MICHEL ZISMAN

**Travaux de Borel-Haefliger-Moore**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1962, exp. nº 240, p. 287-295

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__287_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 240

Mai 1962

# TRAVAUX DE BOREL-HAEFLIGER-MOORE

par Michel ZISMAN

## A. Homologie des espaces localement compacts.

### 1. Le complexe $\mathcal{C}_H(X, \mathfrak{F})$.

(1.0) $K$ désigne un anneau de Dedekind, $K^*$ son corps des fractions. Si $M$ est un $K$-module, $F(M)$ le $K$-module libre engendré par $M - \{0\}$, et $R(M)$ le noyau de $F(M) \to M$, on désigne par $\overline{M}$ le quotient de $K^* \otimes_K F(M)$ par $R(M)$. L'application canonique $M \to \overline{M}$ est injective et $\overline{M}$ est un $K$-module injectif. La correspondance qui, à $M$, fait correspondre $\overline{M}$ est fonctorielle.

Soit $X$ un espace topologique ; un faisceau sur $X$ sera toujours un faisceau de $K$-modules. Si $\mathfrak{F}$ est un tel faisceau, on définit un faisceau $I(\mathfrak{F})$ en posant $I(\mathfrak{F})(U) = \prod_{x \in U} \overline{\mathfrak{F}}_x$ pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathfrak{F}_x$ étant la fibre de $\mathfrak{F}$ au point $x$, l'homomorphisme de restriction étant évident. $I(\mathfrak{F})$ est un faisceau injectif, donc flasque, et l'application canonique $\mathfrak{F} \to I(\mathfrak{F})$ est injective. La construction précédente permet de construire une résolution canonique $\mathcal{C}^*(X, \mathfrak{F})$ du faisceau $\mathfrak{F}$ par des faisceaux injectifs. Si $\Phi$ est une famille de supports, $\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^*(X, \mathfrak{F}))$ est un $K$-module injectif.

(1.1) Notations. - Soit $\Phi$ une famille de supports sur $X$. Si $\Phi$ est la famille de tous les compacts de $X$ (resp. de tous les fermés de $X$, resp. de tous les fermés de $F$ fermé dans $X$), on écrit $c$ (resp. rien, resp. $F$) à la place de $\Phi$.

Remarquons que si $X$ est localement compact (ce que l'on suppose toujours à partir de maintenant) la famille de tous les compacts de $X$ est paracompactifiante.

(1.2) Soit $M$ un $K$-module. On pose, pour tout ouvert $U$ et tout faisceau $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{J}(U) = \operatorname{Hom}(\Gamma_c(\mathfrak{F}|U), M) \quad .$$

Si $V \subset U$, l'application canonique $\Gamma_c(\mathfrak{F}|V) \to \Gamma_c(\mathfrak{F}|U)$ définit un homomorphisme $\mathfrak{J}(U) \to \mathfrak{J}(V)$. Les données précédentes définissent un préfaisceau $\mathfrak{J}$ sur $X$.

En utilisant des partitions de sections subordonnées à un recouvrement ouvert de $X$ on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION. - Si $\mathfrak{F}$ est c-mou, $\mathfrak{J}$ est un faisceau. Si $M$ est injectif, ce faisceau est flasque.

Dans la suite on prend pour $\mathfrak{F}$ un faisceau différentiel (différentielle de degré $+1$), pour $M$ la résolution injective de $K$ : $0 \to K \to K^* \to K^*/K \to 0$. Si $\mathfrak{F}$ est c-mou, $\mathfrak{J}$ est un faisceau différentiel (pour le degré total), la différentielle étant de degré $-1$, que l'on désignera par $D(\mathfrak{F})$. En particulier, si $\mathfrak{F} = \mathcal{C}^*(X, K)$ on pose $D(\mathfrak{F}) = \mathcal{C}_H(X, K)$. Enfin si $\mathcal{S}$ est un faisceau quelconque on pose

$$\mathcal{C}_H(X, \mathcal{S}) = \mathcal{C}_H(X, K) \otimes \mathcal{S} \quad .$$

$\mathcal{C}_H(X, K)$ est flasque, $\mathcal{C}_H(X, K)(U)$ est sans torsion.

$\mathcal{C}_H(X, \mathcal{S})$ est $\Phi$-fin si $\Phi$ est paracompactifiante.

## 2. Homologie.

(2.1) DÉFINITION. - $H_*^{\Phi}(X ; \mathcal{S}) = H_*(\Gamma_{\Phi}\, \mathcal{C}_H(X, \mathcal{S}))$

$$\mathcal{H}_*(X ; K) = \mathcal{H}_*(\mathcal{C}_H(X, K)) .$$

$\mathcal{H}_*(X ; K)$ est le faisceau d'homologie locale de $X$.

(2.2) Puisque $\mathcal{C}_H(X, K)(U) = \Gamma\mathcal{C}_H(U, K)$ pour tout ouvert $U$ de $X$, la restriction des sections définit un homomorphisme

$$j_{*XU} : H_*^{\Phi}(X ; K) \to H_*^{\Phi\cap U}(U ; K) \quad .$$

D'après ([3], II, 4-1) $\mathcal{H}_*(X ; K)$ est donné par le préfaisceau $(H_*(U ; K), j_{*UV})$. En particulier,

$$\mathcal{H}_*(X, K)_x = \varinjlim (H_*(U ; K), j_{*UV})$$

Principales propriétés de $H_q^{\Phi}(X ; \mathcal{S})$.

(2.3) Soient $\Phi$ et $\Psi$ deux familles de supports de $X$ et $Y$, $f : X \to Y$ une application continue telle que $f(\Phi) \subset \Psi$ et telle que la restriction de $f$ à tout $F \in \Phi$ soit propre. Il existe alors un homomorphisme canonique

$$f_* : H_*^{\Phi}(X ; K) \to H_*^{\Psi}(Y ; K)$$

en particulier, il existe toujours

$$f_* \; : \; H_*^c(X\,;\,K) \to H_*^c(Y\,;\,K) \qquad .$$

(2.4) Pour tout $i$ , on a une suite exacte scindée :

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_c^{i+1}(X\,;\,K)\;,\;K) \to H_i(X\,;\,K) \to \operatorname{Hom}(H_c^i(X\,;\,K)\;,\;K) \to 0$$

compatible avec la restriction aux ouverts $U$ de $X$ ; donc, vu (2.2), on a une suite exacte scindée

$$0 \to \varinjlim \operatorname{Ext}(H_c^{i+1}(U\,;\,K)\;,\;K) \to \mathcal{H}_i(X\,;\,K)_x \to \varinjlim \operatorname{Hom}(H_c^i(U\,;\,K)\;,\;K) \to 0 \qquad .$$

(2.5) $H_q^\Phi(X\,;\,K) = \varinjlim H_q(F\,;\,K)$ où $F \in \Phi$ ; la limite étant prise par rapport à l'ordonné filtrant des ensembles de $\Phi$ ordonnés par inclusion.

(2.6) Si $\mathfrak{A}$ est une résolution c-molle de $K$ , on a

$$H_*^\Phi(X\,;\,K) = H_*(\Gamma_\Phi\, D(\mathfrak{A})) \qquad .$$

Si $X$ est de dimension finie, $\mathbb{S}$ sans torsion, et $\Phi$ paracompactifiante, on a aussi

$$H_*^\Phi(X\,;\,\mathbb{S}) = H_*(\Gamma_\Phi(D(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{S})) \qquad .$$

(2.7) Soient $F$ fermé de $X$ et $U = X - F$ . On a une suite exacte :

$$\to H_q(F\,;\,K) \xrightarrow[i_{FX}]{} H_q(X\,;\,K) \xrightarrow[j_{XU}]{} H_q(U\,;\,K) \to H_{q-1}(F\;,\;K) \to$$

où $i_{FX}$ est l'homomorphisme associé à l'inclusion $F \subset X$ .

(2.8) Si $X$ est localement connexe,

$$H_{-1}(X\,;\,K) = H_{-1}^c(X\,;\,K) = 0$$

(pour $H_{-1}$ c'est évident d'après (2.4) ; pour $H_{-1}^c$ c'est une conséquence du précédent, de (2.5) et de la propriété suivante : soit $X$ connexe et localement connexe, $F$ un compact de $X$ ; il existe un compact connexe $A$ tel que $F \subset A$ ). Enfin, si $X$ est $HLC_K^1$ , $H_o^c(X\,;\,K)$ est le module libre engendré par les composantes connexes de $X$ (si $K$ est un corps, il suffit de supposer que $X$ est localement connexe).

(2.9) Si $F : I \times X \to Y$ est propre et si on pose $F_t(x) = F(t , x)$ , alors $F_{0*} = F_{1*}$ pour l'homologie à supports quelconques. Si on prend l'homologie à supports compacts, le résultat est encore vrai même si $F$ n'est pas propre.

(2.10) Si $X$ est $HLC_K^r$ et compact, $H_q(X , K)$ et $H^q(X , K)$ ont un nombre fini de générateurs pour $q \leq r$ .

3. Dualité.

(3.1) $\Gamma_\Phi$ étant exact à gauche, on a un homomorphisme canonique

$$H_n^\Phi(X ; \mathcal{S}) = H_n(\Gamma_\Phi \, \mathcal{C}_H(X ; \mathcal{S})) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{H}_n(\mathcal{C}_H(X ; \mathcal{S}))) = H_\Phi^0(X , \mathcal{H}_n(\mathcal{C}_H(X ; \mathcal{S}))) \quad .$$

On suppose maintenant que $\mathrm{Tor}(\mathcal{H}_n(X , K)_x , \mathcal{S}_x) = 0$ (ce qui est toujours vérifié si $\mathcal{S} = K$ ). Alors $\mathcal{H}_n(\mathcal{C}_H(X ; \mathcal{S})) = \mathcal{H}_n(X , K) \otimes \mathcal{S}$ .

(3.2) THÉORÈME. - Supposons que $\mathrm{Tor}(\mathcal{H}_n(X , K)_x , \mathcal{S}_x) = 0$ et que $\Phi$ soit paracompactifiante si $\mathcal{S} \neq K$ . Si $X$ est de dimension finie sur $K$ , l'homomorphisme canonique

$$\Delta : H_n^\Phi(X ; \mathcal{S}) \to H_\Phi^0(X , \mathcal{H}_n(X , K) \otimes \mathcal{S})$$

est un isomorphisme.

(3.3) DÉFINITION. - Un espace topologique $X$ est une $n - HM_K$ (homology n-manifold over $K$ ) si

1. $\dim_K X < +\infty$
2. $\mathcal{H}_q(X ; K) = 0$ pour $q \neq n$
3. $\mathcal{H}_n(X ; K)$ est localement isomorphe au faisceau constant $K$ .

On désigne alors par $\mathcal{T}$ le faisceau $\mathcal{H}_n(X ; K)$ . $\mathcal{T}$ est le faisceau d'orientation de $X$ . Si $\mathcal{T}$ est constant, on dit que $X$ est orientable, une orientation est alors la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{T}$ avec $K$ .

Exemple. - Une variété topologique de dimension $n$ est une $n - HM_K$ , en effet les propriétés 2 et 3 étant locales, il suffit de les vérifier pour les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ .

(3.4) THÉORÈME. - Soit $X$ une $n - HM_K$ . Si $\mathcal{S} = K$ ou si $\Phi$ est paracompactifiante, il existe un isomorphisme canonique

$$\Delta : \ H_{n-p}(X ; \mathcal{S}) \to H^p(X ; \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) , \ \forall \ p \quad .$$

Démonstration. - On pose $\mathcal{B}^q = \mathcal{C}_H(X ; \mathcal{S})_{n-q}$ . $\mathcal{B}^*$ est un faisceau différentiel dont la différentielle est de degré $+1$ . On a :

$$H^q(\Gamma_\Phi \mathcal{B}^*) = H^\Phi_{n-q}(X , \mathcal{S}) \tag{1}$$

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{B}^*) = \mathcal{H}_{n-q}(X , K) \otimes \mathcal{S} \quad , \tag{2}$$

i. e.

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{B}^*) = 0 \ \text{ si } \ q \neq 0 , \qquad \mathcal{H}^o(\mathcal{B}^*) = \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \quad . \tag{3}$$

Si $\mathcal{S} = K$ , $\mathcal{B}^*$ est flasque ; si $\Phi$ est paracompactifiante, $\mathcal{B}^*$ est $\Phi$-fin ; et dans les deux cas :

$$H^p_\Phi(X ; \mathcal{B}^*) = 0 \ \text{ pour } \ p \geq 1 \quad .$$

D'après ([3], II, 4.6.1), on a une suite spectrale dont le terme $E_2$ est

$$E_2^{p,q} = H^p_\Phi(X ; \mathcal{H}^q(\mathcal{B}^*))$$

et dont l'aboutissement est $H^*(\Gamma_\Phi \mathcal{B}^*)$ .

Compte tenu de (3), on a :

$$E_2^{p,q} = 0 \ \text{ si } \ q \neq 0 , \qquad E_2^{p,o} = H^p_\Phi(X ; \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) \quad .$$

Comme $\dim_K X < +\infty$ , la suite spectrale est convergente ([3], p. 195) donc

$$E_2^{p,o} = E_\infty^{p,o} = H^p(\Gamma_\Phi(\mathcal{B}^*)) = H^\Phi_{n-p}(X , \mathcal{S}) \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - La démonstration de (3.2) est analogue.

(3.5) Supposons que $X$ soit une $n$ - $HM_K$ orientée, $\Delta$ est alors un isomorphisme de

$$H^\Phi_p(X ; K) \to H^{n-p}_\Phi(X ; K) \quad .$$

Soient $a \in H^\Phi_i(X ; K)$ et $b \in H^\Psi_j(X ; K)$ , on note

$$a.b = \Delta^{-1}(\Delta a \cup \Delta b) \in H^{\Phi\cap\Psi}_{i+j-n}(X\ ;\ K)$$

a.b est le produit d'intersection de a et b . Ce produit est associatif et anticommutatif.

## B. Classe fondamentale.

4. Espaces du type $VS_n$ sur $K$ (variété de dimension $n$ avec singularités).

Ce sont des espaces localement compacts de dimension $n$ sur $K$ possédant un ouvert épais (i. e. dont le complémentaire est de dimension $\leqslant n-1$ sur $K$) homéomorphe à une $n$ - HM qui est $HLC_K$ (en abrégé : $n - CM_K$ , variété cohomologique de dimension $n$ ).

Une variété topologique de dimension $n$ est une $n - CM_K$ pour tout $K$ . On note $X_R$ l'ensemble des points de $X$ au voisinage desquels $X$ est homéomorphe à une $n - CM_K$ . C'est un ouvert épais dont le complémentaire est noté $X_S$ . Les points de $X_R$ (resp. $X_s$ ) sont dits réguliers (resp. singuliers).

5. Classe fondamentale.

(5.1) Soit $X$ un espace topologique. On désigne par $\mu_x$ le composé de

$$\Delta :\ H_n(X\ ;\ K) \to \Gamma(\mathcal{H}_n(X\ ;\ K))$$

et de l'application $\Gamma(\mathcal{H}_n(X\ ;\ K)) \to \mathcal{H}_n(X\ ,\ K)_x$ qui, à une section, fait correspondre sa valeur en $x \in X$ .

(5.2) Soit alors $X$ du type $VS_n$ sur $K$ .

Une classe fondamentale est un élément de $H_n(X\ ;\ K)$ dont l'image dans le groupe d'homologie locale en $x$ par $\mu_x$ est un générateur de ce groupe pour tout $x$ régulier.

Une classe fondamentale définit donc un isomorphisme du faisceau constant $X_R \times K$ sur $\mathcal{H}_n(X_R\ ;\ K)$ . L'existence d'une classe fondamentale implique donc que $X_R$ soit orientable. Si $X$ est une $n$ - CM , cette condition est aussi suffisante, car si $g$ est un générateur de $K$ , l'application $x \to g$ est une section $s$ de $\mathcal{C}$ , et $\Delta^{-1}$ $s$ est une classe fondamentale.

(5.3) Soit $U$ un ouvert de dimension $n$ sur $K$ d'un espace $X$ du type $VS_n$ sur $K$. $U$ est aussi du type $VS_n$ sur $K$.

THÉORÈME. - Soient $X$ un espace du type $VS_n$ sur $K$, et $U$ un ouvert épais de $X$. Si $U$ possède une classe fondamentale et si $\dim_K(X - U) \leqslant n - 2$, $X$ possède une et une seule classe fondamentale dont la restriction à $U$ est une classe fondamentale donnée de $U$.

Démonstration. - La suite exacte

$$H_n(X - U) \to H_n(X) \to H_n(U) \to H_{n-1}(X - U)$$

montre que $j_{nXU} : H_n(X) \to H_n(U)$ est un isomorphisme. Pour conclure il suffit de montrer que $\mathcal{H}_n(X ; K)$ est constant au-dessus de $U_R$. Comme

$$\dim_K(X_R - U_R) \leqslant \dim_K(X - U) \leqslant n - 2$$

$j_{nX_R U_R}$ est aussi un isomorphisme. (3.2) montre alors que

$$\Gamma\mathcal{H}_n(X_R ; K) \to \Gamma\mathcal{H}_n(U_R ; K)$$

est un isomorphisme, et par conséquent $\mathcal{H}_n(X_R ; K)$ est un faisceau constant.

COROLLAIRE. - Si dans le théorème précédent $U_R$ est connexe, $H_n(X ; K) \approx K$, la classe fondamentale de $X$ est un générateur de $H_n(X ; K)$. En effet

$$H_n(U_R , K) \approx \Gamma\mathcal{H}_n(U_R ; K) \approx K$$

puisque $U_R$ est connexe.

## 6. Classe fondamentale des espaces analytiques.

Soit $X$ un espace analytique complexe (au sens de SERRE) de dimension complexe $n$. Alors $\dim_{\mathbb{Z}} X = 2n$, où $\dim_{\mathbb{Z}}$ désigne comme précédemment la dimension cohomologique.

Désignons par $U$ l'ensemble des points simples de $X$. On sait que $X - U$ est un espace analytique de dimension $2n - 2$ sur $\mathbb{Z}$, donc, puisque $U$ est une variété, on voit que $X$ est un espace du type $VS_{2n}$ et, de plus :

THÉORÈME. - Soit $X$ un espace analytique complexe. Il existe une et une seule classe fondamentale induisant l'orientation naturelle sur $U$.

COROLLAIRE. - Soit $X$ un espace analytique irréductible de dimension complexe $n$. Alors $H_{2n}(X, \underset{\sim}{Z}) \approx \underset{\sim}{Z}$ est engendré par la classe fondamentale. Si $X$ est non compact,

$$H^c_{2n}(X, \underset{\sim}{Z}) = 0 \quad .$$

La première assertion provient du fait que dans un espace analytique irréductible, l'ensemble $U$ des points simples est connexe. La deuxième assertion vient de ce que l'isomorphisme

$$\Gamma \mathcal{H}_{2n}(X, \underset{\sim}{Z}) \to \Gamma \mathcal{H}_{2n}(U, \underset{\sim}{Z}) \quad \text{entraîne} \quad \Gamma_C(\mathcal{H}_{2n}(X, \underset{\sim}{Z})) = 0$$

si $X$ n'est pas compact, car, $\mathcal{H}_{2n}(U, \underset{\sim}{Z})$ étant constant, si une section s'annule en un point, elle est nulle puisque $U$ est connexe.

## C. Intersection de sous-ensembles analytiques.

### 7. Cycles analytiques.

(7.1) Sommes localement finies. - Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille localement finie de fermés d'un espace $X$, et soit $Y$ l'espace somme des $X_\alpha$. Les injections $X_\alpha \to X$ définissent une application propre $Y \to X$, donc une application

$$\prod_{\alpha \in I} H_*(X_\alpha ; K) = H_*(Y ; K) \xrightarrow{\mu} H_*(X ; K) \qquad ;$$

l'image par $\mu$ de $\prod_{\alpha \in I} \omega_\alpha$, $\omega_\alpha \in H_*(X_\alpha ; K)$ se désigne par $\sum_{\alpha \in I} \omega_\alpha$.

(7.2) Soit $(X_i)_{i \in I}$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques irréductibles d'un espace analytique $V$ ; un cycle analytique est une combinaison linéaire $Z = \sum n_i X_i$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ où les $X_i$ tels que $n_i \neq 0$ forment une famille localement finie. Le support $|Z|$ de $Z$ est le sous-ensemble analytique réunion des $X_i$ pour lesquels $n_i \neq 0$. Soit $h(X_i)$ la classe fondamentale de $X_i$, et

$$h(Z) = \sum n_i \, h(X_i) \in H_*(|Z| ; \underset{\sim}{Z}) = H_*^{|Z|}(V ; \underset{\sim}{Z})$$

puisque $|Z|$ est fermé.

(7.3) On suppose maintenant que $V$ est irréductible. Si $X$ et $Y$ sont deux sous-ensembles analytiques de dimension pure, on désigne par $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ l'ensemble des composantes irréductibles propres de $X \cap Y$, et par $2p$ la dimension sur $\underset{\sim}{Z}$ de $C_\lambda$. On peut alors montrer que tout $C \in H_{2p}^{X\cap Y}(V ; \underset{\sim}{Z})$ s'écrit de manière unique

$$C = \sum_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda + n \qquad C_\lambda \in H_{2p}^{C_\lambda}(V ; \underset{\sim}{Z}) \ , \quad n \in H_{2p}^{N}(N ; \underset{\sim}{Z})$$

où $N$ est l'ensemble des composantes non propresde $X \cap Y$, $\Sigma$ représentant une somme localement finie.

(7.4) Si $V$ est une variété analytique connexe, $h(X)$ et $h(Y)$ considérés dans $H_*^X(V ; \underset{\sim}{Z})$ et $H_*^Y(V ; Z)$ ont un produit d'intersection

$$h(X).h(Y) \in H_{2p}^{X\cap Y}(V ; \underset{\sim}{Z}) \qquad .$$

La composante de $h(X).h(Y)$ dans $H_{2p}^{C_\lambda}(V ; \underset{\sim}{Z})$ est alors un multiple entier de $h(C_\lambda)$ d'après le corollaire de (6). On le note $i(X.Y ; C_\lambda)$. Si $V$ est de nouveau un espace analytique, on définit $i(X.Y ; C_\lambda)$ comme étant $i(X'.Y' ; C'_\lambda)$ où $X'$, $Y'$, $C'_\lambda$ sont les intersections de $X$, $Y$, $C_\lambda$ et de l'ouvert des points simples de $V$.

On montre alors que $i(X.Y ; C_\lambda)$ possède les propriétés habituelles de la multiplicité d'intersection.

Remarque. - Ce qui précède ne constitue qu'une partie du travail de BOREL-HAEFLIGER, ces auteurs étudient aussi les espaces analytiques réels, dont il n'a pas été question ici dans un but de simplification, de façon que ce texte soit d'une longueur raisonnable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et HAEFLIGER (A.). - Classe d'homologie fondamentale, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 461-513.

[2] BOREL (A.) et MOORE (J. C.). - Homology theory for locally compact spaces, Mich. math. J., t. 7, 1960, p. 137-159.

[3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 13).