

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL A. KERVAIRE

**L'homotopie stable des groupes classiques d'après
R. Bott. Applications**

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 172, p. 51-60

http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__51_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'HOMOTOPIE STABLE DES GROUPES CLASSIQUES D'APRÈS R. BOTT. APPLICATIONS

par Michel A. KERVAIRE

1. Le théorème de suspension.

Soient M une variété de Riemann compacte connexe de classe C^∞ et $\mu = (P, Q)$ un couple de points sur M . On désignera par $\Omega_\mu M$ l'ensemble des arcs différentiables par morceaux, joignant P à Q sur M , paramétrisés entre 0 et 1 proportionnellement à la longueur d'arc et muni de la métrique

$$\rho(c, c') = \max_{t \in [0, 1]} d[c(t), c'(t)] + |J(c) - J(c')|,$$

le maximum étant pris sur $t \in [0, 1]$ (d , distance sur M ; $J(c)$, longueur de c).

A tout segment de géodésique $s \in \Omega_\mu M$ est attaché un index $\lambda(s)$ défini comme suit (cf. [3], proposition 3.2) : Un champ η de vecteurs tangents à M le long de s est dit "de Jacobi" s'il satisfait à l'équation différentielle de Jacobi $D_t^2 \eta^\alpha + R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \dot{x}^\beta \eta^\gamma \dot{x}^\delta = 0$ (D_t^2 , dérivée covariante seconde le long de s). Soit $\Lambda_s(X)$, pour X un point de s , l'espace vectoriel des champs de Jacobi sur s qui s'annulent en P et X . On pose $\lambda(s) = \sum_X \dim \Lambda_s(X)$, où la sommation s'étend à tous les $X \in s$, $X \neq P, Q$. (Cette somme est finie car $\dim \Lambda_s(X) = 0$, si X n'est pas conjugué de P).

Soit alors $|\mu|$ le plus petit index positif des géodésiques de $\Omega_\mu M$. ($|\mu| = \infty$ s'il n'existe pas de géodésique d'index positif).

Soit $M^{\mu} \subset \Omega_\mu M$ une composante connexe du sous-espace des géodésiques de longueur minimale. On a le

THÉOREME 1. - Si M est un espace symétrique, alors

1° M^{μ} est également un espace symétrique ;

2° l'inclusion $f : M^{\mu} \rightarrow \Omega_\mu M$ induit un isomorphisme

$$f_* : \pi_k(M^{\mu}) \rightarrow \pi_k(\Omega_\mu M)$$

pour $0 < k < |\mu| - 1$ et un épimorphisme pour $k = |\mu| - 1$.

NOTE. - $\Omega_\mu M$ n'a pas en général le même type d'homotopie que l'espace des lacets sur M muni de la topologie de la convergence compacte. Ces deux espaces ont cependant des groupes d'homotopie isomorphes. En particulier,
 $\pi_1(\Omega_\mu M) \cong \pi_{i+1}(M)$.

EXEMPLES. - Soient $M = S^{n+1}$ et $\mu = (P, Q)$ un couple de points antipodiques, $M^\mu = S^n$ et $f_* : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_k(\Omega_\mu S^{n+1}) \cong \pi_{k+1}(S^{n+1})$ est la suspension de Freudenthal. On voit facilement qu'une géodésique de longueur $(2m+1)\pi$, joignant P à Q , a pour indice $2mn$. Donc $|\mu| = 2n$ et f_* est un isomorphisme pour $k \leq 2n-2$ et un épimorphisme pour $k = 2n-1$.

Soit $M = U(2n)$, $P = E$ la matrice unité dans $U(2n)$ et $Q = -E$. Les géodésiques de longueur minimale sont données par $x \cdot s(t) \cdot x^{-1}$, où $s(t) = e^{-i\pi t} E_n \times e^{i\pi t} E_n$, E_n étant la matrice unité à n lignes et n colonnes. L'ensemble M^μ ($\mu = (P, Q)$) de ces géodésiques est homéomorphe à la grassmannienne $U(2n)/U(n) \times U(n)$ et $|\mu| = 2n+2$. En passant à la limite ($n \rightarrow \infty$), on obtient $\pi_k(B_U) \cong \pi_{k+1}(U)$ pour tout k ; comme $\pi_{k-1}(U) \cong \pi_k(B_U)$ par la suite exacte d'homotopie de la fibration classifiante, on a $\pi_{k-1}(U) \cong \pi_{k+1}(U)$ pour tout k . On sait que $\pi_0(U) = 0$, $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.

L'application 8 fois itérée du théorème 1, en partant de $M = SO(16n)$ fournit la période 8 pour les groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal et la relation $\pi_k(SO) \cong \pi_{k+4}(Sp)$. On obtient également, entre autres, l'isomorphisme $\pi_k(SO/U) \cong \pi_{k+1}(SO)$, donc en particulier $\pi_{4n-1}(SO/U) \cong \mathbb{Z}_{b_n}$, $b_n = 2$ ou 1 suivant que n est pair ou impair, résultat qui sera utilisé au n° 3.

Esquisse de la démonstration du théorème 1. - M étant tout d'abord une variété de Riemann compacte connexe quelconque, soit $\Omega_\mu^a M$ le sous-espace de $\Omega_\mu M$ caractérisé par $J(c) \leq a$. On démontre que $\Omega_\mu^a M$ a la même type d'homotopie que le sous-espace N^b de $N = M \times M \times \dots \times M$ (n fois) défini par

$$N^b = \{x \in N \mid \Phi(x) \leq b\}, \text{ où } \Phi(x) = \sum_0^n [d(x_i, x_{i+1})]^2, \quad x_0 = P, \quad x_{n+1} = Q,$$

n est assez grand pour que $a/\sqrt{(n+1)} < \bar{\rho} =$ longueur élémentaire sur M , et $b = a^2/(n+1)$. Une homotopie équivalence $\alpha : \Omega_\mu^a M \rightarrow N^b$ est donnée par $\alpha(c) = c(t_1), \dots, c(t_n)$, avec $t_i = i/(n+1)$. L'application inverse (à l'homotopie près) est donnée par $\beta(x) =$ polygone géodésique $[Px_1][x_1x_2] \dots [x_nQ]$. (Deux points dont la distance est inférieure à $\bar{\rho}$ sont extrémités d'un segment de géodésique unique qui varie continûment avec ses extrémités).

On constate que x est critique pour Φ si et seulement si $x = \alpha(s)$, où $s \in \Omega_{\mu}^A M$ est un segment de géodésique.

De plus, si $x = \alpha(s)$, le corang de la hessienne H_{Φ} de Φ en x vaut $\dim \Lambda_s(Q)$; l'index de H_{Φ} en x vaut $\lambda(s)$. (Cf. M. MORSE [15], chapitre III, Théorèmes 6.1 et 6.2 respectivement).

Si M est en outre symétrique ($M = G/K$, G muni d'un automorphisme involutif α et $K = \{g \in G \mid \alpha g = g\}$), G opérant par isométries, l'action de G est "variationnellement complète". Cela signifie que tout champ de Jacobi le long de s qui s'annule en P est la restriction sur s d'un déplacement infinitésimal de G (cf. R. BOTT [3], paragraphe 6). Ceci implique :

1° M^A est une variété de Riemann symétrique. En fait, M^A est homéomorphe à K_{μ}/K_s (K_A , stabilisateur de l'ensemble A).

2° Les ensembles critiques de Φ sont des sous-variétés de N . La dimension d'une composante connexe V est donnée par $\dim V = \dim \Lambda_s(Q)$, avec $\alpha(s) \in V$. La dimension de V est donc égale au corang de H_{Φ} en $x \in V$: les variétés V sont des variétés critiques non dégénérées. (Cf. R. BOTT [2]).

Le reste de la démonstration du théorème 1 consiste à généraliser les idées de l'article [19] de R. THOM au cas où les ensembles critiques d'une fonction Φ sur une variété N sont des variétés critiques non-dégénérées (et non plus nécessairement des points isolés non-dégénérés). Soit c une valeur critique de Φ on obtient $N^{c+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$, tel que $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ ne contienne pas d'autre valeur critique pour Φ que c) en "attachant" à $N^{c-\epsilon}$ des espaces E_V fibrés en boules sur V par une application f_V du bord de E_V dans $N^{c-\epsilon}$ (V parcourt l'ensemble des composantes connexes de l'ensemble critique $\Phi = c$). La dimension des boules (fibres de E_V) est égale à l'index de H_{Φ} en $x \in V$. Le théorème 1 s'ensuit après décomposition cellulaire de E_V en cellules de dimensions nulles ou \geq index de H_{Φ} en $x \in V$.

2. Le groupe $\pi_{2m}(U(m))$.

Le calcul de ce groupe (instable) est basé sur le

THÉORÈME 2. - Soit h l'homomorphisme de Hurewicz $h : \pi_{2n}(B_U) \rightarrow H_{2n}(B_U)$. l'image par h d'un générateur de $\pi_{2n}(B_U) \cong \mathbb{Z}$ est exactement divisible par $(n-1)!$.

Montrons que la formule $\pi_{2m}(U(m)) \cong \mathbb{Z}_m!$ est une conséquence de ce théorème : Soit $f : S^{2n} \rightarrow B_U$ une application représentant un générateur de $\pi_{2n}(B_U)$.

L'application f induit sur S^{2n} un fibré principal ξ de groupe $U(N)$, $N \geq n$. Soit ξ' le fibré associé de fibre $U(N)/U(n-1)$. Soient $\chi(\xi) \in \pi_{2n-1}(U(N))$ et $\chi(\xi') \in \pi_{2n-1}(U(N)/U(n-1))$ les "classes caractéristiques" de ces fibrés $\chi(\xi)$ est un générateur de $\pi_{2n-1}(U(N))$; la projection

$$q_* : \pi_{2n-1}(U(N)) \rightarrow \pi_{2n-1}(U(N)/U(n-1))$$

envoie $\chi(\xi)$ sur $\chi(\xi')$; $\chi(\xi') = c_n[S^{2n}]$. La suite exacte d'homotopie de $U(N)/U(n-1)$ montre que $\pi_{2n-2}(U(n-1))$ est cyclique et en outre que son ordre q_n satisfait à $c_n[S^{2n}] = q_n$. Comme $h\{f\}$ est exactement divisible par $c_n[S^{2n}]$, on a $q_n = (n-1)!$.

A. BOREL et F. HIRZEBRUCH ([1], 26.5) ont donné un exemple de fibré $U(N)$ sur S^{2n} dont la classe de Chern vaut $(n-1)!$. Pour démontrer le théorème 2, il est donc suffisant de démontrer que $\text{Im } h \subset (n-1)! H_{2n}(B_U)$.

Soit $f : U(2N)/U(N) \times U(N) \rightarrow \Omega U(2N)$ l'application de Bott (cf. n° 1), et $\lambda_0 = \partial^{-1} \partial_{\Omega}^{-1}$, $f_* : \pi_k(B_U) \rightarrow \pi_{k+2}(B_U)$ l'isomorphisme qui fournit la périodicité (∂ et ∂_{Ω} sont les homomorphismes bord des fibrations $U \rightarrow E_U \rightarrow B_U$ et $\Omega U \rightarrow LU \rightarrow U$, respectivement). On a un homomorphisme analogue en cohomologie $\lambda = f^* S_{\Omega}^* S^* : H^{k+2}(B_U) \rightarrow H^k(B_U)$, où S^* est la suspension en cohomologie. On voit immédiatement que $\text{Im } h \subset (n-1)! H_{2n}(B_U)$ est équivalente à $\text{Im } \lambda^{n-1} \subset (n-1)! H^2(B_U)$, $\lambda^{n-1} : H^{2n}(B_U) \rightarrow H^2(B_U)$ étant obtenue par itération de λ . Comme λ annule les éléments décomposables (par le produit cup), il est suffisant de montrer que pour tout m , $\lambda(c_m)$ est un multiple de $(m-1)c_{m-1}$ plus des éléments décomposables. Pour cela on introduit dans B_U la multiplication μ induite par le couplage naturel $G_{p,q} \times G_{p',q'} \rightarrow G_{p+p',q+q'}$ où $G_{r,s}$ est la variété des r -plans (complexes) de C^{r+s} . On démontre alors que

1° Les éléments dans l'image de λ sont primitifs (v est primitif si $\mu^* v = v \otimes 1 + 1 \otimes v$);

2° Les éléments primitifs de $H^{2m}(B_U)$ sont les multiples de $p_m = m \cdot c_m +$ éléments décomposables.

La démonstration de 2° est un exercice d'algèbre élémentaire, compte tenu de la formule de dualité de Whitney qui s'exprime ici par

$$\mu^* c_m = c_m \otimes 1 + c_{m-1} \otimes c_1 + \dots + c_1 \otimes c_{m-1} + 1 \otimes c_m .$$

D'après un théorème général (cf. par exemple G.W. WHITEHEAD [21]), les éléments dans l'image de $S_{\Omega}^* S^* : H^{k+2}(B_U) \rightarrow H^k(\Omega U)$ sont primitifs relativement à la multiplication μ' dans ΩU . Il reste donc à voir que $f^* : H^*(\Omega U) \rightarrow H^*(B_U)$ préserve la "primitivité". Cela revient à démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_U \times B_U & \xrightarrow{f \times f} & \Omega U \times \Omega U \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu' \\ B_U & \xrightarrow{f} & \Omega U \end{array}$$

est commutatif à l'homotopie près.

APPLICATIONS

3. Parallélisme sur les sphères et groupes d'homotopie non-stables de $SO(m)$.

Une variété différentiable M^k est dite parallélisable si elle admet un champ de k -repères tangents. (Cf. E. STIEFEL [18]).

Pour les sphères, on voit aisément que S^k est parallélisable si et seulement si l'homomorphisme $\pi_k(SO(k+1)) \rightarrow \pi_k(S^k)$ induit par la projection $SO(k+1) \rightarrow S^k$ est surjectif.

L'existence d'un parallélisme sur S^1 est trivial. H. HOFF [8] a montré l'existence d'un parallélisme sur S^3 et S^7 en utilisant les algèbres de divisions des quaternions et des nombres de Cayley. B. ECKMANN [7] et G.W. WHITEHEAD [20] ont montré que les sphères de dimensions $4n+1$ avec $n \geq 1$ ne sont pas parallélisables. Les résultats précédents de R. BOTT entraînent que S^{4n-1} n'est pas parallélisable pour $n \geq 3$. (Cf. [6] et [9]). On retrouve d'ailleurs également le résultat de B. ECKMANN-G.W. WHITEHEAD.

En effet, $\pi_k(SO(k+1)) \rightarrow \pi_k(S^k)$ est surjectif si et seulement si $\Phi : \pi_k(SO(m)) \rightarrow \pi_k(V_{m,m-k})$ est surjectif ($m \geq k+2$). Pour $k = 4n-1$, le premier de ces groupes est $\cong \mathbb{Z}$, l'autre $\cong \mathbb{Z}_2$. Comme $\pi_{4n-1}(V_{m-4n+2}) \cong \mathbb{Z}_4$, pour que S^{4n-1} soit parallélisable, il faut que

$$\Phi' : \pi_{4n-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_{4n-1}(V_{m,m-4n+2})$$

soit surjectif. Or on a la diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{4n-1}(SO(2m)) & \xrightarrow{\Phi'} & \pi_{4n-1}(V_{2m, 2m-4n+2}) \\
 \uparrow \beta & & \uparrow \beta' \\
 \pi_{4n-1}(U(m)) & \xrightarrow{\Psi} & \pi_{4n-1}(W_{m, m-2n+1}) ,
 \end{array}$$

où β envoie un générateur sur b_n -fois un générateur ($b_n = 2$ ou 1 suivant que n est pair ou impair) et Ψ envoie un générateur sur $(2n - 1)!$ -fois un générateur de $\pi_{4n-1}(W_{m, m-2n+1}) \cong \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 3$, $(2n - 1)!$ est divisible par 4 et Φ' n'est pas surjectif.

Incidentement, on a démontré l'isomorphisme

$$\pi_{4n-1}(V_{m, m-4n+1}) \cong \pi_{4n-2}(SO(4n - 1)) \quad \text{pour } n \geq 3 ,$$

obtenu en plongeant Φ dans la suite exacte d'homotopie de $SO(m)/SO(4n - 1)$.

En poussant les calculs dans cette direction et en utilisant les valeurs des groupes d'homotopies des variétés de STIEFEL données par G.F. PAECHTER [16], on obtient quelques groupes d'homotopie instables de $SO(m)$: $\pi_{m+r}(SO(m))$ pour $r \leq 4$ est donné par la table ci-dessous, où $s \geq 1$. J'ignore la valeur de l'entier d qui peut être 1 ou 2 .

$m-8s =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r = -1$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
0	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_4	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_4	\mathbb{Z}
1	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_8	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_8	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_{24}+\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_{12}	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4+\mathbb{Z}_{24d}$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{8d}	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_8
4	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{8d}	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_8	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$

4. Un théorème de F. PETERSON.

Soit ξ un fibré principal de groupe $U(m)$ sur un complexe K de dimension $\leq 2m$. Soit f une section de ξ sur le $(2q - 1)$ -squelette. Désignons par $\sigma(\xi, f)$ l'obstruction pour l'extension de f sur le $2q$ -squelette. On a le

LEMME. - La classe de Chern $c_q \in H^{2q}(K; Z)$ de ξ est donnée par $c_q = \frac{+}{-}(q-1)! \sigma(\xi, f)$. (Dans cette formule $\pi_{2q-1}(U(m))$ est identifié à Z ; cf. R. BOTT [4]).

DEMONSTRATION. - Soit ξ' le fibré associé de fibre $U(m)/U(q-1)$. La section f induit une section f' dans ξ' sur le $(2q-1)$ -squelette. Par définition l'obstruction correspondante $\sigma(\xi', f')$ est la classe de Chern $c_q(\xi')$. On a d'autre part $\sigma(\xi', f') = \psi_* \sigma(\xi, f)$, où ψ_* est l'homomorphisme induit en cohomologie par l'homomorphisme de coefficient

$$\psi : \pi_{2q-1}(U(m)) \rightarrow \pi_{2q-1}(U(m)/U(q-1)) \cong Z$$

(lui-même induit par la projection $U(m) \rightarrow U(m)/U(q-1)$). La suite exacte

$$\pi_{2q-1}(U(m)) \xrightarrow{\psi} \pi_{2q-1}(U(m)/U(q-1)) \rightarrow \pi_{2q-2}(U(q-1)) \rightarrow \pi_{2q-2}(U(m)),$$

où les deux premiers groupes sont infinis cycliques, $\pi_{2q-2}(U(q-1)) \cong Z_{(q-1)!}$ et $\pi_{2q-2}(U(m)) = 0$, montre que ψ envoie un générateur sur $(q-1)!$ fois un générateur. Par suite ψ_* multiplie toute classe de cohomologie par $(q-1)!$. Il s'ensuit $c_q(\xi) = \sigma(\xi', f') = \psi_* \sigma(\xi, f) = \frac{+}{-}(q-1)! \sigma(\xi, f)$.

On obtient comme corollaire (cf. [17]) :

THEOREME 3 (F. PETERSON). - Soit K un complexe de dimension finie tel que les coefficients de torsion de $H^{2q}(K)$ soient nuls ou premiers à $(q-1)!$ pour tout $q = 1, 2, \dots$. Un fibré sur K de groupe $U(n)$ avec $\dim K \leq 2n$ est alors trivial si et seulement si ses classes de Chern sont toutes zéro.

DEMONSTRATION. - On construit une section dans le fibré principal associé par induction sur la dimension des squelettes. Le lemme ci-dessus garantit qu'à chaque pas l'obstruction est nulle.

Si ξ est un fibré principal de groupe $SO(m)$ sur un complexe K de dimension $\leq m-1$ admettant une section sur le $(4n-1)$ -squelette, la classe de Pontrjagin en dimension $4n$ est donnée par le

LEMME. - $p_n(\xi) = (2n-1)! a_n \sigma(\xi, f)$, où $\sigma(\xi, f)$ est l'obstruction à l'extension de la section f sur le $4n$ -squelette et a_n vaut 2 ou 1 suivant que n est impair ou pair.

La démonstration est similaire à celle du lemme précédent (cf. [12]).

5. L'homomorphisme $J : \pi_{k-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_{m+k-1}(S^m)$.

Soit S^{k-1} la sphère unité dans $R^k \subset R^{m+k-1}$. Le fibré principal normal à S^{k-1} dans R^{m+k-1} admet une section naturelle. Ainsi une application $f : S^{k-1} \rightarrow SO(m)$ fournit un champ de m -repères normaux sur S^{k-1} . Ce champ détermine un homéomorphisme $U \approx S^{k-1} \times B^m$, où U est un voisinage de S^{k-1} dans R^{m+k-1} . Regardons R^{m+k-1} comme contenu dans S^{m+k-1} (par projection stéréographique); on obtient une application $F : S^{m+k-1} \rightarrow S^m$ qui envoie les points de U sur $B^m/B^m = S^m$ par projection en utilisant l'homéomorphisme $U \approx S^{k-1} \times B^m$ ci-dessus et qui envoie $S^{m+k-1} - U$ sur le point $F(U^*)$ de S^m . l'élément de $\pi_{m+k-1}(S^m)$ ainsi obtenu est au signe près $J\alpha$, où α est la classe de f .

Si $J\alpha = 0$, l'application $F : S^{m+k-1} \rightarrow S^m$ est homotope à zéro et il existe une homotopie $F_1 : B^{m+k} \rightarrow S^m$ pour laquelle le point $F(S^{k-1}) = b \in S^m$ est une valeur régulière. En d'autres termes, $F_1^{-1}(b)$ est une sous-variété V^k de B^{m+k} dont le bord est S^{k-1} et dont le fibré normal est trivial. On plonge B^{m+k} dans R^{m+k} , et on obtient une sous-variété fermée M^k de R^{m+k} en collant à V^k une boule B^k par l'application identité $S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ du bord. Il existe en outre une section du fibré (principal) normal à M^k dans R^{m+k} restreint à V^k et l'obstruction à l'extension de cette section sur $M^k - V^k = B^k$ est donnée par $\alpha \in \pi_{k-1}(SO(m))$.

Supposons alors que $k = 4n$, m étant grand ($m \geq 4n + 1$). D'après R. BOTT, $\pi_{4n-1}(SO(m)) \cong Z$ et $\alpha \in \pi_{4n-1}(SO(m))$ peut être considéré comme un entier (déterminé au signe près). Soit j_n l'ordre du groupe cyclique $J\pi_{4n-1}(SO(m))$. Prenons $\alpha = j_n$. Comme $J(j_n) = 0$, il existe une variété différentiable M_0^{4n} dont le fibré tangent restreint au $(4n-1)$ -squelette est trivial et dont la classe de Pontrjagin p_n est donnée par $p_n[M_0^{4n}] = (2n-1)! a_n j_n$ au signe près (cf. n° 4).

A. BOREL et F. HIRZEBRUCH ([1], 23.1 et 25.4) ont défini pour toute variété différentiable fermée M^{4n} un nombre rationnel $\hat{A}[M^{4n}]$:

$$\hat{A}[M^{4n}] = -B_n p_n[M^{4n}] / 2(2n)! + \text{termes contenant } p_1, \dots, p_{n-1},$$

où B_n est le n -ième nombre de Bernoulli.

En utilisant l'intégralité du genre de Todd d'une variété presque complexe dont la démonstration est due à J. MILNOR [14] et subséquemment à M. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH a pu démontrer le

THÉOREME 4. - Soit M^{4n} une variété différentiable fermée orientable dont la classe de Stiefel-Whitney w_2 est nulle. Le nombre $\hat{A}[M^{4n}]$ est un entier. En outre $\hat{A}[M^{4n}]$ est un entier pair pour n impair.

Pour la variété M_o^{4n} , les classes p_1, \dots, p_{n-1} sont nulles. Le théorème 4 affirme donc l'intégralité de $B_n j_n / 4n$.

En utilisant les théorèmes de von Staudt (cf. J. MILNOR [13]), on obtient le

THÉOREME 5. - Soit j_n l'ordre du sous-groupe cyclique $\text{Im } J$ du groupe stable $\pi_{m+4n-1}(S^m)$. Alors 2^{i+2} divise j_n si et seulement si 2^{i-1} divise n . Soit p un nombre premier impair, p^{i+1} divise j_n si et seulement si $p^i(p-1)$ divise $2n$.

En particulier, comme $\pi_{m+3}(S^m) \cong Z_{24}$, $\pi_{m+7}(S^m) \cong Z_{240}$, $\pi_{m+11}(S^m) \cong Z_{504}$, on obtient que $J : \pi_{4n-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_{m+4n-1}(S^m)$ est surjectif pour $n = 1, 2, 3$ et $j_1 = 24$, $j_2 = 240$, $j_3 = 504$.

COROLLAIRE. - Soit r un entier positif arbitraire. Il existe une infinité de groupes stables $\pi_{m+4n-1}(S^m)$ contenant un sous-groupe cyclique d'ordre r .

On prendra pour $2n$ les multiples de $\Phi(r)$, nombre d'entiers $m \in [1, r]$ qui sont premiers à r . Le sous-groupe en question est contenu dans l'image de J .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I., Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 458-538 ; et suivants (à paraître).
- [2] BOTT (Raoul). - Nondegenerate critical manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 248-261.
- [3] BOTT (Raoul). - An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 251-281.
- [4] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 933-935.

- [5] BOTT (Raoul). - Même titre. Version détaillée, à paraître.
- [6] BOTT (R.) et MILNOR (J.). - On the parallelizability of the spheres, Bull. Amer. math. Soc., t. 64, 1958, p. 87-89.
- [7] ECKMANN (Beno). - Système von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comment. math. Helvet. t. 15, 1942, p. 1-26.
- [8] HOPF (Heinz). - Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., t. 25, 1935, p. 427-440.
- [9] KERVAIRE (Michel A.). - Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 280-283.
- [10] KERVAIRE (Michel A.). - A note on obstructions and characteristic classes, soumis à American Journal of Mathematics.
- [11] KERVAIRE (Michel A.). - Some non-stable homotopy groups of Lie-groups (soumis à Illinois Journal of Mathematics).
- [12] KERVAIRE (M.) et MILNOR (J.). - Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin, Proc. intern. Congress of Math. [1958. Edinburgh] (à paraître).
- [13] MILNOR (John). - On the Whitehead homomorphism J , Bull. Amer. math. Soc., t. 64, 1958, p. 79-82.
- [14] MILNOR (John). - On the cobordism ring Ω^* , and a complex analogue (à paraître).
- [15] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New York, American mathematical Society, 1934 (American mathematical Society Colloquium Publications, 18).
- [16] PAECHTER (G. F.). - The groups $\pi_r(V_{n,m})$, Quarterly J. of Math. t. 7, 1956, p. 249-268.
- [17] PETERSON (F.). - Some remarks on Chern classes, Annals of Math. (à paraître).
- [18] STIEFEL (E.). - Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. math. Helvet. t. 8, 1935, p. 305-353.
- [19] THOM (René). - Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 228, 1949, p. 973-975.
- [20] WHITEHEAD (George W.). - Homotopy properties of the real orthogonal groups, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 132-146.
- [21] WHITEHEAD (George W.). - On the homology suspension, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 254-268.