque ; on verra d'ailleurs qu'il n'y parvient que partiellement.

2. Revêtements décemment ramifiés.

A partir de maintenant, nous nous plaçons en géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque ; on désigne par p l'exposant caractéristique de k (au sens de BOURBAKI).

Soit V une variété normale ; nous appellerons revêtement de V tout morphisme $\pi : V' \to V$, où V' est normale, de même dimension que V, le morphisme π étant "fini" au sens de GROTHENDIECK (c'est-à-dire propre, et à fibres finies). Si $R(V)$ et $R(V')$ sont les corps de fonctions rationnelles de V et V', $R(V')$ est extension finie de $R(V)$; le degré $[R(V') : R(V)]$ est appelé le degré du revêtement. Inversement, toute extension finie K de $R(V)$ est de la forme $R(V')$, comme on le voit en prenant pour V' la normalisée de V dans K.

Un revêtement $\pi: V' \to V$ est dit galoisien si $R(V')$ est extension galoisienne de $R(V)$; le groupe de Galois G de $R(V')/R(V)$ opère alors sur V', et V s'identifie à V'/G. Dans toute la suite, nous ne considérerons que des revêtements galoisiens.

Soit donc $\pi : V' \to V$ un tel revêtement, et soit n son degré. On dit que V' est non ramifié en un point $P \in V$ si $\pi^{-1}(P)$ est formé de n points distincts. L'ensemble des points de ramification de V' est une sous-variété Δ de V, distincte de V. Lorsque V est non singulière, toutes les composantes irréductibles de Δ sont de codimension 1 : c'est le "théorème de pureté", voir plus loin, n° 4.1.

Soit C une sous-variété irréductible de codimension 1 de V, et soit C' une composante irréductible de $\pi^{-1}(C)$; les anneaux locaux A et A' de C et C' sont des anneaux de valuation discrète, et la théorie de la ramification (cf. [7], chapitre V, par exemple) s'applique. En particulier, on peut définir le sous-groupe d'inertie $I_{C'}$ du groupe de Galois G ; c'est l'ensemble des $s \in G$ tels que $s(Q) = Q$ pour tout $Q \in C'$. Nous dirons que le revêtement considéré est décemment ramifié ("tamely ramified") en C si $I_{C'}$ est d'ordre premier à p (condition indépendante du choix de C' au-dessus de C). D'après la théorie de la ramification, le groupe $I_{C'}$ est alors cyclique.

Soit C une sous-variété irréductible de V. Un revêtement $V' \to V$ sera dit décemment ramifié sur (V, C) si V' est non ramifié en dehors de C, et est décemment ramifié pour toute sous-variété irréductible de codimension 1 de V (il suffit d'ailleurs de le vérifier pour celles qui sont contenues dans C). Soit Ω une extension algébriquement close de $R(V)$; les sous-corps K de Ω, finis sur V, et tels que le revêtement correspondant soit décemment ramifié sur (V, C) forment une famille filtrante croissante ; leur réunion est une extension galoisienne (infinie en général) de $R(V)$, dont le groupe de Galois sera noté $\pi_1^d(V, C)$. Lorsque $C = \emptyset$, on retrouve le groupe fondamental de V, au sens de GROTHENDIECK ; lorsque le corps est le corps $\mathbb{C}$ des complexes, le théorème 1 montre que le groupe $\pi_1^d(V, C)$ n'est autre que le complété du groupe fondamental usuel $\pi_1(V - C)$, pour la topologie des sous-groupes d'indice fini.

3. Revêtements décemment ramifiés de certaines surfaces.

Nous allons maintenant faire une série d'hypothèses restrictives sur le couple (V, C).

(i) V est une surface non singulière.

(Le cas général peut souvent se ramener à celui-là en coupant par des hyperplans et en appliquant le théorème de Bertini. Cette hypothèse n'est donc pas si restrictive qu'elle le paraît).

(ii) La sous-variété C est une courbe dont tous les points sont ou bien des points simples, ou bien des points doubles ordinaires. De plus, toutes les composantes irréductibles de C sont non singulières.

[Cette hypothèse est plus forte que celle du théorème 2. Par exemple, si C est irréductible, elle signifie que C est non singulière].

Soit $\pi : V' \to V$ un revêtement décemment ramifié sur (V, C). Soient C_α les composantes irréductibles de C, et soient C'_α leurs images réciproques par π.

Une étude locale des revêtements décemment ramifiés (cf. n° 4.2) montre que les C'_α sont des courbes <u>non singulières</u>, éventuellement réductibles.

(iii) <u>La variété</u> V <u>est projective, et, pour toute composante irréductible</u> C_α <u>de</u> C , <u>la dimension de la série linéaire complète</u> $|C_\alpha|$ <u>est</u> $\geqslant 2$.

Le fait que $|C_\alpha|$ soit de dimension $\geqslant 2$ et contienne un diviseur irréductible entraîne qu'elle n'a pas de composante fixe, et qu'elle n'est pas "composée avec un pinceau" (autrement dit, elle définit une application rationnelle de V dans un espace projectif dont l'image est de dimension 2). Il en est donc de même de la série formée des $\pi^{-1}(D)$, $D \in |C_\alpha|$. En appliquant à cette série linéaire le théorème de Bertini et le théorème de connexion, on voit que tous les $\pi^{-1}(D)$ sont connexes. Ceci s'applique notamment à $D = C_\alpha$, et comme $\pi^{-1}(C_\alpha)$ a pour support C'_α , on voit que C'_α est connexe. Comme on sait d'autre part que c'est une courbe non singulière, on en conclut que c'est une <u>courbe irréductible</u>. Soit I_α le groupe d'inertie de C'_α dans le groupe de Galois G ; c'est un sous-groupe cyclique invariant de G . Si $\alpha \neq \beta$, les hypothèses faites sur $|C_\alpha|$ et $|C_\beta|$ montrent que C_α et C_β se rencontrent en un point au moins ; une étude locale du revêtement en ce point (cf. n° 4.2) montre alors que I_α et I_β <u>commutent</u>. Soit I le sous-groupe de G engendré par les I_α ; c'est un sous-groupe commutatif, et invariant, du groupe G . Soit $V'' = V'/I$; c'est un revêtement décemment ramifié sur (V , C) , de groupe de Galois G/I ; de plus, la construction même de V'' montre que les groupes d'inertie des C dans V'' sont nuls, c'est-à-dire que aucun des C_α n'est contenu dans le lieu de ramification Δ de $V'' \to V$. D'après le théorème de pureté, on a $\Delta = \emptyset$, autrement dit $V'' \to V$ est <u>non ramifié</u>. En passant à la limite sur V' , on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Si le couple</u> (V , C) <u>vérifie les hypothèses</u> (i) , (ii) , (iii), <u>le quotient de</u> $\pi_1^d(V , C)$ <u>par le sous-groupe commutatif invariant</u> I <u>est isomorphe au groupe</u> $\pi_1^d(V , \emptyset)$.

(Ce théorème est essentiellement celui que démontre ABHYANKAR dans [2], bien qu'il ne l'énonce pas).

COROLLAIRE. - <u>Si l'on suppose en outre que</u> V <u>est simplement connexe (c'est-à-dire ne possède aucun revêtement non ramifié de degré</u> > 1), <u>le groupe</u> $\pi_1^d(V , C)$ <u>est commutatif</u>.

En effet, l'hypothèse " V simplement connexe" signifie que le groupe $\pi_1^d(V , \emptyset)$ est trivial.

Le corollaire ci-dessus s'applique notamment au couple $(\underset{\sim}{P}_2 , C)$, <u>où</u> $\underset{\sim}{P}_2$

désigne le plan projectif, et C une courbe vérifiant la condition (ii). En effet, tout espace projectif est simplement connexe (voir n° 4.3), et si C_α est une composante de C de degré d_α, la dimension de la série linéaire $|C_\alpha|$ est égale à $d_\alpha(d_\alpha + 3)/2$ qui est bien $\geqslant 2$.

REMARQUES.

1. - Une fois que l'on sait que $\pi_1^d(V , C)$ est commutatif, il n'est pas difficile de le déterminer complètement, au moyen de la théorie de Kummer. Lorsque $V = \underset{\sim}{P}_2$, on trouve, comme on pouvait s'y attendre, le complété du groupe analogue sur $\underset{\sim}{C}$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini et premier à p.

2. - Le corollaire au théorème 3 est démontré dans [2] sans supposer que les C_α soient non singulières, mais la démonstration est incorrecte. Il ne semble donc pas que l'on puisse obtenir une véritable généralisation du théorème 2 par les méthodes d'ABHYANKAR ; c'est bien dommage. [On peut toutefois traiter le cas où les C_α n'ont "pas trop" de points multiples, grâce à des éclatements convenables. Cf. une série de mémoires d'ABHYANKAR en cours de publication].

4. Indications sur les démonstrations.

4.1. Théorème de pureté. - Il a été énoncé tout d'abord par ABHYANKAR [1], avec une démonstration incorrecte, attribuée à ZARISKI ... Une démonstration simple (et correcte) a été publiée ensuite par ZARISKI [9].

Le théorème garde un sens pour des schémas quelconques. Sous cette forme, il vient d'être démontré par NAGATA [6], s'appuyant lui-même sur un résultat de CHOW.

4.2. Étude locale des revêtements décemment ramifiés. - On s'appuie sur le :

LEMME D'ABHYANKAR. - Soient V' et W deux revêtements décemment ramifiés de (V , C) ; pour toute composante irréductible C_α de codimension 1 de C, soit i_α (resp. j_α) l'ordre du groupe d'inertie d'une composante irréductible C'_α (resp. D_α) de l'image réciproque de C_α ; supposons :

a. que W est non singulière,

b. que j_α est multiple de i_α pour tout α.

Si alors on note W' le revêtement commun de V' et W correspondant au composé des corps $R(V')$ et $R(W)$, W' est un revêtement non ramifié de W.

Soit G le groupe de Galois de $V' \to V$, soit H celui de $W \to V$, et soit

S celui de $W' \to V$; le groupe S contient deux sous-groupes invariants T' et T tels que $S/T = G$, $S/T' = H$, et l'on a $T \cap T' = \{e\}$. Soit I_α le groupe d'inertie d'une composante irréductible E_α de l'image réciproque de C_α dans W' ; le groupe I_α se plonge dans le produit des groupes correspondants dans V' et W , groupes qui sont cycliques d'ordre i_α et j_α respectivement. Il en résulte que I_α est d'ordre premier à p , donc cyclique, et comme il se projette <u>sur</u> le groupe d'inertie de $W \to V$, la condition (b) montre qu'il est isomorphe à ce dernier. On a donc $I_\alpha \cap T' = \{e\}$, ce qui montre qu'aucun des D_α n'est contenu dans l'ensemble de ramification de $W' \to W$; en appliquant le théorème de pureté, on en conclut bien que $W' \to W$ est non ramifié.

Revenons maintenant à la situation du numéro 3 ; on va étudier $V' \to V$ au voisinage d'un point $P \in C$. Traitons le cas où P est un point double de C (le cas d'un point simple étant analogue). La question étant locale, on peut supposer que C est défini en P par l'équation $xy = 0$, où x , y forment un système régulier de paramètres. On prendra alors pour W la sous-variété de $V \times k^2$ définie par les équations $x'^n = x$, $y'^m = y$, n , m étant deux entiers premiers à p . On constate facilement que, quitte à restreindre encore V , on trouve pour W une variété non singulière, formant un revêtement décemment ramifié sur (V , C) , les ordres des groupes d'inertie étant respectivement n et m , et le groupe de Galois étant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = H$. On peut donc appliquer le lemme d'Abhyankar à V' et W , pourvu que n et m soient choisis assez grands. On en tire :

Si $P \in V$, $P' \in V'$, $Q \in W$, $Q' \in W'$ sont des points correspondants, le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_Q$ s'identifie à celui de l'anneau local $\mathcal{O}_{Q'}$. Comme on a :

$$\hat{\mathcal{O}}_{Q'} \supset \hat{\mathcal{O}}_{P'} \supset \hat{\mathcal{O}}_P \quad ,$$

et que tous ces anneaux sont intégralement clos, on voit que $\hat{\mathcal{O}}_{P'}$ <u>s'identifie au quotient de</u> $\hat{\mathcal{O}}_Q = k[[x' , y']]$ par un sous-groupe fini du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (ce dernier opérant par $x' \to \varepsilon x'$, $y' \to \zeta y'$, où $\varepsilon^n = \zeta^m = 1$). On obtient ainsi une description complète (du point de vue "formel") du revêtement $V' \to V$, description qui permet de vérifier sans difficultés les assertions du numéro 3.

4.3. $\pi_1(\mathbf{P}_n) = 0$. - Le théorème de Bertini permet de se ramener au cas $n = 1$. Dans ce cas, si $X \to \mathbf{P}_1$ est un revêtement non ramifié, de degré d , le genre de X étant g ; la formule de Hurwitz montre que

$$1 - g = d(-1) \quad ,$$

d'où $g = 1 - d$, ce qui entraîne nécessairement $d = 1$.

[Variante : montrer qu'un revêtement non ramifié de P_n définit un revêtement de k^{n+1} ramifié seulement à l'origine, et appliquer le théorème de pureté].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S.). - On the ramification of algebraic functions, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 575-592.

[2] ABHYANKAR (S.). - Tame coverings and fundamental groups of algebraic varieties, Part I : Branch lóci with normal crossings, Applications : theorems of Zariski and Picard, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 46-94.

[3] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Espaces analytiquement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 882-885.

[4] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Komplexe Räume, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 245-318.

[5] GROTHENDIECK (A.). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Descente par morphismes fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p.

[6] NAGATA (M.). - On the purity of branch loci in regular local rings, Illinois J. of Math., t. 3, 1959, p. 328-333.

[7] SAMUEL (P.) und ZARISKI (O.). - Commutative algebra, Vol. 1. - Princeton, Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).

[8] ZARISKI (O.). - Algebraic surfaces. - New York, Chelsea publishing Company, 1948 (Ergebnisse der Mathematik, Band 3, 5).

[9] ZARISKI (O.). - On the purity of the branch locus of algebraic functions, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 791-796.