SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES-LOUIS LIONS

Sur les problèmes unilatéraux

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 350, p. 55-77
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__55_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 350 Novembre 1968

SUR LES PROBLÈMES UNILATÉRAUX

par Jacques-Louis LIONS

Introduction.

Les problèmes unilatéraux stationnaires de la Mécanique (cf. [26] et la bibliographie de ce travail) conduisent à des problèmes elliptiques non linéaires, d'un type nouveau, étudiés pour les équations de l'élasticité dans [10] puis dans un contexte de plus en plus général - de façon à couvrir d'autres exemples pratiques - dans [29], [30], [25], [13], [8], [9], [4], [5].

On est ensuite passé, dans [25], au cas des problèmes unilatéraux paraboliques, puis dans [6], [19] aux problèmes unilatéraux hyperboliques - ce qui ne signifie pas, loin de là, que "tout soit fini" !! -.

Par ailleurs de larges classes de problèmes unilatéraux, de nature un peu différente, apparaissent dans toute la théorie du contrôle optimal - i.e. du calcul des variations avec contraintes, comme au N° 1 - et cela dans le cas déterministe [23], stochastique [3] et dans la théorie des jeux aux dérivées partielles. D'ailleurs les conditions nécessaires générales développées récemment en calcul des variations avec contraintes (cf. [12], [27]) contiennent très probablement, lorsque applicables à des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, de nouveaux problèmes unilatéraux.

On laisse ici de côté, faute de place, les aspects "contrôle", en essayant de donner une idée de la situation (d'ailleurs très évolutive !) dans la première direction.

Le plan est le suivant :

1. Quelques exemples.

1.1. Un problème "ambigu".

1.2. Minimisation d'une forme quadratique sur un convexe. Application au Problème (1.1) (1.2).

1.3. Autres exemples.

2. Les problèmes unilatéraux elliptiques.

2.1. Les inéquations variationnelles.

2.2. Une autre démonstration par pénalisation.

2.3. Les problèmes.

3. La régularité.

3.1. Difficultés.

3.2. Un théorème de régularité.

4. Notions sur les inéquations variationnelles d'évolution.

4.1. Inéquations paraboliques.

4.1.1. Formulations du problème.

4.1.2. Exemple.

4.1.3. Un résultat.

4.1.4. Remarques.

4.2. Inéquations hyperboliques.

Bibliographie.

1. Quelques exemples.

1.1. Un problème "ambigu".

Le problème suivant intervient en Mécanique (contraintes unilatérales ; Signorini, Prager) : on cherche une fonction u définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ouvert de frontière Γ , telle que

$$(1.1) \qquad -\Delta u + u = f \qquad \text{dans } \Omega ,$$

$$(1.2) \qquad \begin{cases} u \geq 0 \text{ sur } \Gamma , & \dfrac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma , \quad (^1) \\ u \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 . \end{cases}$$

Remarques.- 1) Le problème (1.1) (1.2) est évidemment non linéaire.

2) La dernière condition (1.2) implique évidemment que sur Γ soit u soit $\frac{\partial u}{\partial n}$ est nul. Les parties de Γ où $u = 0$ et où $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ne sont pas données ! C'est une situation type de problème "à frontière libre".

On va indiquer au point suivant une première solution "faible" du problème (1.1) (1.2).

1.2. Minimisation d'une forme quadratique sur un convexe. Application au Problème (1.1) (1.2).

Quelques généralités immédiates : soient

1) V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ (2),

---

(1) $\dfrac{\partial}{\partial n}$ = dérivée normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

(2) Dans le cas complexe, il suffit d'introduire des "Re" dans les inéquations ci-après.

2) K un ensemble convexe fermé de V ,

3) $a(u,v)$ une forme bilinéaire sur V , continue, symétrique ($a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u , v \in V$) telle que

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad , \qquad \alpha > 0 \, , \; \forall v \in V$$

(donc $a(u,v)$ est un produit scalaire hilbertien sur V),

4) $v \to L(v)$ une forme linéaire continue sur V .

On introduit la fonctionnelle

$$J(v) = a(v,v) - 2L(v) \, . \tag{1.3}$$

On cherche

$$\operatorname*{Inf}_{v\in K} J(v) \, . \tag{1.4}$$

Alors : <u>il existe</u> $u \in K$ <u>unique tel que</u>

$$J(u) = \operatorname*{Inf}_{v\in K} J(v) \quad ;$$

<u>l'élément</u> u <u>est caractérisé par</u>

$$a(u,v-u) \geq L(v-u) \qquad \forall v \in K \, . \tag{1.5}$$

(Cela est immédiat ; puisque $a(u,v)$ est un produit scalaire sur V , il existe $\tilde{L}$ unique dans V tel que

$$L(v) = a(\tilde{L},v)$$

et u n'est autre que la projection, pour le produit scalaire $a(u,v)$, de $\tilde{L}$ sur K .)

<u>Application</u> : <u>résolution</u> <u>"faible"</u> <u>de</u> (1.1) (1.2).

On applique ce qui précède avec

1) $V = H^1(\Omega) = \{v | v , \frac{\partial v}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial v}{\partial x_n} \in L^2(\Omega)\}$ (1) ;

2) $K = \{v | v \in V , v \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}$, qui est un cône convexe fermé de $H^1(\Omega)$ (2) ;

3) $a(u,v) = \int_\Omega (uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) \, dx$;

4) $L(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$, f donné dans $L^2(\Omega)$.

Alors (1.5) s'applique. On a donc un u et un seul dans K vérifiant (1.5).

Reste à interpréter (1.5).

Notons d'abord que, K étant un cône de sommet l'origine, (1.5) équivaut à

$(1.5)_1$ $\quad a(u,v) \geq L(v) \qquad \forall v \in K$,

$(1.5)_2$ $\quad a(u,u) = L(u)$.

Prenant $v = \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (fonctions C^∞ dans Ω et à support compact de sorte que $v \in K$) on voit que

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donc on a (1.1).

Faisons maintenant un calcul formel (cf. Remarque 1.1 ci-après) : on multiplie (1.1) par v et on utilise Green :

---

(1) Espace de Sobolev d'ordre 1 ; c'est un Hilbert pour la norme $\int_\Omega [v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2] dx$; toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

(2) Ceci est un peu rapide car il n'est fait aucune hypothèse de régularité sur Γ , mais ça s'arrange aisément.

$$a(u,v) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma = \int_\Omega f \, v \, dx = L(v) \leq a(u,v) \quad (\text{par } (1.5)_1)$$

donc

(1.6) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall \, v \in K$ et (par $(1.5)_2$) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u \, d\Gamma = 0$,

et les conditions (1.6) impliquent (1.2).

Réciproquement, partant de (1.1) (1.2) on trouve aussitôt $(1.5)_1$ $(1.5)_2$, toujours formellement.

Conclusion : on considère la formulation (1.5) comme un problème "faible" associé à (1.1) (1.2) ; il y a alors existence et unicité.

Remarque 1.1.- Si Γ est assez régulière, on montre [24] :

$$u|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et alors $u \dfrac{\partial u}{\partial n}$ (sur Γ) a un sens et le calcul formel précédent peut être justifié.

Remarque 1.2.- On montre ceci [14] : soient Γ_1 un ensemble de (capacité positive de) Γ et $w = w(\Gamma_1)$ la solution de

(1.7)
$$\begin{cases} -\Delta w + w = f & \text{dans } \Omega , \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_1 , \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \quad ; \end{cases}$$

alors, la solution u de (1.1) (1.2) (au sens de (1.5)) vérifie

(1.8) $$u = \sup_{\Gamma_1} w(\Gamma_1) .$$

1.3. Autres exemples.

1.3.1. On prend

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \mid v \in H^1(\Omega) \ , \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma\} \ ,$$

$$K = \{v \mid v \in V \ , \ v \geq \psi \ \text{ sur } \ \Omega \ , \ \psi \ \text{ donnée sur } \ \Omega \ \ (\psi \leq 0 \ \text{ sur } \ \Gamma)\} \ ,$$

a et L comme en 1.2.

Si $\psi = 0$ (pour simplifier) on trouve que la solution u de (1.5) est *nulle* dans une région $\Omega_0 \subset \Omega$ *non donnée à l'avance* et *positive* ailleurs dans Ω, vérifiant alors $-\Delta u + u = f$. L'interface entre les deux régions est une *frontière libre* ; cf. [17], [18], [7].

1.3.2. On prend

$$V = H_0^1(\Omega) \ ,$$

$$K = \{v \mid v \in V \ , \ |\text{grad } v(x)| \leq 1 \ \text{ p.p. dans } \ \Omega\} \ ,$$

a et L comme en 1.2.

Le problème (1.5) est alors un problème d'élasto-plasticité [2], [15] dont la solution u vérifie $|\text{grad } u(x)| = 1$ dans la région "plastique" et dans la région élastique où $|\text{grad } u(x)| < 1$, on a l'équation habituelle $-\Delta u + u = f$.

2. Les problèmes unilatéraux elliptiques.

2.1. Les inéquations variationnelles.

Vu le nombre d'exemples (car il y en a bien d'autres que les précédents !) et leur intérêt, il est naturel d'étudier (1.5) de façon systématique.

La première question naturelle - et, en tous cas, celle qui s'est posée la première, cf. [29], [30] - est de savoir si la symétrie de a est utile ou non dans (1.5).

Naturellement, si l'on abandonne la symétrie de a, on cherche à résoudre (1.5) directement (on appelle (1.5) une "inéquation variationnelle") sans référence à un problème de minimisation du type (1.4).

On a dans ce sens le

THÉORÈME 2.1.- *On suppose que* $a(u,v)$ *est une forme bilinéaire continue sur* V *et coercive*, i.e.

(2.1) $$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 , \qquad \alpha > 0 , \ \forall v \in V ,$$

non nécessairement symétrique. Soient K *un convexe fermé de* V *et* L *une forme linéaire continue sur* V . *Il existe un élément* u *de* K *et un seul tel que*

(2.2) $$a(u,v - u) \geq L(v - u) \qquad \forall v \in K .$$

Démonstration de l'unicité.

Soient u_1 et u_2 deux solutions ; donc

$$a(u_1,v - u_1) \geq L(v - u_1) \qquad \forall v \in K ,$$
$$a(u_2,v - u_2) \geq L(v - u_2) \qquad \forall v \in K .$$

Prenant $v = u_2$ (resp. $v = u_1$) dans la 1ère (resp. 2ème) inéquation et additionnant, il vient

$$a(u_1 - u_2,u_1 - u_2) \leq 0$$

ce qui, joint à (2.1), donne $u_1 = u_2$.

Démonstration de l'existence.

On suit la méthode [25].

L'inéquation (2.2) équivaut à

$$(u,v-u)_V \geq (u,v-u)_V - \rho[a(u,v-u) - L(v-u)] , \quad \forall v \in K$$

$\rho > 0$ fixé.

Mais pour g quelconque dans V , il existe w unique dans K tel que (on applique le cas symétrique) :

(2.3) $$(w,v-w)_V \geq (g,v-w)_V - \rho[a(g,v-w) - L(v-w)] , \quad \forall v \in K .$$

On définit ainsi, $\forall \rho > 0$ fixé, une application

(2.4) $$g \to w = S(g) \text{ de } V \to K ,$$

et l'on aura l'existence si l'on montre que (2.4) admet un point fixe.

Pour cela, on va vérifier que, pour $\rho > 0$ convenable, S est une contraction.

Puisque $v \to a(g,v)$ est continue sur V , on a :

(2.5) $$a(g,v) = (Bg,v)_V , \qquad B \in \mathcal{L}(V;V) ;$$

(2.3) s'écrit :

(2.6) $$(w,v-w)_V \geq (g-\rho Bg, v-w)_V + \rho L(v-w) \qquad \forall v \in K .$$

Soit $w_1 = S(g_1)$, donc

(2.7) $$(w_1,v-w_1)_V \geq (g_1-\rho Bg_1, v-w_1)_V + \rho L(v-w_1) \qquad \forall v \in K .$$

Prenant $v = w_1$ (resp. $v = w$) dans (2.6) (resp. (2.7)) et ajoutant, on a :

$$-\| w - w_1\|_V^2 \geq -((I-\rho B)(g-g_1), w-w_1)_V$$

d'où

(2.8) $$\| w - w_1\|_V \leq \| (I-\rho B)(g-g_1)\|_V .$$

Mais $(B\varphi,\varphi)_V = a(\varphi,\varphi) \geq \alpha\|\varphi\|_V^2$ donc

$$\| (I-\rho B)\varphi\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|B\|^2)\|\varphi\|_V^2$$

donc $\| (I-\rho B)\varphi\|_V \leq \theta\|\varphi\|_V$, $0 < \theta < 1$, pour un choix convenable de ρ et (2.8) montre que, pour ce choix de ρ , on a bien une contraction.

2.2. Une autre démonstration par pénalisation.

On suppose que $0 \in K$ (on s'y ramène par translation). On introduit

(2.9) $$\gamma = I - P_K \ , \quad P_K = \text{projection dans } V \text{ sur } K \ .$$

L'opérateur γ vérifie en particulier

$$(\gamma v,v)_V \geq 0 \ , \qquad \gamma \text{ est nul sur } K \ ,$$

$$(\gamma u - \gamma v, u - v)_V \geq 0 \qquad \text{(monotonie)} \ ,$$

$$(\gamma v,v)_V = 0 \iff v \in K \ ;$$

on sait alors, d'après la théorie des équations monotones, que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_\epsilon \in V$ unique tel que

(2.10) $$a(u_\epsilon,v) + \frac{1}{\epsilon}(\gamma u_\epsilon,v)_V = L(v) \qquad \forall\, v \in V \ .$$

Le terme en $\frac{1}{\epsilon}$ est dit "terme de pénalisation" (dans le cadre du calcul des variations, lorsque a est symétrique, on ajoute à la fonctionnelle $J(v)$ un terme pénalisateur $\frac{1}{\epsilon}(\gamma v,v)_V$ pour le cas où v "s'éloigne" de K).

Prenant $v = u_\epsilon$ dans (2.10) on en déduit facilement que

$$\| u_\epsilon \|_V \leq \text{constante lorsque } \epsilon \to 0 \ ,$$

$$(\gamma u_\epsilon, u_\epsilon)_V \leq C\epsilon \ .$$

On extrait alors une suite, encore notée u_ϵ , telle que

$$u_\epsilon \to w \text{ dans } V \text{ faible lorsque } \epsilon \to 0 \ .$$

On vérifie (il faut utiliser la monotonie de γ) que

$$\gamma w = 0$$

donc $$w \in K \ .$$

Si l'on prend maintenant $v \in K$ on déduit de (2.10) que

$$a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) - L(v - u_\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}(\gamma u_\epsilon, v - u_\epsilon)_V$$

$$= \frac{1}{\epsilon}(\gamma v - \gamma u_\epsilon, v - u_\epsilon) \geq 0$$

et on peut passer à la limite (noter que $\liminf a(u_\varepsilon,u_\varepsilon) \geq a(w,w)$) ; on obtient

$$a(w,v-w) - L(v-w) \geq 0 \qquad \forall\, v \in K$$

et donc $\quad w = u =$ solution du problème.

2.3. Les problèmes.

Après le Théorème 2.1, on est naturellement conduit aux problèmes suivants :

(i) les problèmes considérés jusqu'ici sont non linéaires (sauf si K est un sous-espace vectoriel) mais l'opérateur A défini par

$$a(u,v) = \langle Au,v\rangle , \qquad Au \in V' \text{ dual de } V ,$$

est linéaire de $V \to V'$.

On peut se débarrasser de cette hypothèse et supposer que A est monotone (et plus généralement pseudo-monotone, cf. [4], [16]) d'un Banach V dans son dual V' et coercif (i.e. $\frac{\langle Av,v\rangle}{\|v\|_V} \to \infty$ si $\|v\|_V \to \infty$).

On obtient encore (cf. [5], [8], [9], [13]) l'existence d'une solution $u \in K$ de

(2.11) $$(Au,v-u) \geq L(v-u) \qquad \forall\, v \in K .$$

(ii) on a supposé a coercif, au sens (2.1) ; on peut affaiblir cette hypothèse - et c'est utile dans les applications - ; nous renvoyons pour cela à [25].

(iii) dans les cas "concrets" des problèmes (2.2) pour des opérateurs différentiels A elliptiques, quelle est la régularité de la solution u lorsque les données sont régulières ?

Ce problème est brièvement examiné au N° 3 ci-après.

(iv) le problème (1.1) (1.2) est une "variante" non linéaire d'un problème de

Dirichlet-Neumann. Quels sont les problèmes analogues pour l'opérateur de la chaleur ou l'opérateur des ondes ? Cette question conduit aux inéquations variationnelles d'évolution, dont l'étude est esquissée au N° 4 ci-après.

3. La régularité.

3.1. Difficultés.

Pour fixer les idées, nous prenons :

$$V = \text{sous-espace fermé de } H^1(\Omega) \ ,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx \ ,$$

$$L(v) = \int_\Omega f\, v\, dx \ .$$

On a pris jusqu'ici $f \in L^2(\Omega)$ mais on peut le prendre dans un espace plus grand ; par ex., si $V = H_0^1(\Omega)$, on peut prendre f dans $H^{-1}(\Omega)$.

Le problème est : supposant Ω borné de frontière Γ aussi régulière que l'on voudra, la solution $u \in K$ de

(3.1) $$a(u,v-u) \geq \int_\Omega f(v-u)\, dx \qquad \forall\, v \in K$$

est-elle de "plus en plus régulière" lorsque f est de "plus en plus régulier" ?

La réponse dépend essentiellement de K comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 3.1.-

$$V = H_0^1(\Omega) \ ,$$

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega) \ , \int_\Omega v^2\, dx \leq 1\} \ .$$

Alors, il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$Au + \lambda u = f$$

($\lambda = 0$ si $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$) et la situation, du point de vue de la régularité, est <u>la même que dans les cas linéaires</u> ; si $H^k(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre k , on a :

(3.2) $$f \in H^k(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega) ,$$

et cela quel que soit k .

<u>Exemple</u> 3.2.-

Voici maintenant un cas où (3.2) <u>n'a pas lieu</u>. On prend

$$\Omega =]0,1[, \quad V = H_0^1(\Omega) ,$$

$$K = \{v \mid |v'(x)| \le 1 \text{ p.p.}\}$$ (analogue unidimensionnel de 1.3.2),

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' \, dx ,$$

$$f = 4 \quad (\text{donc } \in H^k(\Omega) \ \forall k).$$

La solution correspondante de (3.1) est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \le x \le \frac{1}{4} , \\ -2x^2 + 2x - \frac{1}{8} & \text{pour } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} , \\ 1 - x & \text{pour } \frac{3}{4} \le x \le 1 . \end{cases}$$

On a :

$$u \in H^2(\Omega)$$

mais

$$u \notin H^3(\Omega) .$$

3.2. Un théorème de régularité.

On donne ici l'un des résultats les plus simples de [7].

THÉORÈME 3.1.- Soit u la solution de (3.1), avec f donné dans $L^2(\Omega)$. Soient A l'opérateur linéaire défini par $a(u,v)$ et V ($a(u,v) = (Au,v)$). On fait l'hypothèse de stabilité suivante : pour w donné dans K, soit w_ε la solution dans V de

$$(3.3) \qquad w_\varepsilon + \varepsilon A w_\varepsilon = w , \qquad \varepsilon > 0 \; ;$$

on suppose que $w_\varepsilon \in K$. On a alors

$$(3.4) \qquad Au \in L^2(\Omega) .$$

Démonstration.

L'inéquation (3.1), qui s'écrit aussi

$$(3.1 \text{ bis}) \qquad (Au - f, v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in K ,$$

implique

$$(3.5) \qquad (Av - f, v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in K$$

(car $(Av - f, v - u) = (Au - f, v - u) + (A(v - u), v - u) \geq (Au - f, v - u)$)

et d'ailleurs réciproquement (3.5) $\Rightarrow$ (3.1 bis).

Soit u_ε la solution de

$$(3.6) \qquad u_\varepsilon + \varepsilon A u_\varepsilon = u \; ;$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé, $u_\varepsilon \in K$ et il est donc loisible de prendre $v = u_\varepsilon$ dans (3.5). Comme $u_\varepsilon - u = -\varepsilon A u_\varepsilon$, il vient

$$-\varepsilon (A u_\varepsilon - f, A u_\varepsilon) \geq 0$$

donc

$$\|A u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|A u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

donc $A u_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\Omega)$ et (3.4) suit.

Application.

On prend l'exemple 1.3.1 avec $\psi = 0$.

Alors (3.3) est un problème de Dirichlet et la propriété de stabilité de l'énoncé est vraie d'après le principe du maximum. On a donc (3.4) et $u \in H_0^1(\Omega)$, donc, d'après la régularité des problèmes elliptiques linéaires, on a :

(3.7) $\qquad u \in L^2(\Omega)$.

Remarque 3.1.- On arrive à (3.7) également dans le cas de l'Exemple 1.3.2 ; cf. [7]. L'Exemple 3.2 montre que ce résultat ne peut pas être amélioré essentiellement.

Remarque 3.2.- On a également (3.7) dans le cas de (1.1) (1.2). On raisonne alors différemment [20] ; on effectue - comme dans le cas des équations - des translations parallèles à la frontière et on utilise ensuite le fait que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Un exemple de Shamir [28] montre que (3.7) ne peut être essentiellement amélioré.

4. Notions sur les inéquations variationnelles d'évolution.

4.1. Inéquations paraboliques.

4.1.1. Formulations du problème.

On se place dans la situation du Théorème 2.1, en supposant donnés deux espaces de Hilbert V et H avec

(4.1) $\qquad V \subset H$, injection continue, V dense dans H .

On identifie H à son dual ; alors, V' désignant le dual de V , on a :

(4.2) $\qquad V \subset H \subset V'$.

On désigne par $(\ , \ )$ le produit scalaire dans H ou entre V et V' .

On introduit en plus le temps $t \in [0,T]$.

Un analogue naturel de (2.2), pour le cas d'évolution, est

(4.3) $$(u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K$$

(où $u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$)

avec

(4.4) $$u(t) \in K$$

(4.5) $$u(0) \text{ donné , disons : } \quad u(0) = 0 \ .$$

Naturellement, il faut préciser les hypothèses sur $u(t)$. On introduit pour cela les espaces $L^2(0,T;V)$, $L^2(0,T;H)$ etc ; on posera

$$[\ ,\ ] = \text{produit scalaire dans } L^2(0,T;H) \text{ ou entre } L^2(0,T;V) \text{ et } L^2(0,T;V') \ .$$

On prend alors dans (4.3) $v = v(t)$ et l'on <u>intègre en</u> t . On obtient ainsi (toujours formellement)

(4.6) $$\begin{cases} [u', v - u] + [Au, v - u] \geq [f, v - u] \ , \\ u(t) \ ,\ v(t) \in K \quad \text{p.p.} \\ u(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Il est utile d'introduire une notion de solution "plus faible" que (4.6) <u>ne faisant pas intervenir</u> u' .

On introduit :

(4.7) $$\Phi = \{v \mid v \in L^2(0,T;V) \ ,\ v' \in L^2(0,T;V') \ ,\ v(0) = 0 \ ,\ v(t) \in K \ \text{p.p.}\} \ .$$

Alors

$$[v', v - u] + [Au, v - u] - [f, v - u] =$$
$$= \underbrace{[u', v - u] + [Au, v - u] - [f, v - u]}_{\geq\, 0 \text{ par } (4.6)} + \underbrace{[v' - u', v - u]}_{= \frac{1}{2}|v(T) - u(T)|_H^2 \,\geq\, 0}$$

donc

$$[v', v - u] + [Au, v - u] \geq [f, v - u] \qquad \forall v \in \Phi \,. \tag{4.8}$$

On est donc finalement conduit au problème précis suivant :

(4.9) <u>trouver</u> $u \in L^2(0,T;V)$ <u>vérifiant</u> (4.8) <u>et tel que</u> $u(t) \in K$ p.p.

4.1.2. <u>Exemple</u>.

Prenant V , K , a comme au N° 1.2, le problème (4.9) est une formulation "faible" du problème suivant : trouver $u = u(x,t)$ dans le cylindre $Q = \Omega \times]0,T[$ telle que

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u = f & \text{dans } Q \,, \\ u(x,0) = 0 \,, & \\ u(x,t) \geq 0 & \text{si } x \in \Gamma \,, \; t \in]0,T[\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) \geq 0 & \text{" \quad " \quad "} \,, \\ u\frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{" \quad " \quad "} \,. \end{array}$$

4.1.3. <u>Un résultat</u>.

THÉORÈME 4.1.- <u>Sous l'hypothèse</u> (2.1), <u>et pour</u> f <u>donné dans</u> $L^2(0,T;V')$, <u>il existe</u> u <u>unique</u>, <u>solution du problème</u> (4.9).

<u>Démonstration de l'existence</u>.

<u>Une</u> possibilité est "d'approcher" (4.8) par des problèmes "elliptiques" - du type de ceux déjà résolus au N° 2 - puis de passer à la limite.

Pour cela, on peut utiliser la régularisation elliptique, comme dans [25].

On peut aussi "<u>discrétiser en</u> t " ce qui conduit à ceci (cf. [4], [5]) : soit $G(h)$ le semi-groupe défini par

$$(4.10)\qquad G(h)\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h \\ \varphi(t-h) & \text{si} \quad t > h \end{cases}.$$

Le générateur infinitésimal est $-\frac{d}{dt}$, avec pour domaine les fonctions nulles à l'origine. Naturellement (4.10) a un sens pour des fonctions vectorielles.

Introduisons :

$$(4.11)\qquad \mathcal{K} = \{v \mid v \in L^2(0,T;V) \ , \ v(t) \in K \ \ \text{p.p.}\} \ ;$$

on constate facilement que le Théorème 2.1 donne l'existence et l'unicité, $\forall$ h > 0 , de $u_h \in \mathcal{K}$, solution de l'inéquation variationnelle elliptique

$$(4.12)\qquad \left[\frac{I - G(h)}{h} u_h + Au_h - f, v - u_h\right] \geq 0 , \qquad \forall \ v \in \mathcal{K} .$$

Faisant $v = 0$ dans (4.12), on voit que u_h demeure dans un borné de $L^2(0,T;V)$ lorsque $h \to 0$.

On déduit de (4.12) que

$$\left[\frac{I - G(h)}{h} v + Au_h - f, v - \dot{u}_h\right] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{I - G(h)}{h} u_h + Au_h - f, v - u_h\right]}_{\geq 0 \text{ par } (4.12)} + \underbrace{\left[\frac{I - G(h)}{h} (v - u_h), v - u_h\right]}_{\geq 0 \text{ car } G(h) \text{ est une \underline{contraction}.}}$$

Donc

$$(4.13)\qquad \left[\frac{I - G(h)}{h} v + Au_h - f, v - u_h\right] \geq 0$$

et <u>on peut faire tendre</u> h <u>vers</u> 0 <u>dans</u> (4.13) lorsque $v \in \Phi$ (on peut, par extraction, supposer que $u_h \to w$ dans $L^2(0,T;V)$ faible et $w \in \mathcal{K}$) et on trouve que w vérifie (4.8).

Démonstration de l'unicité (dûe à [4]).

Soient u_1 et u_2 deux solutions. Donc

$$(4.14)\qquad \begin{cases} [v',v - u_1] + [Au_1,v - u_1] \geq [f,v - u_1] & \forall v \in \Phi ,\\ [v',v - u_2] + [Au_2,v - u_2] \geq [f,v - u_2] & \forall v \in \Phi . \end{cases}$$

On pose

$$(4.15)\qquad w = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

et on introduit (c'est le même genre de "truc" que dans (3.6) avec $\frac{1}{n} = \varepsilon$) w_n solution de

$$(4.16)\qquad \begin{cases} w_n' + nw_n = nw ,\\ w_n(0) = 0 . \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $w_n \in \Phi$. On peut donc prendre $v = w_n$ dans chacune des équations (4.14). Ajoutant, il vient

$$(4.17)\qquad 2[w_n' , w_n - w] + [Au_1,w_n - u_1] + [Au_2,w_n - u_2] \geq 2[f,w_n - w] .$$

Mais par (4.16)

$$[w_n' , w_n - w] = - \frac{1}{n}[w_n' , w_n'] \leq 0$$

donc (4.17) implique

$$(4.18)\qquad [Au_1,w_n - u_1] + [Au_2,w_n - u_2] \geq 2[f,w_n - w] .$$

Mais on peut faire $n \to \infty$ dans (4.18). On obtient

$$[Au_1,w - u_1] + [Au_2,w - u_2] \geq 0$$

i.e.

$$[A(u_1 - u_2),u_1 - u_2] \leq 0$$

donc $\quad u_1 = u_2$.

4.1.4. Remarques.

1) On peut étendre ce qui précède au cas où $A = A(t)$ dépend mesurablement de de t - et au cas où A est pseudo-monotone [4].

2) On peut montrer [21] que u est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T] \to H$.

3) On peut étendre la méthode indiquée en 2.2. On considère la solution $u_\epsilon(t)$ de

$$(4.19)\qquad \begin{cases} u'_\epsilon(t) + Au_\epsilon(t) + \frac{1}{\epsilon}\,\gamma u_\epsilon(t) = f(t)\,, & (\epsilon > 0) \\ u_\epsilon(0) = 0 \end{cases}$$

(équation d'évolution non linéaire, mais "ça marche" !).

On montre [20] que $u_\epsilon \to u$ (solution de (4.8)) dans $L^2(0,T;V)$ lorsque $\epsilon \to 0$.

4) Un autre procédé est d'utiliser les différences finies ; cf. [31].

4.2. Inéquations hyperboliques.

La situation est très technique.... Cf. [6], [19]. On se borne à signaler ceci : on peut montrer l'existence et l'unicité d'une fonction u vérifiant

$$(4.20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \times \,]0,T[\,, \\[2mm] u(x,0) = 0\,, & x \in \Omega\,, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, & x \in \Omega\,, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t} \geq 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} \geq 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma\,, \quad t \in \,]0,T[\,. \end{cases}$$

Remarques.

1) La formulation variationnelle "forte" est (comparer à (4.3))

$$(4.21)\qquad \begin{cases} (u''(t),v - u'(t)) + a(u(t),v - u'(t)) \geq (f(t),v - u'(t)) \ , \forall v \in K \ , \\ u'(t) \in K \ , \\ u(0) = 0 \ , \qquad u'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

On suppose cette fois que $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u\ ,\ v \in V$.

On peut approcher u par (comparer à (4.19))

$$(4.22)\qquad \begin{cases} u''_\epsilon(t) + Au_\epsilon(t) + \frac{1}{\epsilon}\gamma u'_\epsilon(t) = f(t)\ , \qquad t > 0\ , \\ u_\epsilon(0) = 0 \ , \quad u'_\epsilon(0) = 0 \end{cases}$$

(équation hyperbolique non linéaire, mais "ça marche" encore) ; lorsque $\epsilon \to 0$, on peut montrer [21] que u_ϵ tend (dans un sens convenable) vers u solution de (4.21).

2) Pour d'autres applications de la "technique de pénalisation" (4.22), à des équations hyperboliques, cf. [11].

3) Pour la recherche de solutions périodiques, presque-périodiques, analogues "unilatéraux" de [1], cf. [22].

Dernière minute : On trouvera (entre autres !) une étude complète du cas hyperbolique dans un travail prochain de H. BRÉZIS.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AMERIO, G. PROUSE - Livre à paraître chez Van Nostrandt.

[2] B. D. ANNIN - Existence and uniqueness of the solution of the elastic plastic torsion... P.M.M., 29, 5 (1965), 879-887.

[3] A. BENSOUSSAN - Thèse, à paraître.

[4] H. BRÉZIS - Equations et inéquations non linéaires... . Annáles Inst. Fourier, t. 18 (1968).

[5] H. BRÉZIS - Inéquations variationnelles ... . Venise, juin 1968.

[6] H. BRÉZIS, J.-L. LIONS - Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. C.R. Acad. Sc. Paris, 264, (1967), 928-931.

[7] H. BRÉZIS, G. STAMPACCHIA - Sur la régularité... . Bull. Soc. Math. France, à paraître.

[8] F. BROWDER - Non linear monotone operator... . Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 780-785.

[9] F. BROWDER - Non linear maximal monotone operators... . Math. Annalen, 75 (1968), 89-113.

[10] G. FICHERA - Problemi elastostatici... . Memorie Accad. Naz. Lincei, S VIII, VII, (1964), p. 91-140.

[11] H. FUJITA, J.-L. LIONS - A paraître.

[12] R. V. GAMKRELIDZE - San Remo, Septembre 1968.

[13] P. HARTMAN, G. STAMPACCHIA - On some non linear... . Acta Math., 115 (1966), p. 271-330.

[14] Y. HAUGAZEAU - Thèse, à paraître.

[15] H. LANCHON, G. DUVAUT - Sur la solution du problème de torsion... . C. R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967), 520-523.

[16] J. LERAY, J.-L. LIONS - Quelques résultats... . Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

[17] H. LEWY - On a variational problem... . J. of Math. and Mech., 17 (1968), 861-884.

[18] H. LEWY, G. STAMPACCHIA - A paraître.

[19] J.-L. LIONS - Collège de France, Sém. Leray, Décembre 1965.

[20] J.-L. LIONS - Cours, Fac. Sc. Paris, 1967 et Remarks on Evolution Inequalities, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 331-342.

[21] J.-L. LIONS - Cours, Fac. Sc. Paris, 1968/69.

[22] J.-L. LIONS - C.R. Acad. Sc. Paris, Octobre 1968.

[23] J.-L. LIONS - Contrôle optimal... . Paris, Dunod, 1968.

[24] J.-L. LIONS, E. MAGENES - Problèmes aux limites... . Vol. 1, Paris, Dunod, 1968.

[25] J.-L. LIONS, G. STAMPACCHIA - Variational inequalities. Comm. Pure Applied Math., XX (1967), 493-519.

[26] J.-J. MOREAU - Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation. Journal de Mécanique, vol. 5 (1966), 439-470.

[27] L. NEUSTADT - A paraître.

[28] E. SHAMIR - Contre-exemple cité dans [7].

[29] G. STAMPACCHIA - C.R. Acad. Sc., 258 (1964), p. 4413-4416.

[30] G. STAMPACCHIA - Annales Inst. Fourier, 15 (1965), 189-258.

[31] R. TEMAM - A paraître.