MICHEL A. KERVAIRE

L'homotopie stable des groupes classiques d'après R. Bott. Applications

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 172, p. 51-60

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__51_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1958)

L'HOMOTOPIE STABLE DES GROUPES CLASSIQUES D'APRÈS R. BOTT. APPLICATIONS

par Michel A. KERVAIRE

1. Le théorème de suspension.

Soient M une variété de Riemann compacte connexe de classe C^{∞} et $\mu = (P, Q)$ un couple de points sur M. On désignera par $\Omega_{\mu} M$ l'ensemble des arcs différentiables par morceaux, joignant P à Q sur M, paramétrisés entre 0 et 1 proportionnellement à la longueur d'arc et muni de la métrique

$$\rho(c\ ,\ c') = \max d[c(t)\ ,\ c'(t)] + |J(c) - J(c')|\ ,$$

le maximum étant pris sur $t \in [0\ ,\ 1]$ (d, distance sur M ; $J(c)$, longueur de c).

A tout segment de géodésique $s \in \Omega_{\mu} M$ est attaché un index $\lambda(s)$ défini comme suit (cf. [3], proposition 3.2) : Un champ η de vecteurs tangents à M le long de s est dit "de Jacobi" s'il satisfait à l'équation différentielle de Jacobi $D_t^2 \eta^{\alpha} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\, \dot{x}^{\beta} \eta^{\gamma}\, \dot{x}^{\delta} = 0$ (D_t^2, dérivée covariante seconde le long de s). Soit $\Lambda_s(X)$, pour X un point de s, l'espace vectoriel des champs de Jacobi sur s qui s'annulent en P et X. On pose $\lambda(s) = \sum_X \dim \Lambda_s(X)$, où la sommation s'étend à tous les $X \in s$, $X \neq P\ ,\ Q$. (Cette somme est finie car $\dim \Lambda_s(X) = 0$, si X n'est pas conjugué de P).

Soit alors $|\mu|$ le plus petit index positif des géodésiques de $\Omega_{\mu} M$. ($|\mu| = \infty$ s'il n'existe pas de géodésique d'index positif).

Soit $M^{\mu} \subset \Omega_{\mu} M$ une composante connexe du sous-espace des géodésiques de longueur minimale. On a le

THÉORÈME 1. - *Si M est un espace symétrique, alors*

1° *M^{μ} est également un espace symétrique ;*

2° *l'inclusion $f : M^{\mu} \to \Omega_{\mu} M$ induit un isomorphisme*

$$f_* : \pi_k(M^{\mu}) \to \pi_k(\Omega_{\mu} M)$$

pour $0 < k < |\mu| - 1$ *et un épimorphisme pour* $k = |\mu| - 1$.

NOTE. - $\Omega_\mu M$ n'a pas en général le même type d'homotopie que l'espace des lacets sur M muni de la topologie de la convergence compacte. Ces deux espaces ont cependant des groupes d'homotopie isomorphes. En particulier, $\pi_i(\Omega_\mu M) \cong \pi_{i+1}(M)$.

EXEMPLES. - Soient $M = S^{n+1}$ et $\mu = (P , Q)$ un couple de points antipodiques, $M^\mu = S^n$ et $f_* : \pi_k(S^n) \to \pi_k(\Omega_\mu S^{n+1}) \cong \pi_{k+1}(S^{n+1})$ est la suspension de Freudenthal. On voit facilement qu'une géodésique de longueur $(2m + 1)\pi$, joignant P à Q , a pour indexe $2mn$. Donc $|\mu| = 2n$ et f_* est un isomorphisme pour $k \leq 2n - 2$ et un épimorphisme pour $k = 2n - 1$.

Soit $M = U(2n)$, $P = E$ la matrice unité dans $U(2n)$ et $Q = - E$. Les géodésiques de longueur minimale sont données par $x.s(t).x^{-1}$, où $s(t) = e^{-i\pi t} E_n \times e^{i\pi t} E_n$, E_n étant la matrice unité à n lignes et n colonnes. L'ensemble M^μ $(\mu = (P , Q))$ de ces géodésiques est homéomorphe à la grassmannienne $U(2n)/U(n) \times U(n)$ et $|\mu| = 2n + 2$. En passant à la limite $(n \to \infty)$, on obtient $\pi_k(B_U) \cong \pi_{k+1}(U)$ pour tout k ; comme $\pi_{k-1}(U) \cong \pi_k(B_U)$ par la suite exacte d'homotopie de la fibration classifiante, on a $\pi_{k-1}(U) \cong \pi_{k+1}(U)$ pour tout k . On sait que $\pi_0(U) = 0$, $\pi_1(U) \cong Z$.

L'application 8 fois itérée du théorème 1, en partant de $M = SO(16n)$ fournit la période 8 pour les groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal et la relation $\pi_k(SO) \cong \pi_{k+4}(Sp)$. On obtient également, entre autres, l'isomorphisme $\pi_k(SO/U) \cong \pi_{k+1}(SO)$, donc en particulier $\pi_{4n-1}(SO/U) \cong Z_{b_n}$, $b_n = 2$ ou 1 suivant que n est pair ou impair, résultat qui sera utilisé au n° 3.

<u>Esquisse de la démonstration du théorème 1</u>. — M étant tout d'abord une variété de Riemann compacte connexe quelconque, soit $\Omega_\mu^a M$ le sous-espace de $\Omega_\mu M$ caractérisé par $J(c) \leq a$. On démontre que $\Omega_\mu^a M$ a la même type d'homotopie que le sous-espace N^b de $N = M \times M \times \dots \times M$ (n fois) défini par $N^b = \{x \in N | \Phi(x) \leq b\}$, où $\Phi(x) = \sum_0^n [d(x_i , x_{i+1})]^2$, $x_0 = P$, $x_{n+1} = Q$, n est assez grand pour que $a/\sqrt{(n + 1)} < \bar\rho$ = longueur élémentaire sur M , et $b = a^2/(n+1)$. Une homotopie équivalence $\alpha : \Omega_\mu^a M \to N^b$ est donnée par $\alpha(c) = c(t_1) , \dots , c(t_n)$, avec $t_i = i/(n+1)$. L'application inverse (à l'homotopie près) est donnée par $\beta(x)$ = polygône géodésique $[Px_1][x_1x_2] \dots [x_nQ]$. (Deux points dont la distance est inférieure à $\bar\rho$ sont extrémités d'un segment de géodésique unique qui varie continûment avec ses extrémités).

On constate que x est critique pour Φ si et seulement si $x = \alpha(s)$, où $s \in \Omega_{\mu}^{a} M$ est un segment de géodésique.

De plus, si $x = \alpha(s)$, le corang de la hessienne H_{Φ} de Φ en x vaut $\dim \Lambda_s(Q)$; l'index de H_{Φ} en x vaut $\lambda(s)$. (Cf. M. MORSE [15], chapitre III, Théorèmes 6.1 et 6.2 respectivement).

Si M est en outre symétrique ($M = G/K$, G muni d'un automorphisme involutif α et $K = \{g \in G \mid \alpha g = g\}$) , G opérant par isométries, l'action de G est "variationnellement complète". Cela signifie que tout champ de Jacobi le long de s qui s'annule en P est la restriction sur s d'un déplacement infinitésimal de G (cf. R. BOTT [3], paragraphe 6). Ceci implique :

1° M^{μ} est une variété de Riemann symétrique. En fait, M^{μ} est homéomorphe à K_{μ}/K_s (K_A , stabilisateur de l'ensemble A).

2° Les ensembles critiques de Φ sont des sous-variétés de N . La dimension d'une composante connexe V est donnée par $\dim V = \dim \Lambda_s(Q)$, avec $\alpha(s) \in V$. La dimension de V est donc égale au corang de H_{Φ} en $x \in V$: les variétés V sont des variétés critiques non dégénérées. (Cf. R. BOTT [2]).

Le reste de la démonstration du théorème 1 consiste à généraliser les idées de l'article [19] de R. THOM au cas où les ensembles critiques d'une fonction Φ sur une variété N sont des variétés critiques non-dégénérées (et non plus nécessairement des points isolés non-dégénérés). Soit c une valeur critique de Φ on obtient $N^{c+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$, tel que $[c - \varepsilon , c + \varepsilon]$ ne contienne pas d'autre valeur critique pour Φ que c) en "attachant" à $N^{c-\varepsilon}$ des espaces E_V fibrés en boules sur V par une application f_V du bord de E_V dans $N^{c-\varepsilon}$ (V parcourt l'ensemble des composantes connexes de l'ensemble critique $\Phi = c$). La dimension des boules (fibres de E_V) est égale à l'index de H_{Φ} en $x \in V$. Le théorème 1 s'ensuit après décomposition cellulaire de E_V en cellules de dimensions nulles ou $\geq$ index de H_{Φ} en $x \in V$.

2. Le groupe $\pi_{2m}(U(m))$.

Le calcul de ce groupe (instable) est basé sur le

THÉORÈME 2. - Soit h l'homomorphisme de Hurewicz $h : \pi_{2n}(B_U) \to H_{2n}(B_U)$. l'image par h d'un générateur de $\pi_{2n}(B_U) \cong Z$ est exactement divisible par $(n - 1)!$.

Montrons que la formule $\pi_{2m}(U(m)) \cong Z_{m!}$ est une conséquence de ce théorème : Soit $f : S^{2n} \to B_U$ une application représentant un générateur de $\pi_{2n}(B_U)$.

L'application f induit sur S^{2n} un fibré principal ξ de groupe $U(N)$, $N \geq n$. Soit ξ' le fibré associé de fibre $U(N)/U(n-1)$. Soient $\chi(\xi) \in \pi_{2n-1}(U(N))$ et $\chi(\xi') \in \pi_{2n-1}(U(N)/U(n-1))$ les "classes caractéristiques" de ces fibrés $\chi(\xi)$ est un générateur de $\pi_{2n-1}(U(N))$; la projection

$$q_* : \pi_{2n-1}(U(N)) \to \pi_{2n-1}(U(N)/U(n-1))$$

envoie $\chi(\xi)$ sur $\chi(\xi')$; $\chi(\xi') = c_n[S^{2n}]$. La suite exacte d'homotopie de $U(N)/U(n-1)$ montre que $\pi_{2n-2}(U(n-1))$ est cyclique et en outre que son ordre q_n satisfait à $c_n[S^{2n}] = q_n$. Comme $h\{f\}$ est exactement divisible par $c_n[S^{2n}]$, on a $q_n = (n-1)!$.

A. BOREL et F. HIRZEBRUCH ([1], 26.5) ont donné un exemple de fibré $U(N)$ sur S^{2n} dont la classe de Chern vaut $(n-1)!$. Pour démontrer le théorème 2, il est donc suffisant de démontrer que $\operatorname{Im} h \subset (n-1)!\, H_{2n}(B_U)$.

Soit $f : U(2N)/U(N) \times U(N) \to \Omega U(2N)$ l'application de Bott (cf. n° 1), et $\lambda_0 = \partial^{-1} \partial_\Omega^{-1}$, $f_* : \pi_k(B_U) \to \pi_{k+2}(B_U)$ l'isomorphisme qui fournit la périodicité (∂ et ∂_Ω sont les homomorphismes bord des fibrations $U \to E_U \to B_U$ et $\Omega U \to LU \to U$, respectivement). On a un homomorphisme analogue en cohomologie $\lambda = f^* S_\Omega^* S^* : H^{k+2}(B_U) \to H^k(B_U)$, où S^* est la suspension en cohomologie. On voit immédiatement que $\operatorname{Im} h \subset (n-1)!\, H_{2n}(B_U)$ est équivalente à $\operatorname{Im} \lambda^{n-1} \subset (n-1)!\, H^2(B_U)$, $\lambda^{n-1} : H^{2n}(B_U) \to H^2(B_U)$ étant obtenue par itération de λ. Comme λ annule les éléments décomposables (par le produit cup), il est suffisant de montrer que pour tout m, $\lambda(c_m)$ est un multiple de $(m-1)c_{m-1}$ plus des éléments décomposables. Pour cela on introduit dans B_U la multiplication μ induite par le couplage naturel $G_{p,q} \times G_{p',q'} \to G_{p+p',q+q'}$ où $G_{r,s}$ est la variété des r-plans (complexes) de C^{r+s}. On démontre alors que

1° Les éléments dans l'image de λ sont primitifs (v est primitif si $\mu^* v = v \otimes 1 + 1 \otimes v$) ;

2° Les éléments primitifs de $H^{2m}(B_U)$ sont les multiples de $p_m = m.c_m$ + éléments décomposables.

La démonstration de 2° est un exercice d'algèbre élémentaire, compte tenu de la formule de dualité de Whitney qui s'exprime ici par

$$\mu^* c_m = c_m \otimes 1 + c_{m-1} \otimes c_1 + \dots + c_1 \otimes c_{m-1} + 1 \otimes c_m .$$

D'après un théorème général (cf. par exemple G.W. WHITEHEAD [21]), les éléments dans l'image de $S^*_\Omega\, S^* : H^{k+2}(B_U) \to H^k(\Omega U)$ sont primitifs relativement à la multiplication μ' dans ΩU. Il reste donc à voir que $f^* : H^*(\Omega U) \to H^*(B_U)$ préserve la "primitivité". Cela revient à démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_U \times B_U \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\mu"] & \Omega U \times \Omega U \arrow[d, "\mu'"] \\ B_U \arrow[r, "f"] & \Omega U \end{tikzcd}$$

est commutatif à l'homotopie près.

APPLICATIONS

3. Parallélisme sur les sphères et groupes d'homotopie non-stables de $SO(m)$.

Une variété différentiable M^k est dite parallélisable si elle admet un champ de k-repères tangents. (Cf. E. STIEFEL [18]).

Pour les sphères, on voit aisément que S^k est parallélisable si et seulement si l'homomorphisme $\pi_k(SO(k+1)) \to \pi_k(S^k)$ induit par la projection $SO(k+1) \to S^k$ est surjectif.

L'existence d'un parallélisme sur S^1 est trivial. H. HOPF [8] a montré l'existence d'un parallélisme sur S^3 et S^7 en utilisant les algèbres de divisions des quaternions et des nombres de Cayley. B. ECKMANN [7] et G.W. WHITEHEAD [20] ont montré que les sphères de dimensions $4n+1$ avec $n \geqslant 1$ ne sont pas parallélisables. Les résultats précédents de R. BOTT entraînent que S^{4n-1} n'est pas parallélisable pour $n \geqslant 3$. (Cf. [6] et [9]). On retrouve d'ailleurs également le résultat de B. ECKMANN-G.W. WHITEHEAD.

En effet, $\pi_k(SO(k+1)) \to \pi_k(S^k)$ est surjectif si et seulement si $\Phi : \pi_k(SO(m)) \to \pi_k(V_{m,m-k})$ est surjectif $(m \geqslant k+2)$. Pour $k = 4n-1$, le premier de ces groupes est $\cong Z$, l'autre $\cong Z_2$. Comme $\pi_{4n-1}(V_{m-4n+2}) \cong Z_4$, pour que S^{4n-1} soit parallélisable, il faut que

$$\Phi' : \pi_{4n-1}(SO(m)) \to \pi_{4n-1}(V_{m,m-4n+2})$$

soit surjectif. Or on a la diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4n-1}(SO(2m)) & \xrightarrow{\Phi'} & \pi_{4n-1}(V_{2m,2m-4n+2}) \\ \uparrow \beta & & \uparrow \beta' \\ \pi_{4n-1}(U(m)) & \xrightarrow{\Psi} & \pi_{4n-1}(W_{m,m-2n+1}) \end{array} ,$$

où β envoie un générateur sur b_n-fois un générateur ($b_n = 2$ ou 1 suivant que n est pair ou impair) et Ψ envoie un générateur sur $(2n-1)!$-fois un générateur de $\pi_{4n-1}(W_{m,m-2n+1}) \cong Z$. Pour $n \geqslant 3$, $(2n-1)!$ est divisible par 4 et Φ' n'est pas surjectif.

Incidemment, on a démontré l'isomorphisme

$$\pi_{4n-1}(V_{m,m-4n+1}) \cong \pi_{4n-2}(SO(4n-1)) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3 ,$$

obtenu en plongeant Φ dans la suite exacte d'homotopie de $SO(m)/SO(4n-1)$.

En poussant les calculs dans cette direction et en utilisant les valeurs des groupes d'homotopies des variétés de STIEFEL données par G.F. PAECHTER [16], on obtient quelques groupes d'homotopie instablesde $SO(m)$: $\pi_{m+r}(SO(m))$ pour $r \leq 4$ est donné par la table ci-dessous, où $s \geqslant 1$. J'ignore la valeur de l'entier d qui peut être 1 ou 2.

m−8s =	0	1	2	3	4	5	6	7
r = −1	$Z+Z$	Z_2+Z_2	$Z+Z_2$	Z_2	$Z+Z$	Z_2	Z	Z_2
0	$Z_2+Z_2+Z_2$	Z_2+Z_2	Z_4	Z	Z_2+Z_2	Z_2	Z_4	Z
1	$Z_2+Z_2+Z_2$	Z_8	Z	Z_2	Z_2+Z_2	Z_8	Z	Z_2+Z_2
2	$Z_{24}+Z_8$	$Z+Z_2$	Z_{12}	Z_2+Z_2	Z_4+Z_{24d}	$Z+Z_2$	$Z_{12}+Z_2$	Z_2+Z_2
3	$Z+Z_2$	0	Z_2	Z_{8d}	$Z+Z_2$	Z_2	Z_2	Z_8
4	0	Z_2	Z_{8d}	$Z+Z_2$	Z_2	Z_2	Z_8	$Z+Z_2$

4. Un théorème de F. PETERSON.

Soit ξ un fibré principal de groupe $U(m)$ sur un complexe K de dimension $\leq 2m$. Soit f une section de ξ sur le $(2q-1)$-squelette. Désignons par $\sigma(\xi, f)$ l'obstruction pour l'extension de f sur le $2q$-squelette. On a le

LEMME. - La classe de Chern $c_q \in H^{2q}(K\ ;\ Z)$ de ξ est donnée par $c_q = \pm(q-1)!\ \sigma(\xi\ ,\ f)$. (Dans cette formule $\pi_{2q-1}(U(m))$ est identifié à Z ; cf. R. BOTT [4]).

DÉMONSTRATION. - Soit ξ' le fibré associé de fibre $U(m)/U(q-1)$. La section f induit une section f' dans ξ' sur le $(2q-1)$-squelette. Par définition l'obstruction correspondante $\sigma(\xi', f')$ est la classe de Chern $c_q(\xi)$. On a d'autre part $\sigma(\xi'\ ,\ f') = \psi_*\ \sigma(\xi\ ,\ f)$, où ψ_* est l'homomorphisme induit en cohomologie par l'homomorphisme de coefficient

$$\psi\ :\ \pi_{2q-1}(U(m)) \to \pi_{2q-1}(U(m)/U(q-1)) \cong Z$$

(lui-même induit par la projection $U(m) \to U(m)/U(q-1)$) . La suite exacte

$$\pi_{2q-1}(U(m)) \xrightarrow{\psi} \pi_{2q-1}(U(m)/U(q-1)) \to \pi_{2q-2}(U(q-1)) \to \pi_{2q-2}(U(m))\ ,$$

où les deux premiers groupes sont infinis cycliques, $\pi_{2q-2}(U(q-1)) \cong Z_{(q-1)!}$ et $\pi_{2q-2}(U(m)) = 0$, montre que ψ envoie un générateur sur $(q-1)!$ fois un générateur. Par suite ψ_* multiplie toute classe de cohomologie par $(q-1)!$. Il s'ensuit $c_q(\xi) = \sigma(\xi'\ ,\ f') = \psi_*\ \sigma(\xi\ ,\ f) = \pm(q-1)!\ \sigma(\xi\ ,\ f)$.

On obtient comme corollaire (cf. [17]) :

THÉORÈME 3 (F. PETERSON). - Soit K un complexe de dimension finie tel que les coefficients de torsion de $H^{2q}(K)$ soient nuls ou premiers à $(q-1)!$ pour tout $q = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots$. Un fibré sur K de groupe $U(m)$ avec $\dim K \leq 2m$ est alors trivial si et seulement si ses classes de Chern sont toutes zéro.

DÉMONSTRATION. - On construit une section dans le fibré principal associé par induction sur la dimension des squelettes. Le lemme ci-dessus garantit qu'à chaque pas l'obstruction est nulle.

Si ξ est un fibré principal de groupe $SO(m)$ sur un complexe K de dimension $\leq m-1$ admettant une section sur le $(4n-1)$-squelette, la classe de Pontrjagin en dimension $4n$ est donnée par le

LEMME. - $p_n(\xi) = (2n-1)!\ a_n\ \sigma(\xi\ ,\ f)$, où $\sigma(\xi\ ,\ f)$ est l'obstruction à l'extension de la section f sur le $4n$-squelette et a_n vaut 2 ou 1 suivant que n est impair ou pair.

La démonstration est similaire à celle du lemme précédent (cf. [12]).

5. <u>L'homomorphisme</u> $J : \pi_{k-1}(SO(m)) \to \pi_{m+k-1}(S^m)$.

Soit S^{k-1} la sphère unité dans $R^k \subset R^{m+k-1}$. Le fibré principal normal à S^{k-1} dans R^{m+k-1} admet une section naturelle. Ainsi une application $f : S^{k-1} \to SO(m)$ fournit un champ de m-repères normaux sur S^{k-1} . Ce champ détermine un homéomorphisme $U \approx S^{k-1} \times B^m$, où U est un voisinage de S^{k-1} dans R^{m+k-1} . Regardons R^{m+k-1} comme contenu dans S^{m+k-1} (par projection stéréographique) ; on obtient une application $F : S^{m+k-1} \to S^m$ qui envoie les points de U sur $B^m/\dot{B}^m = S^m$ par projection en utilisant l'homéomorphisme $U \approx S^{k-1} \times B^m$ ci-dessus et qui envoie $S^{m+k-1} - U$ sur le point $F(U^{\bullet})$ de S^m . l'élément de $\pi_{m+k-1}(S^m)$ ainsi obtenu est au signe près $J\alpha$, où α est la classe de f .

Si $J\alpha = 0$, l'application $F : S^{m+k-1} \to S^m$ est homotope à zéro et il existe une homotopie $F_1 : B^{m+k} \to S^m$ pour laquelle le point $F(S^{k-1}) = b \in S^m$ est une valeur régulière. En d'autres termes, $F_1^{-1}(b)$ est une sous-variété V^k de B^{m+k} dont le bord est S^{k-1} et dont le fibré normal est trivial. On plonge B^{m+k} dans R^{m+k} , et on obtient une sous-variété fermée M^k de R^{m+k} en collant à V^k une boule B^k par l'application identité $S^{k-1} \to S^{k-1}$ du bord. Il existe en outre une section du fibré (principal) normal à M^k dans R^{m+k} restreint à V^k et l'obstruction à l'extension de cette section sur $M^k - V^k = B^k$ est donnée par $\alpha \in \pi_{k-1}(SO(m))$.

Supposons alors que $k = 4n$, m étant grand $(m \geq 4n + 1)$. D'après R. BOTT, $\pi_{4n-1}(SO(m)) \cong Z$ et $\alpha \in \pi_{4n-1}(SO(m))$ peut être considéré comme un entier (déterminé au signe près). Soit j_n l'ordre du groupe cyclique $J\pi_{4n-1}(SO(m))$. Prenons $\alpha = j_n$. Comme $J(j_n) = 0$, il existe une variété différentiable M_o^{4n} dont le fibré tangent restreint au (4n-1)-squelette est trivial et dont la classe de Pontrjagin p_n est donnée par $p_n[M_o^{4n}] = (2n-1)!\, a_n\, j_n$ au signe près (cf. n° 4).

A. BOREL et F. HIRZEBRUCH ([1], 23.1 et 25.4) ont défini pour toute variété différentiable fermée M^{4n} un nombre rationnel $\hat{A}[M^{4n}]$:

$$\hat{A}[M^{4n}] = - B_n\, p_n[M^{4n}]/2(2n)! + \text{termes contenant } p_1 , \dots , p_{n-1} ,$$

où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli.

En utilisant l'intégralité du genre de Todd d'une variété presque complexe dont la démonstration est due à J. MILNOR [14] et subséquemment à M. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH a pu démontrer le

THÉORÈME 4. - *Soit* M^{4n} *une variété différentiable fermée orientable dont la classe de* Stiefel-Whitney w_2 *est nulle. Le nombre* $\hat{A}[M^{4n}]$ *est un entier. En outre* $\hat{A}[M^{4n}]$ *est un entier pair pour* n *impair.*

Pour la variété M_0^{4n}, les classes $p_1, \dots, p_{n-1}$ sont nulles. Le théorème 4 affirme donc l'intégralité de $B_n j_n/4n$.

En utilisant les théorèmes de von Staudt (cf. J. MILNOR [13]), on obtient le

THÉORÈME 5. - *Soit* j_n *l'ordre du sous-groupe cyclique* $\operatorname{Im} J$ *du groupe stable* $\pi_{m+4n-1}(S^m)$. *Alors* 2^{i+2} *divise* j_n *si et seulement si* 2^{i-1} *divise* n. *Soit* p *un nombre premier impair,* p^{i+1} *divise* j_n *si et seulement si* $p^i(p-1)$ *divise* $2n$.

En particulier, comme $\pi_{m+3}(S^m) \cong Z_{24}$, $\pi_{m+7}(S^m) \cong Z_{240}$, $\pi_{m+11}(S^m) \cong Z_{504}$, on obtient que $J : \pi_{4n-1}(SO(m)) \to \pi_{m+4n-1}(S^m)$ est surjectif pour $n = 1, 2, 3$ et $j_1 = 24$, $j_2 = 240$, $j_3 = 504$.

COROLLAIRE. - *Soit* r *un entier positif arbitraire. Il existe une infinité de groupes stables* $\pi_{m+4n-1}(S^m)$ *contenant un sous-groupe cyclique d'ordre* r.

On prendra pour $2n$ les multiples de $\Phi(r)$, nombre d'entiers $m \in [1, r]$ qui sont premiers à r. Le sous-groupe en question est contenu dans l'image de J.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I., Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 458-538 ; et suivants (à paraître).

[2] BOTT (Raoul). - Nondegenerate critical manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 248-261.

[3] BOTT (Raoul). - An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 251-281.

[4] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 933-935.

[5] BOTT (Raoul). - Même titre. Version détaillée, à paraître.

[6] BOTT (R.) et MILNOR (J.). - On the parallelizability of the spheres, Bull. Amer. math. Soc., t. 64, 1958, p. 87-89.

[7] ECKMANN (Beno). - Système von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comment. math. Helvet. t. 15, 1942, p. 1-26.

[8] HOPF (Heinz). - Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., t. 25, 1935, p. 427-440.

[9] KERVAIRE (Michel A.). - Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 280-283.

[10] KERVAIRE (Michel A.). - A note on obstructions and characteristic classes, soumis à American Journal of Mathematics.

[11] KERVAIRE (Michel A.). - Some non-stable homotopy groups of Lie-groups (soumis à Illinois Journal of Mathematics).

[12] KERVAIRE (M.) et MILNOR (J.). - Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin, Proc. intern. Congress of Math. [1958. Edinburgh] (à paraître).

[13] MILNOR (John). - On the Whitehead homomorphism J, Bull. Amer. math. Soc., t. 64, 1958, p. 79-82.

[14] MILNOR (John). - On the cobordism ring Ω^*, and a complex analogue (à paraître).

[15] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New York, American mathematical Society, 1934 (American mathematical Society Colloquium Publications, 18).

[16] PAECHTER (G. F.). - The groups $\pi_r(V_{n,m})$, Quarterly J. of Math. t. 7, 1956, p. 249-268.

[17] PETERSON (F.). - Some remarks on Chern classes, Annals of Math. (à paraître).

[18] STIEFEL (E.). - Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. math. Helvet. t. 8, 1935, p. 305-353.

[19] THOM (René). - Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 228, 1949, p. 973-975.

[20] WHITEHEAD (George W.). - Homotopy properties of the real orthogonal groups, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 132-146.

[21] WHITEHEAD (George W.). - On the homology suspension, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 254-268.