ANDRÉ GRAMAIN

Éléments de $\pi_{2n-1}(S^n)$ d'invariant de Hopf un

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 322, p. 145-151
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__145_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 322

ELEMENTS DE $\pi_{2n-1}(S^n)$ D'INVARIANT DE HOPF UN

(d'après J. ADAMS et M. ATIYAH)

par André GRAMAIN

Avant même que les groupes d'homotopie soient introduits par W. Hurewicz en 1935, on connaissait (sans le dire sous cette forme) la nullité des groupes $\pi_i(S^n)$ pour $0 < i < n$ (par le théorème d'approximation simpliciale), la nullité des groupes $\pi_i(S^1)$ pour $i \geqq 2$ (par le revêtement universel du cercle), ainsi que l'isomorphisme $\pi_n(S^n) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathbb{Z}$ défini par le degré de Brouwer (H. Hopf 1927). C'est l'invariant de Hopf, introduit par H. Hopf en 1931 pour les applications $S^3 \rightarrow S^2$ et généralisé en 1935 aux applications $S^{2n-1} \rightarrow S^n$, qui permit de progresser dans la connaissance des groupes d'homotopie des sphères. Dans [6] , Hopf définit un homomorphisme $H : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$, et construit pour tout n pair une application $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ dont l'invariant de Hopf $H(f)$ est égal à deux ; pour n impair, l'invariant de Hopf est nul. Ceci montre que $\pi_{4q-1}(S^{2q})$ contient un sous-groupe infini cyclique. (1)

En outre, les classiques fibrations de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$, $S^7 \rightarrow S^4$, et $S^{15} \rightarrow S^8$ ont un invariant de Hopf égal à un, et Hopf demandait si les entiers 2, 4 et 8 étaient les seuls pour lesquels $\pi_{2n-1}(S^n)$ contenait un élément d'invariant de Hopf un. Le problème reçut d'abord des solutions partielles : par exemple un tel entier doit être une puissance de 2 (J. Adem). Enfin, en 1958, J. Adams prouva dans [1] , en introduisant les opérations cohomologiques secondaires, que seuls 2, 4 et 8 conviennent.

Nous exposons ici une nouvelle démonstration de ce résultat, publiée par J. Adams et M. Atiyah dans [3] , qui utilise la K-théorie.

---

(1) En 1951, J.P. Serre montre que tous les groupes d'homotopie des sphères sont finis, sauf les exceptions de $\pi_n(S^n)$ et $\pi_{4q-1}(S^{2q})$.

1.- L'invariant de Hopf. (Voir [5])

1.1. Soit Ω^{n+1} l'espace des lacets de S^{n+1} ; la sphère S^n s'identifie à un sous-espace de Ω^{n+1}, et pour $n \geqq 2$ on a $\pi_i(\Omega^{n+1}, S^n) = 0$ si $i < 2n$. On le voit en calculant l'homologie de la paire (Ω^{n+1}, S^n), et on trouve en outre des isomorphismes canoniques

$$\pi_{2n}(\Omega^{n+1}, S^n) \overset{\sim}{\to} H_{2n}(\Omega^{n+1}, S^n) \overset{\sim}{\to} H_{2n}(\Omega^{n+1}) \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}.$$

Soit $E : \pi_i(S^n) \to \pi_i(\Omega^{n+1}) = \pi_{i+1}(S^{n+1})$ l'homomorphisme de suspension. La suite exacte d'homotopie du couple (Ω^{n+1}, S^n) :

$$\ldots \to \pi_i(S^n) \overset{E}{\to} \pi_i(\Omega^{n+1}) \overset{H}{\to} \pi_i(\Omega^{n+1}, S^n) \overset{d}{\to} \pi_{i-1}(S^n) \to \ldots$$

montre qu'on a le

THÉORÈME. I (H. Freudenthal) - Si $n \geqq 2$, la suspension E est bijective pour $i \leqq 2n-2$ et surjective pour $i = 2n-1$. L'image de l'homomorphisme $E : \pi_{2n}(S^n) \to \pi_{2n+1}(S^{(n+1)})$ est le noyau de l'homomorphisme $H : \pi_{2n+1}(S^{n+1}) \to \mathbb{Z}$ qui est par définition l'homomorphisme de Hopf.

Pour $n = 1$, on démontre que $\pi_2(\Omega^2, S^1) = \mathbb{Z}$; dans ce cas H est un isomorphisme parce que $E : \pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ est bijective, et que $\pi_2(S^1) = 0$.

1.2. La sphère S^{2n-1} est la réunion de deux tores pleins $D^n \times S^{n-1}$ et $S^{n-1} \times D^n$ dont on a identifié entre eux les bords de manière évidente. L'application canonique de D^n sur S^n qui envoie le bord de D^n en un point, permet de définir une application de $D^n \times S^{n-1}$ sur S^n , qui envoie $S^{n-1} \times S^{n-1}$ au point-base. Par recollement, on obtient une application $f_n : S^{2n-1} \to S^n$ dont la classe d'homotopie u_n ne dépend pas des choix faits au cours de la construction (c'est le crochet $[i_n, i_n]$, où i_n est le générateur canonique de $\pi_n(S^n)$).

L'espace X obtenu en attachant S^n à D^{2n} au moyen de l'application $f_n : S^{2n-1} \to S^n$ n'est autre que le quotient de $S^n \times S^n$ par l'identification de (x, x_o) avec (x_o, x), où x_o est le point-base de S^n. L'application composée $f : S^n \times S^n \to \Omega^{n+1} \times \Omega^{n+1} \to \Omega^{n+1}$ est homotope à une application g telle que $g(x, x_o) = g(x_o, x)$, et qui définit donc une application

$h : X \to \Omega^{n+1}$. Celle-ci induit un isomorphisme sur les homologies en dimension $i \leqq 3n-1$ (l'espace X n'a d'homologie qu'en dimensions n et $2n$, et sa construction même montre l'isomorphisme dans ces dimensions). Il en résulte un isomorphisme pour les groupes d'homotopie, et la suite exacte

$$\pi_{2n+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{2n}(X)\ (=\mathbb{Z}) \xrightarrow{d} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{2n}(S^{n+1})$$

montre le

THEOREME 2. <u>L'image de</u> d, <u>qui est aussi le noyau de</u> E, <u>est le sous-groupe de</u> $\pi_{2n-1}(S^n)$ <u>engendré par</u> u_n. (Même pour $n = 1$ car $u_1 = 0$)

1.3. On démontre que, pour n pair $H(u_n) = -2$; il en résulte que u_n engendre dans $\pi_{2n-1}(S^n)$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui est l'image de $d : \mathbb{Z} \to \pi_{2n-1}(S^n)$. Le noyau de d est nul, l'homomorphisme $H : \pi_{2n+1}(S^{n+1}) \to \mathbb{Z}$ est nul, et $E : \pi_{2n}(S^n) \to \pi_{2n+1}(S^{n+1})$ est surjective.

Soit n un entier pair ; s'il existe dans $\pi_{2n-1}(S^n)$ un élément d'invariant de Hopf 1, on a :

(i) <u>l'homomorphisme</u> $H : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$ <u>est surjectif</u> ;

(ii) $u_{n-1} = 0$ (i.e. l'image de d est nulle) ;

(iii) <u>la suspension</u> $E : \pi_{2n-3}(S^{n-1}) \to \pi_{2n-2}(S^n)$ <u>est injective</u> (donc bijective).

Dans le cas contraire, l'image de d est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, et u_{n-1} est un élément d'ordre 2 de $\pi_{2n-3}(S^{n-1})$. Les conditions sont donc des conditions suffisantes.

<u>Remarque</u>. Une autre condition nécessaire et suffisante est :

(iv) <u>Il existe une structure de H-espace sur</u> S^{n-1}.

La nullité de u_{n-1} est en effet nécessaire et suffisante pour l'existence d'une application $h : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ telle que $x \mapsto h(x,x_0)$ et $x \mapsto h(x_0,x)$ soient homotopes à l'application identique de S^{n-1}.

1.4. <u>Calcul homologique de l'invariant de Hopf</u>.

Soient $f : S^{2n-1} \to S^n$, u la classe d'homotopie de f, et X_f l'espace obtenu en attachant S^n à D^{2n} par l'application f. La cohomologie de X_f est nulle sauf en dimension $i = 0, n, 2n$; et on a des isomorphismes

$$H^n(X_f ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(S^n ; \mathbb{Z})$$

$$H^{2n}(X_f ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{2n}(X_f, S^n ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{2n}(D^{2n}, S^{2n-1} ; \mathbb{Z}).$$

THÉORÈME 3. Le cup-carré du générateur de $H^n(X_f ; \mathbb{Z})$ est égal à $-H(u)$ fois le générateur de $H^{2n}(X_f ; \mathbb{Z})$. (Voir [5] exposé n° 6)

Le fait qu'il n'existe un élément de $\pi_{2n-1}(S^n)$ d'invariant de Hopf 1 que pour $n = 2$, 4 ou 8 est donc conséquence du

THÉORÈME 4. Soit X l'espace obtenu en attachant S^n à D^{2n} par une application $f : S^{2n-1} \to S^n$, si $n \neq 1, 2, 4$ ou 8, le cup-carré

$$H^n(X, \mathbb{Z}_2) \to H^{2n}(X, \mathbb{Z}_2)$$

est nul. (2).

2. Démonstration du Théorème 4.

2.1. Le λ-anneau spécial K(X).

Soit X un espace compact, K(X) le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels complexes de base X, et $\tilde{K}(X)$ le noyau de l'homomorphisme naturel $K(X) \to K(\text{point})$. Le produit tensoriel induit sur K(X) une structure d'anneau. La i-ème puissance extérieure définit une application naturelle. $\lambda^i : K(X) \to K(X)$. Ces opérations λ^i munissent K(X) d'une structure de λ-anneau spécial (voir [2]). Soit $\psi^i : K(X) \to K(X)$ l'opération définie par

$$\psi^i(x) = Q_i(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^i(x))$$

où Q_i est le polynôme qui exprime la somme des puissances i-èmes en fonction des fonctions symétriques élémentaires. L'application ψ^i est un homomorphisme d'anneau, on a $\psi^i \circ \psi^j = \psi^j \circ \psi^i$; en outre, si p est premier,

---

(2) Dans [1] , J. Adams prouve que si X est un espace dont les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ sont nuls pour $m < i < m+n$, l'opération de Steenrod $Sq^n : H^m(X, \mathbb{Z}_2) \to H^{m+n}(X, \mathbb{Z}_2)$ est nulle, sauf éventuellement pour $n = 1, 2, 4$ ou 8.

on a :

$$\psi^p(x) \equiv x^p \text{ mod.} p. \quad (^3)$$

Pour un fibré ξ de dimension 1, on a évidemment $\lambda^i([\xi]) = 0$ pour $i \geq 2$, et $\psi^q([\xi]) = [\xi]^q$; d'où, si μ est le fibré canonique de base S^2, $\psi^q([\mu]-[1]) = [\mu]^q - [1] = q([\mu]-1)$ car $([\mu]-1)^2 = 0$. Comme $\tilde{K}(S^2)$ est un groupe libre engendré par $[\mu]-[1]$, on en déduit que, si $x \in \tilde{K}(S^2)$ on a $\psi^q(x) = qx$, et de même que si $x \in \tilde{K}(S^{2m})$ on a $\psi^q(x) = q^m x$.

2.2. Cohomologie et K-théorie.

Le caractère de Chern définit un homomorphisme d'anneaux

$$ch : \tilde{K}(X) \to \tilde{H}^{pair}(X ; Q).$$

Lorsque X est une sphère, on a en fait un isomorphisme

$$ch : \tilde{K}(S^n) \to \tilde{H}^{pair}(S^n ; \mathbb{Z})$$

(c'est évident pour n impair parce que $\tilde{K}(S^n) = 0$; pour n pair, il suffit de regarder le générateur de $\tilde{K}(S^n)$).

Si X est obtenu en attachant S^n à D^{2n} par une application $f : S^{2n-1} \to S^n$, et si n est pair, la suite exacte

$$\tilde{K}(S^{n+1}) = 0 \to \tilde{K}(D^{2n}, S^n) \to \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^n) \to 0 = \tilde{K}(S^{2n-1})$$

ainsi que les isomorphismes $\tilde{K}(S^n) \tilde{\to} H^n(S^n, \mathbb{Z})$ et $\tilde{K}(D^{2n}, S^n) \tilde{\to} H^{2n}(S^{2n}, \mathbb{Z})$ prouvent que $\tilde{K}(X)$ est un groupe libre à deux générateurs : un relèvement a du générateur de $\tilde{K}(S^n)$, et l'image b du générateur de $\tilde{K}(D^{2n}, S^n)$.

THEOREME 5. On a $a^2 \equiv 0$ mod. 2 pour $n \neq 2$, 4 ou 8.

---

(3) Dans [4] M. Atiyah donne de ψ^p, pour p premier, l'interprétation géométrique suivante : Soient ξ un fibré vectoriel, et T l'automorphisme de $\otimes^p \xi$ défini par permutation circulaire des facteurs. Alors, si ξ_o et ξ_1 sont les sous-espaces propres de $\otimes^p \xi$ correspondant aux valeurs propres 1 et $2i\pi/p$ de T, on a $\psi^p([\xi]) = [\xi_o] - [\xi_1]$.

On en déduit le Théorème 4 : pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer ; pour n impair au moins égal à 3, l'anticommutativité du cup-produit prouve la nullité du cup-carré puisque $\tilde{H}^{2n}(X, Z)$ est libre ; enfin, pour n pair, on a l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{ch} : \tilde{K}(X) \to \tilde{H}(X, Z)$$

et le Théorème 5 entraîne le Théorème 4.

2.3. <u>Démonstration du Théorème 5.</u>

D'après le n° 1, il suffit de voir que $\psi^2(a) \equiv 0$ mod.2. Or, en regardant l'image dans $\tilde{K}(S^n)$, on voit que si $n = 2m$, on a

$$\psi^2(a) = 2^m a + rb$$

$$\psi^3(a) = 3^m a + sb, \quad \text{où } r, s \in Z.$$

De plus $\quad \psi^q(b) = q^{2m} b.$

Alors $\psi^2 o \psi^3 = \psi^3 o \psi^2$ entraîne :

$$2^m(3^m a + sb) + r3^{2m} b = 3^m(2^m a + rb) + s2^{2m} b,$$

d'où $\quad 3^m(3^m - 1)\, r = 2^m(2^m - 1)\, s.$

On en déduit que r est pair (et $\psi^2(a) \equiv 0$ mod.2) si 2^m ne divise pas $3^m - 1$.

LEMME. <u>Soit</u> p <u>un nombre premier. Si</u> p^m <u>divise</u> $(1 + p)^m - 1$, <u>alors</u>

$$m = 1 \ \underline{\text{si}}\ p \neq 2$$

$$m = 1, 2 \ \underline{\text{ou}}\ 4 \ \underline{\text{si}}\ p = 2.$$

Ecrivons $m = p^t q$, où p ne divise pas q. Pour $p \neq 2$, le développement de $(1 + p)^m$ montre que $(1 + p)^m = 1 + up^{t+1}$, où p ne divise pas l'entier u. Si p^m divise $(1 + p)^m - 1$, on a $m \leqq 1 + t$, d'où $m = 1$.

Pour $p = 2$, on a $(1 + 2)^2 = 1 + 2^3$, et $(1 + 2)^{2^t} = 1 + u2^{t+2}$; donc si 2^m divise $3^m - 1$, on a $m \leqq t + 2$, ce qui n'est possible que pour $m = 1, 2$ ou 4.

B I B L I O G R A P H I E

[1] J.F. ADAMS - On the non-existence of elements of Hopf invariant one. Ann. of Math. 72 (1960) 20-104.

[2] J.F. ADAMS - Vector fields on spheres. Ann. of Math. 75, (1962) 603-632 (Voir aussi Séminaire Bourbaki 14e année (1961/62) n° 233)

[3] J.F. ADAMS et M.F. ATIYAH - K-theory and the Hopf invariant. Quart. J.Math.Oxford 17 (1966) 31-38.

[4] M.F. ATIYAH - Power operations in K-theory. Quart.J.Math.Oxford 17 (1966) 165-193

[5] H. CARTAN - Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires. Séminaire 11e année (1958/59), exposés n° 5 et 6.

[6] H. HOPF - Ueber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fundam.Math. 25 (1935) 427-440.

E R R A T A

Page 322-03 - Ligne 5, remplacer $\pi_{2n}(X)$ par $\pi_{2n}(X,S^n)$.

Page 322-06 - Remplacer les lignes 4, 5, 6 par :

on a, d'après le théorème 5

$$a^2 = 2\mu b , \quad \text{où } \mu \in \mathbb{Z} ,$$

car, dans $\widetilde{K}(S^n)$, le carré de tout élément est nul. La multiplicativité du caractère de Chern entraîne l'égalité

$$\mathrm{ch}(a) \cup \mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(a^2) = 2\mu \mathrm{ch}(b) \quad \text{dans } H^{2n}(X,\mathbb{Q}) .$$

Le théorème 4 en résulte, car on sait que $\mathrm{ch}(b)$ est le générateur de $H^{2n}(X,\mathbb{Z})$, et de plus $\mathrm{ch}(a) \cup \mathrm{ch}(a)$ est le cup-carré du générateur de $H^n(X,\mathbb{Z})$.