MICHEL DEMAZURE

Motifs des variétés algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 365, p. 19-38

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__19_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 365 Novembre 1969

MOTIFS DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

par Michel DEMAZURE

La notion de motif a été introduite par Grothendieck [1] pour comparer les différentes théories de la cohomologie dont on dispose pour les variétés algébriques. Grosso modo, le "motif" d'une variété X joue le rôle correspondant, dans le cas transcendant, à celui de la cohomologie rationnelle de la variété analytique X^{an} associée à X . Dans la présentation de Grothendieck, l'ensemble de la théorie reposait sur certaines conjectures au sujet des cycles algébriques ("conjectures standard", cf. [2]) ; dans [3], Manin montre que les premiers résultats peuvent se démontrer sans utiliser ces conjectures, ce qui lui permet de calculer certains motifs (cf. n° 6) et de démontrer notamment les conjectures de Weil pour les variétés unirationnelles de dimension 3 . C'est de cette présentation que l'exposé ci-dessous est inspiré.

Il est clair que la forme définitive de la théorie dépendra beaucoup de la forme plus ou moins forte sous laquelle seront démontrées les "conjectures standard" ; le caractère provisoire de cet exposé justifie donc des hypothèses souvent trop particulières ou inutiles (voir [2] et [3] pour des compléments).

Dans toute la suite de l'exposé, nous fixons un corps commutatif k .

n° 1. Classes de cycles.

On note $\underline{\underline{V}}_k$ la catégorie des k-schémas lisses et projectifs. Si $X \in \underline{\underline{V}}_k$, on note $Z(X) = \bigoplus_{r \geq 0} Z^r(X)$ le groupe des cycles algébriques de X , gradué par la codimension ; par exemple $Z^o(X)$ est le $\underline{\underline{Z}}$-module libre engendré par les composantes de X .

Supposons X pur de dimension n ; alors $Z^n(X)$ admet pour base les points fermés de X et, si $z = \Sigma\, m_i\, P_i \in Z^n(X)$, on pose $\langle z\rangle = \Sigma\, m_i[\varkappa(P_i) : k]$. Si $z \in Z^r(X)$ et $z' \in Z^s(X)$ et si le produit d'intersection $z.z'$ est défini, il appartient à $Z^{r+s}(X)$. On dit que deux cycles z , $z_1 \in Z^r(X)$ sont <u>numériquement équivalents</u> si, pour tout $z' \in Z^{n-r}(X)$, tel que $z.z'$ et $z_1.z'$ soient définis, on a $\langle z.z'\rangle = \langle z_1.z'\rangle$. Le groupe gradué quotient $C\ell(X)$ de $Z(X)$ par cette relation d'équivalence est muni par le produit d'intersection d'une structure d'<u>anneau gradué</u> ; c'est <u>l'anneau des classes de cycles sur</u> X ; pour $r \in \underline{\underline{Z}}$, l'accouplement $(c,c') \mapsto \langle c.c'\rangle$ de $C\ell^r(X) \times C\ell^{n-r}(X)$ dans $\underline{\underline{Z}}$ est séparé par construction. Si X est irréductible, $C\ell^o(X)$ s'identifie naturellement à $\underline{\underline{Z}}$.

Les définitions précédentes s'étendent aussitôt au cas général par décomposition de $X \in \underline{\underline{V}}_k$ en composantes irréductibles.

A tout morphisme $\varphi : X \to Y$ de $\underline{\underline{V}}_k$ sont associés un homomorphisme d'anneaux gradués $\varphi^* : C\ell(Y) \to C\ell(X)$ et un homomorphisme de groupes $\varphi_* : C\ell(X) \to C\ell(Y)$. On a

(1) $$\varphi_*(x.\varphi^*(y)) = \varphi_*(x).y \qquad \text{("formule de projection")}$$

pour $x \in C\ell(X)$, $y \in C\ell(Y)$. Si X (resp. Y) est pur de dimension n (resp. m), l'homomorphisme φ_* est gradué de degré $m - n$. Si $Y = \operatorname{Spec} k$, alors $C\ell(Y) \simeq \underline{\underline{Z}}$ et $\varphi_*(x) = \langle x\rangle$.

n° 2. <u>La catégorie</u> $\underline{\underline{CV}}_k$.

Pour $X \in \underline{\underline{V}}_k$, notons $C(X)$ la $\underline{\underline{Q}}$-algèbre graduée $C\ell(X) \otimes_{\underline{\underline{Z}}} \underline{\underline{Q}}$; les constructions du n° 1 s'étendent par $\underline{\underline{Q}}$-linéarité aux $\underline{\underline{Q}}$-espaces vectoriels $C(X)$, $X \in \underline{\underline{V}}_k$. Notons en particulier que, si X est irréductible de dimension n , le $\underline{\underline{Q}}$-homomorphisme $x \mapsto \langle x\rangle$ de $C^n(X)$ dans $\underline{\underline{Q}}$ est bijectif.

Notons $\underline{\underline{CV}}_k$ la catégorie obtenue comme suit :

a) les <u>objets</u> de $\underline{\underline{CV}}_k$ sont les objets de $\underline{\underline{V}}_k$; pour éviter des confusions, on note $\bar{X}$ l'objet de $\underline{\underline{CV}}_k$ défini par l'objet X de $\underline{\underline{V}}_k$.

b) si $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ sont deux objets de $\underline{\underline{V}}_k$, les <u>morphismes</u> de $\bar{X}$ dans $\bar{Y}$ sont les éléments du sous-$\underline{\underline{Q}}$-espace vectoriel $\underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{Y})$ de $C(X \times Y)$ défini comme suit : un élément z de $C(X \times Y)$ appartient à $\underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{Y})$ si, pour chaque composante irréductible X' de X , la restriction de z à $C(X' \times Y)$ est de degré (i.e. de codimension) $\dim X'$.

c) si $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z} \in \underline{\underline{CV}}_k$, $f \in \underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{Y})$ et $g \in \underline{\underline{C}}(\bar{Y},\bar{Z})$, le <u>composé</u> $g \circ f$ est défini par

$$g \circ f = (\pi_Y)_*(\pi_Z^*(f)\cdot\pi_X^*(g))$$

où π_X , π_Y , π_Z désignent les projections canoniques du produit triple $X \times Y \times Z$ sur les produits doubles $Y \times Z$, $X \times Z$, $X \times Y$.

La catégorie $\underline{\underline{CV}}_k$ est <u>additive</u> (et même <u>$\underline{\underline{Q}}$-linéaire</u>) ; le morphisme identique d'un objet $\bar{X}$ de $\underline{\underline{CV}}_k$ est la classe de la diagonale Δ_X de X ; la somme directe $\bar{X} \oplus \bar{Y}$ de $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ est l'objet $\overline{X \amalg Y}$ défini par la somme disjointe $X \amalg Y$ des schémas X et Y .

La catégorie $\underline{\underline{CV}}_k$ possède un <u>produit tensoriel</u> : si $\bar{X}$, $\bar{Y} \in \underline{\underline{CV}}_k$, on note $\bar{X} \otimes \bar{Y}$ l'objet défini par le schéma-produit, et on définit des homomorphismes (notés $f \otimes g \mapsto f \otimes g$!)

$$\underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{X}') \otimes \underline{\underline{C}}(\bar{Y},\bar{Y}') \mapsto \underline{\underline{C}}(\bar{X} \otimes \bar{Y} , \bar{X}' \otimes \bar{Y}') ,$$

par la relation $f \otimes g = \pi^*(f)\sigma^*(g)$, où $\pi : X \times Y \times X' \times Y' \to X \times X'$ et $\sigma : X \times Y \times X' \times Y' \to Y \times Y'$ sont les projections canoniques.

A chaque morphisme $\varphi : X \to Y$ de $\underline{\underline{V}}_k$, on associe un morphisme $\bar{\varphi} : \bar{Y} \to \bar{X}$ de $\underline{\underline{CV}}_k$ par $\bar{\varphi} = \Gamma_\varphi(1)$, où Γ_φ est le composé $X \xrightarrow{\text{diag.}} X \times X \xrightarrow{\varphi \times id_Y} X \times Y$

($\bar{\varphi}$ est donc la classe du graphe de φ). On définit ainsi un foncteur contravariant $(X \mapsto \bar{X}, \varphi \mapsto \bar{\varphi})$ de $\underline{\underline{V}}_k$ dans $\underline{\underline{CV}}_k$.

n° 3. La catégorie $\underline{\underline{M}}_k^+$ des motifs effectifs.

La catégorie additive $\underline{\underline{CV}}_k$ n'est pas abélienne ; en fait, il existe déjà des projecteurs dans $\underline{\underline{CV}}_k$ qui n'ont pas de noyau. Une construction, due à Karoubi, permet de l'élargir en une catégorie déjà plus proche d'une catégorie abélienne.

Plus précisément, disons qu'une catégorie additive $\underline{\underline{A}}$ est pseudo-abélienne (Grothendieck dit "karoubienne", cf. SGA, 4, IV, 7.5) si elle possède les deux propriétés suivantes :

a) pour tout objet U de $\underline{\underline{A}}$, tout projecteur p de U (i.e. tout élément $p \in \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{A}}}(U,U)$ tel que $p \circ p = p$) possède un noyau.

b) pour tout objet U de $\underline{\underline{A}}$, et tout projecteur p de U , le morphisme canonique

$$(\mathrm{Ker}\ p) \oplus (\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_U - p)) \rightarrow U$$

(le premier membre existe grâce à a)) est un isomorphisme.

Toute catégorie additive se plonge de manière canonique dans une catégorie pseudo-abélienne ; décrivons cette construction dans le cas de $\underline{\underline{CV}}_k$ en définissant la catégorie $\underline{\underline{M}}_k^+$ des motifs effectifs sur k :

a) un motif effectif est un couple (U,p) où $U \in \underline{\underline{CV}}_k$ et où $p \in \underline{\underline{C}}(U,U)$ est un projecteur de U .

b) si (U,p) et (V,q) sont deux motifs effectifs, on pose

$$\mathrm{Hom}((U,p),(V,q)) = E/F ,$$

où

$$E = \{f \in \underline{\underline{C}}(U,V) \mid f \circ p = q \circ f\}$$

$$F = \{f \in E \mid f \circ p = q \circ f = 0\} .$$

c) la composition des morphismes est induite par la composition dans $\underline{\underline{CV}}_k$.

On a un foncteur additif canonique de $\underline{\underline{CV}}_k$ dans $\underline{\underline{M}}_k^+$: à $U \in \underline{\underline{CV}}_k$, on associe $\tilde{U} = (U, Id_U)$; à $f : U \to V$, on associe la classe $\tilde{f}$ de f dans $Hom((U,Id_U),(V,Id_V)) = \underline{\underline{C}}(U,V)/\{0\}$. On démontre alors immédiatement :

PROPOSITION 1.- (i) <u>La catégorie</u> $\underline{\underline{M}}_k^+$ <u>est</u> $\underline{\underline{Q}}$<u>-linéaire et pseudo-abélienne. Si</u> $U \in \underline{\underline{CV}}_k$, <u>et si</u> p <u>est un projecteur de</u> U , <u>on a</u> $\operatorname{Ker} \tilde{p} = (U, Id_U - p)$ <u>et</u> $\operatorname{Im} \tilde{p} = (U,p)$.

(ii) <u>Le foncteur canonique</u> $\underline{\underline{CV}}_k \to \underline{\underline{M}}_k^+$ <u>est pleinement fidèle.</u>

(iii) <u>Pour toute catégorie pseudo-abélienne</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>et tout foncteur additif</u> $F : \underline{\underline{CV}}_k \to \underline{\underline{A}}$, <u>il existe un foncteur additif</u> $F' : \underline{\underline{M}}_k^+ \to \underline{\underline{A}}$ <u>(et un seul à isomorphisme près) tel que</u> F <u>soit isomorphe à</u> $X \mapsto F'(\tilde{X})$.

La catégorie $\underline{\underline{M}}_k^+$ possède un <u>produit tensoriel</u> que l'on définit par

$$(U,p) \otimes (V,q) = (U \otimes V , p \otimes q) .$$

Le foncteur contravariant $X \to \tilde{\tilde{X}}$ de $\underline{\underline{V}}_k$ dans $\underline{\underline{M}}_k^+$ est noté h . Pour $X \in \underline{\underline{V}}_k$, $h(X)$ est appelé le <u>motif</u> de X , ou la <u>cohomologie motivique</u> de X ; tout objet de $\underline{\underline{M}}_k^+$ est facteur direct d'un $h(X)$. On a :

(2) $\qquad h(X \amalg Y) = h(X) \oplus h(Y)$

(3) $\qquad h(X \times Y) = h(X) \otimes h(Y)$ $\qquad$ ("formule de Kunneth motivique").

Pour tout $X \in \underline{\underline{V}}_k$, notons $\delta_X : X \to X \times X$ le morphisme diagonal ; alors $h(\delta_X)$ est un morphisme de $\underline{\underline{M}}_k^+$

(4) $\qquad h(X) \otimes h(X) \to h(X)$ $\qquad$ ("structure multiplicative du motif $h(X)$ ").

On note $h(\operatorname{Spec} k) = \underline{\underline{1}}$; on a $Hom(\underline{\underline{1}},\underline{\underline{1}}) = C^0(\operatorname{Spec} h \times \operatorname{Spec} h) = \underline{\underline{Q}}$. Pour tout motif effectif M , on a canoniquement

(5) $\qquad \underline{\underline{1}} \otimes M = M$.

n° 4. La catégorie $\underline{\underline{M}}_k$ des motifs.

Soit $X \in V_k$, *irréductible* et de dimension n. Notons e_X l'élément de $C^n(X)$ tel que $\langle e_X \rangle = 1$ (par exemple, si X possède un point rationnel x, e_X est la classe de $\{x\}$). Les éléments

(6) $$p_X = \pi_1^*(e_X) \quad , \quad q_X = \pi_2^*(e_X)$$

de $C^n(X \times X) = \mathrm{Hom}(h(X)\,,\,h(X))$ sont des projecteurs ; on vérifie aussitôt que $(\overline{X}, p_X) = \mathrm{Im}(p_X : h(X) \to h(X))$ s'identifie canoniquement à $\underline{\underline{1}}$.

Par exemple, si X est la droite projective $\underline{\underline{P}}_1$, on a $\widetilde{\mathrm{Id}}_X = p_X + q_X$ dans $\mathrm{Hom}(h(X)\,,\,h(X))$, donc

(7) $$h(\underline{\underline{P}}_1) = \underline{\underline{1}} \oplus L$$

où $L = (\underline{\underline{P}}_1\,,\,q_{\underline{\underline{P}}_1}) = \mathrm{Ker}(p_{\underline{\underline{P}}_1} : h(\underline{\underline{P}}_1) \to h(\underline{\underline{P}}_1))$.

On démontre facilement ([3], page 492) que pour tout X comme ci-dessus, $(\overline{X}, q_X)$ s'identifie au motif $L^{\otimes n}$, de sorte qu'on a une décomposition :

(8) $$h(X) = \underline{\underline{1}} \oplus h^+(X) \oplus L^{\otimes n} ,$$

où $h^+(X) = \mathrm{Im}\ p_X^+$ avec $p_X^+ = \widetilde{\mathrm{Id}}_X - p_X - q_X$. Par exemple, on a

(9) $$h(\underline{\underline{P}}_n) = \underline{\underline{1}} \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus L^{\otimes n} ,$$

avec la structure multiplicative évidente déduite des isomorphismes canoniques $L^{\otimes r} \otimes L^{\otimes s} = L^{\otimes(r+s)}$ ("cohomologie motivique de l'espace projectif").

PROPOSITION 2.- *Le foncteur* $M \mapsto M \otimes L$, $f \mapsto f \otimes \mathrm{Id}_L$ *de la catégorie* M_k^+ *dans elle-même est pleinement fidèle* : *si* $M, N \in \underline{\underline{M}}_k^+$, *l'application* $f \mapsto f \otimes \mathrm{Id}_L$ *de* $\mathrm{Hom}(M,N)$ *dans* $\mathrm{Hom}(M \otimes L\,,\,N \otimes L)$ *est bijective*.

Il suffit de faire la démonstration lorsque $M = h(X)$, $N = h(Y)$ où $X, Y \in \underline{\underline{V}}_k$. On a alors

$$h(X \times \underline{\underline{P}}_1) = h(X) \otimes h(\underline{\underline{P}}_1) = M \oplus (M \otimes L) ,$$

$$h(Y \times \underline{\underline{P}}_1) = h(Y) \otimes h(\underline{\underline{P}}_1) = N \oplus (N \otimes L) ,$$

et l'assertion à démontrer résulte facilement de la définition de $\underline{\underline{M}}_k^+$ et des assertions connues :

(10) $$C(X \times Y \times \underline{\underline{P}}_1 \times \underline{\underline{P}}_1) = C(X \times Y) \otimes_{\underline{\underline{Q}}} C(P_1) \otimes_{\underline{\underline{Q}}} C(P_1) ,$$

(11) $$C(P_1) = \underline{\underline{Q}} \oplus \underline{\underline{Q}} e_{\underline{\underline{P}}_1} .$$

On peut alors "rendre inversible" l'objet L de $\underline{\underline{M}}_k^+$: on définit la <u>catégorie</u> $\underline{\underline{M}}_k$ ($\underline{\underline{Q}}$-linéaire et pseudo-abélienne) <u>des motifs sur</u> k comme suit :

a) un objet de $\underline{\underline{M}}_k$ est un couple (M,m) où $M \in \underline{\underline{M}}_k^+$ et $m \in \underline{\underline{Z}}$.

b) un morphisme de (M,m) dans (N,n) est un élément de

$$\mathrm{Hom}(M \otimes L^{N-m} , N \otimes L^{N-n}) \qquad N \geq n , m$$

(les différents groupes obtenus étant identifiés grâce à la proposition 2).

c) la composition de $\underline{\underline{M}}_k$ est induite par celle de $\underline{\underline{M}}_k^+$.

La catégorie $\underline{\underline{M}}_k$ possède un produit tensoriel : on a $(M,m) \otimes (N,n) = (M \otimes N , m+n)$. On identifie $\underline{\underline{M}}_k^+$ à une sous-catégorie de $\underline{\underline{M}}_k$ par $M \mapsto (M,0)$. On note T ("<u>motif de Tate</u>") l'objet $(\underline{\underline{1}},-1)$ de $\underline{\underline{M}}_k$. On pose $T^n = (\underline{\underline{1}},-n)$, $n \in \underline{\underline{Z}}$, de sorte que l'on a des isomorphismes canoniques :

(12) $$T^o = \underline{\underline{1}} \quad , \quad T^{-1} = L \quad , \quad T^r \otimes T^s = T^{r+s} \quad \text{pour } r , s \in \underline{\underline{Z}} ,$$

(13) $$\mathrm{Hom}(T^r , T^s) = 0 \quad \text{si } r \neq s ,$$

$$\mathrm{Hom}(T^r , T^r) = \underline{\underline{Q}} .$$

Si M est un motif et $n \in \underline{\underline{Z}}$, on pose $M(n) = M \otimes T^n$ ("opération de torsion par le motif de Tate"). Par exemple, tout motif H s'écrit $(M,m) = M(m)$, où M est effectif et $m \in \underline{\underline{Z}}$.

Cette opération de torsion est reliée aux classes de cycles de la manière suivante : si X et Y sont deux objets de $\underline{\underline{V}}_k$, X étant pur de dimension n et si i , j sont deux entiers, on définit un homomorphisme

(14) $$C^{n+j-i}(X \times Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(h(X)(i) , h(Y)(j))$$

comme suit. D'après la proposition 2, on peut supposer $i , j \leq 0$; les motifs

$h(X)(i)$ et $h(Y)(j)$ sont alors effectifs. Si $z \in C^{n+j-i}(X \times Y)$, on pose $z' = \pi^*(z).\pi_1^*(e) \dots \pi_{-j}^*(e)$, où π est la projection de $X \times Y \times \underline{\underline{P}}_1^{-i} \times \underline{\underline{P}}_1^{-j}$ sur $X \times Y$, les π_α , $\alpha = 1, \dots, -j$, sont les projections du même espace sur les $-j$ derniers facteurs $\underline{\underline{P}}_1$ et où $e = e_{\underline{\underline{P}}_1}$. Alors $z' \in C^{n-i}(X \times Y \times \underline{\underline{P}}_1^{-i} \times \underline{\underline{P}}_1^{-j}) = \underline{\underline{C}}(X \times \underline{\underline{P}}_1^{-i}, Y \times \underline{\underline{P}}_1^{-j})$ et on vérifie qu'il induit bien un morphisme de $h(X) \otimes L^{\otimes(-i)}$ dans $h(Y) \otimes L^{\otimes(-j)}$. Une démonstration analogue à celle de la proposition 2 (*confer* [3], page 497) donne alors :

PROPOSITION 3.- *Si* X , $Y \in \underline{\underline{V}}_k$, X *étant pur de dimension* n , *l'homomorphisme* (14) *est bijectif.*

En particulier, on a un isomorphisme canonique

(15) $$C^j(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underline{\underline{1}}, h(Y)(j)) ,$$

et l'anneau $C(Y)$ peut se reconstituer comme l'anneau $\mathrm{Hom}(\underline{\underline{1}}, h(Y)(*)) = \bigoplus_j \mathrm{Hom}(\underline{\underline{1}}, h(Y)(j))$, la multiplication étant définie à l'aide de la structure multiplicative de $h(Y)$ et des isomorphismes (12).

On remarquera que (14) fait intervenir X et Y de manière symétrique (à des translations près sur les entiers i et j) ; on en tire sans difficultés :

PROPOSITION 4.- *Il existe un foncteur additif contravariant* $P \to P^\vee$ *de* $\underline{\underline{M}}_k$ *dans* $\underline{\underline{M}}_k$ *tel que :*

(i) *On ait des isomorphismes fonctoriels* $(P^\vee)^\vee = P$ *pour* $P \in \underline{\underline{M}}_k$, $(M \oplus N)^\vee = M^\vee \oplus N^\vee$ *et* $(M \otimes N)^\vee = M^\vee \otimes N^\vee$ *pour* M , $N \in \underline{\underline{M}}_k$, *et* $T^\vee = T^{-1}$;

(ii) *on ait des isomorphismes trifonctoriels en* M , N , $P \in \underline{\underline{M}}_k$

(16) $$\mathrm{Hom}(M \otimes P, N) = \mathrm{Hom}(M, P^\vee \otimes N) ;$$

(iii) *pour* $X \in \underline{\underline{V}}_k$, *pur de dimension* n , *on ait*

(17) $$h(X)^\vee = h(X)(n)$$ ("dualité de Poincaré motivique") .

Pour chaque motif M , on a donc un morphisme canonique $\check{M} \otimes M \to \underline{\underline{1}}$; ceci permet de définir la trace d'un endomorphisme de M : si $u \in \mathrm{Hom}(M,M)$, on considère le composé $\underline{\underline{1}} \xrightarrow{u'} \check{M} \otimes M \to \underline{\underline{1}}$, où u' est associé par dualité à u ; c'est un élément de $\underline{\underline{Q}}$ noté $\mathrm{Tr}(u)$. Par exemple, le rang de M est défini par $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_M)$.

n° 5. Motifs des courbes.

Soit $X \in \underline{\underline{V}}_k$ une courbe irréductible. On a (formule (8))

(18) $$h(X) = \underline{\underline{1}} \oplus h^+(X) \oplus T^{-1} .$$

On note $\underline{\underline{M}}_k^1$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{M}}_k$ formée des motifs qui sont facteurs directs de motifs de la forme $h^+(X_1) \oplus \ldots \oplus h^+(X_n)$, où $X_1,\ldots,X_n$ sont des courbes irréductibles de $\underline{\underline{V}}_k$.

PROPOSITION 5.- La catégorie M_k^1 est équivalente à la catégorie des "variétés abéliennes à isogénie près" (i.e. à la catégorie dont les objets sont les variétés abéliennes, le groupe des morphismes de A dans B étant $\mathrm{Hom}(A,B) \otimes_{\underline{\underline{Z}}} \underline{\underline{Q}}$).

Esquissons la démonstration ([3], pages 504-505). Soient d'abord X , $Y \in \underline{\underline{V}}_k$, X étant une courbe irréductible ; le groupe $\mathrm{Hom}(h(X), h(Y)) = C^1(X \times Y)$ s'identifie à $\mathrm{Pic}(X \times Y) \otimes \underline{\underline{Q}}$; d'après la propriété universelle de la jacobienne J_X de X , on en déduit un homomorphisme canonique

(19) $$\mathrm{Hom}(h^+(X), h^+(Y)) \to \mathrm{Mor}(Y,J_X) \otimes \underline{\underline{Q}} ,$$

où $\mathrm{Mor}(Y,J_X)$ est le groupe des k-morphismes de Y dans J_X . Prenant en particulier $Y = X$, on en déduit un élément canonique φ_X dans $\mathrm{Mor}(Y,J_X) \otimes \underline{\underline{Q}}$; celui-ci jouit de la propriété universelle suivante : pour toute variété abélienne A , l'application $u \mapsto u \circ \varphi_X$ est une bijection de $\mathrm{Hom}(J_X, A) \otimes \underline{\underline{Q}}$ sur $\mathrm{Mor}(X,A) \otimes \underline{\underline{Q}}$. Prenant alors dans (19) pour Y une courbe irréductible, et appliquant ce qui précède à Y et à

$A = J_X$, on en déduit un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(h^+(X)\,,\,h^+(Y)) \to \mathrm{Hom}(J_X\,,\,J_Y) \otimes \underline{\underline{Q}}\ ,$$

que l'on vérifie être bijectif.

On a ainsi défini une équivalence de la sous-catégorie pleine de M_k^+ formée des $h^+(X)$ sur la catégorie des "jacobiennes à isogénie près". Passant aux clôtures pseudo-abéliennes de ces deux catégories, on obtient la proposition 5.

En particulier, la catégorie $\underline{\underline{M}}_k^1$ est semi-simple, et pour tout $M \in \underline{\underline{M}}_k^1$, la $\underline{\underline{Q}}$-algèbre $\mathrm{Hom}(M,M)$ jouit des propriétés connues pour les $\underline{\underline{Q}}$-algèbres $\mathrm{Hom}(A,A) \otimes \underline{\underline{Q}}$ (A variété abélienne).

La proposition 5 montre notamment que, malgré leur analogie avec la cohomologie rationnelle, les motifs sont néanmoins susceptibles de variations continues ("modules"). Elle montre aussi que les motifs doivent être considérés comme une généralisation naturelle des variétés abéliennes, celles-ci correspondant aux motifs de degré 1 . Plus précisément, à chaque variété $X \in \underline{\underline{V}}_k$, on associe le motif $h^1(X)$ défini d'après la proposition 5 par la plus grande sous-variété abélienne de Pic_X (ou encore par la variété duale de la variété d'Albanese de X). Signalons à ce sujet que Manin a démontré que si $A \in \underline{\underline{V}}_k$ est une variété abélienne, on a un isomorphisme canonique $h(A) \simeq \Lambda^* h^1(A)$ (noter que la présence d'un produit tensoriel dans la catégorie des motifs permet d'y définir les opérations tensorielles : Λ^i ,...).

n° 6. Autres calculs de motifs.

a) Fibrés projectifs ([3], § 7). Si $P \to X$ est un fibré projectif de rang n , on a

(20) $$h(P) = h(X) \oplus h(X)(-1) \oplus \dots \oplus h(X)(-n)\ ,$$

la structure multiplicative de $h(P)$ pouvant se décrire en termes de celle de $h(X)$

et des classes caractéristiques de P .

b) <u>Eclatements</u> ([3], § 9). Si X , $Y \in \underline{\underline{V}}_k$, où Y est un sous-schéma fermé de codimension r de X , si X' est l'éclaté de X le long de Y et Y' l'image réciproque de Y , on a une suite exacte de motifs

$$0 \to h(Y)(-r) \to h(X) \oplus h(Y')(-1) \to h(X') \to 0 \;;$$

donc, d'après a) appliqué à $Y' \to Y$

$$h(X') = h(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} h(Y)(-i) \;. \tag{21}$$

La structure multiplicative de $h(X')$ se calcule en termes de celle de $h(X)$ et $h(Y)$ et des classes de Chern de degré maximum des faisceaux conormaux à Y dans X et à Y' dans X' .

c) <u>Variétés unirationnelles de dimension</u> 2 <u>ou</u> 3 ([3], page 506). Soit $X \in \underline{\underline{V}}_k$, unirationnelle et de dimension $n \leq 3$. Appliquant à une application rationnelle de degré fini de $\underline{\underline{P}}_n$ dans X le théorème de résolution d'Abhyankar [4], on construit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle u}\big\downarrow & & \\ \underline{\underline{P}}_n & & \end{array} \;,$$

où v est surjectif et de degré fini et où, <u>quitte à faire une extension finie du corps de base</u>, u se décompose en une suite d'éclatements. Alors $h(v)$ est un isomorphisme de $h(X)$ sur un facteur direct de $h(X')$, tandis que $h(X')$ se déduit de $h(X)$ par additions successives de termes T^{-1} si $n = 2$, $T^{-1} \oplus T^{-2}$ ou $h(C)(-1)$ où C est une courbe si $n = 3$ (<u>confer</u> b)). Il en résulte qu'après extension finie du corps de base, on a

$$h(X) = \underline{\underline{1}} \oplus kT^{-1} \oplus T^{-2} \;, \qquad k \in \underline{\underline{N}}, \text{ si } n = 2 \;, \tag{22}$$

$$h(X) = \underline{\underline{1}} \oplus kT^{-1} \oplus M(-1) \oplus kT^{-2} \oplus T^{-3} \;, \qquad k \in \underline{\underline{N}} \;,\; M \in \underline{\underline{M}}^1_k \;, \text{ si } n = 3 \;. \tag{23}$$

Dans le cas $n = 3$, le motif $M \in \underline{\underline{M}}_k^1$ correspond à une "variété abélienne à isogénie près" qui joue le rôle de la "troisième jacobienne" de la théorie transcendante.

n° 7. Fonction-zêta d'un motif.

Supposons k fini, à q éléments et, pour tout $X \in \underline{\underline{V}}_k$, soit $F_X : X \to X$ l'endomorphisme de Frobenius ; le nombre de points rationnels de X sur l'extension de degré s de k est

(24) $$\nu_s(X) = \langle \Delta_X . F_X^s \rangle .$$

Si p est un projecteur de $\underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{X})$, on pose

(25) $$\nu_s((X,p)) = \langle p.F_X^s \rangle = \langle \Delta_X.(p \circ F_X^s) \rangle .$$

On a

(26) $$\nu_s(\underline{\underline{1}}) = 1 , \qquad \nu_s(L) = q^s .$$

Enfin, si $M = (X,p) \otimes T^n$ est un motif quelconque, on pose

(27) $$\nu_s(M) = \nu_s((X,p))/q^{ns} .$$

On a alors

(28) $$\nu_s(M \oplus N) = \nu_s(M) + \nu_s(N) ,$$

(29) $$\nu_s(M \otimes N) = \nu_s(M) . \nu_s(N) ,$$

(30) $$\nu_s(M(n)) = \nu_s(M)q^{-ns} .$$

La fonction-zêta du motif M est la série formelle $Z(M,t) \in \underline{\underline{Q}}[[t]]$ telle que

(31) $$\operatorname{Log} Z(M,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu_s(M)t^s/s .$$

On a donc

(32) $$Z(M \oplus N , t) = Z(M,t)\, Z(N,t) ,$$

(33) $$Z(M(n) , t) = Z(M , tq^{-n}) ,$$

(34) $$Z(\underline{\underline{1}} , t) = \frac{1}{1 - t} .$$

PROPOSITION 6.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}_k^1$. Soit g la dimension de la "variété abélienne à isogénie près" associée à M (prop. 5). Alors $Z(M,t)$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré $2g$, et dont les racines sont de module $q^{-\frac{1}{2}}$.

Ce n'est qu'une reformulation d'un résultat classique d'A. Weil [5].

Par exemple, si X est une courbe irréductible de genre g , on a

$$(35) \qquad Z(M,t) = \frac{\prod_{i=1}^{2g} (1 - \omega_i t)}{(1-t)(1-qt)} \qquad |\omega_i| = q^{\frac{1}{2}} \text{, d'après (18) ;}$$

si X est unirationnelle de dimension 2 , on a

$$(36) \qquad Z(M,t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)^k(1-q^2t)} \; , \qquad k \in \underline{\underline{N}} \text{, d'après (22) ;}$$

si X est unirationnelle de dimension 3 , on a

$$(37) \qquad Z(M,t) = \frac{\prod_{i=1}^{N} (1 - q\omega_i t)}{(1-t)(1-qt)^k(1-q^2t)^k(1-q^3t)} \; , \; k \in \underline{\underline{N}} \; , \; |\omega_i| = q^{\frac{1}{2}} \text{ d'après (23) .}$$

n° 8. Théories de la cohomologie et motifs.

Remarquons que les développements des n° 1 à 4 et 7 auraient pu se faire de la même manière si, au lieu de partir de la catégorie $\underline{\underline{V}}_k$ de tous les schémas projectifs lisses, on avait pris une sous-catégorie pleine $\underline{\underline{\widetilde{V}}}_k$ de cette dernière, stable par produit fibré et somme disjointe et contenant la droite projective. La sous-catégorie de $\underline{\underline{M}}_k$ obtenue est notée $\underline{\underline{\widetilde{M}}}_k$. Dans ce n°, nous nous plaçons dans ce nouveau contexte.

Soient K un corps de caractéristique 0 et $\underline{\underline{A}}_K$ la catégorie des K-algèbres de dimension finie, graduées et anticommutatives. Une théorie de la cohomologie à coefficients dans K est la donnée :

1) d'un foncteur contravariant $(X \mapsto H^*(X) \, , \, \varphi \mapsto \varphi^*)$ de $\underline{\underline{\widetilde{V}}}_k$ dans $\underline{\underline{A}}_K$,

2) pour tout $X \in \underline{\underline{V}}_k$, d'un homomorphisme de groupes $\gamma_X : Z(X) \to H^*(X)$ tel que γ_X envoie $Z^r(X)$ dans $H^{2r}(X)$ pour $r \in \underline{\underline{Z}}$, que $\gamma_X(xy) = \gamma_X(x)\gamma_X(y)$ dès que xy est défini, et que, pour tout morphisme $\varphi : X \to Y$ de $\underline{\underline{V}}_k$, on ait $\gamma_X(\varphi^*(y)) = \varphi^*(\gamma_Y(y))$ dès que $\varphi^*(y)$ est défini ;

ces données satisfaisant aux <u>axiomes</u> suivants :

(C1) <u>Si</u> $X , Y \in \tilde{\underline{\underline{V}}}_k$, <u>les homomorphismes canoniques</u>

(38) $$H^*(X \amalg Y) \to H^*(X) \oplus H^*(Y) ,$$

(39) $$H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \to H^*(X \times Y) ,$$

<u>sont bijectifs</u>.

(C2) <u>Si</u> $X \in \tilde{\underline{\underline{V}}}_k$ <u>est irréductible et de dimension</u> n , <u>alors</u>

a) $H^i(X) = 0$ <u>pour</u> $i \notin [0,2n]$;

b) <u>il existe un élément</u> $u_X \in H^{2n}(X)$ (<u>nécessairement unique</u>), <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $x \in Z^n(X)$, <u>on ait</u> $\gamma_X(x) = \langle x \rangle u_X$;

c) $H^{2n}(X)$ <u>est un</u> K-<u>espace vectoriel de dimension</u> 1 <u>et de base</u> u_X ;

d) <u>pour tout</u> i , <u>l'accouplement</u>

$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \to H^{2n}(X) \simeq K$$

<u>met</u> $H^i(X)$ <u>et</u> $H^{2n-i}(X)$ <u>en dualité</u>.

Pour tout morphisme $\varphi : X \to Y$ de $\tilde{\underline{\underline{V}}}_k$, on définit alors un homomorphisme de K-espaces vectoriels ("homomorphisme de Gysin")

(40) $$\varphi_* : H^*(X) \to H^*(Y)$$

de la manière suivante : décomposant X et Y en composantes irréductibles, on peut supposer X irréductible de dimension n , Y irréductible de dimension m ; pour $x \in H^i(X)$, on définit $\varphi_*(x) \in H^{i+2(m-n)}(X)$ par $(\varphi_*(x)y)/u_Y = (x\varphi^*(y))/u_X$ pour tout $y \in H^{2m-i}(Y)$. On a aussitôt

(41) $\varphi_*(\gamma_X(x)) = \gamma_Y(\varphi_*(x))$ si $x \in Z(X)$ et si $\varphi_*(x)$ est défini,

(42) $\varphi_*(x\varphi^*(y)) = \varphi_*(x)y$, $x \in H^*(X)$, $y \in H^*(Y)$,

et $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ pour tout morphisme $\psi : Y \to Z$ de $\underline{\underline{\tilde{V}}}_k$.

<u>Nous supposons en outre que les trois conditions</u> (C3), (C4), (C5) <u>ci-dessous sont satisfaites</u> :

(C3) <u>On a</u> $H^1(\underline{\underline{P}}_1) = 0$.

D'après (C2), on a donc $H^*(\underline{\underline{P}}_1) = K \oplus Ku_{\underline{\underline{P}}_1}$.

(C4) <u>Soient</u> $X \in \underline{\underline{\tilde{V}}}_k$ <u>et</u> x , $y \in Z(X)$. <u>Si</u> x <u>et</u> y <u>sont numériquement équivalents, on a</u> $\gamma_X(x) = \gamma_X(y)$.

Pour chaque $X \in \underline{\underline{\tilde{V}}}_k$, l'homomorphisme $\gamma_X : Z(X) \to H^*(X)$ induit alors un homomorphisme de $\underline{\underline{Q}}$-algèbres

(43) $\bar{\gamma}_X : C(X) \to H^*(X)$;

qui est <u>injectif</u> : si en effet X est irréductible de dimension n , et si $x \in Z^r(X)$ est tel que $\gamma_X(x) = 0$, alors, pour tout $y \in Z^{n-r}(X)$ tel que xy soit défini, on a $\langle xy\rangle u_X = \gamma_X(xy) = \gamma_X(x)\gamma_X(y) = 0$, donc $\langle xy\rangle = 0$ et X est numériquement équivalent à 0 .

Si $\varphi : X \to Y$ est un morphisme de $\underline{\underline{\tilde{V}}}_k$, on a alors

(44) $\bar{\gamma}_X \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \bar{\gamma}_Y$, $\varphi_* \circ \bar{\gamma}_X = \bar{\gamma}_Y \circ \varphi_*$.

(C5) <u>Soit</u> $X \in \underline{\underline{\tilde{V}}}_k$, <u>irréductible de dimension</u> n <u>et soit</u> $\Delta_X \in C(X \times X)$ <u>la classe de la diagonale de</u> $X \times X$. <u>Il existe</u> $p_i \in C(X \times X)$, $i = 0,\ldots,2n$, <u>tels que, si l'on identifie</u> $H^{2n}(X \times X)$ <u>à</u> $\oplus H^{2n-i}(X) \otimes H^i(Y)$, <u>on ait</u>

(45) $\Delta_X = \sum_{i=0}^{2n} p_i$, $p_i \in H^{2n-i}(X) \otimes H^i(X)$.

En d'autres termes, les composantes de $\bar{\gamma}_{X \times X}(\Delta_X)$ sur les différents facteurs de $H^{2n}(X \times X)$ doivent appartenir à l'image de $\bar{\gamma}_{X \times X}$.

Le foncteur $H^* : (\widetilde{\underline{\underline{V}}}_k)^o \to \underline{\underline{A}}_K$ se prolonge alors en un foncteur additif $\widetilde{\underline{\underline{CV}}}_k \to \underline{\underline{A}}_K$ de la manière suivante : si $X , Y \in \widetilde{\underline{\underline{V}}}_k$, X étant pur de dimension n , et si $f \in \underline{\underline{C}}(\bar{X},\bar{Y}) = C^n(X \times Y)$, on définit $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ par

(46) $$f^*(x) = (\pi_Y)_*(\bar{\gamma}_{X\times Y}(f).\pi_X^*(x)) ,$$

où π_X et π_Y sont les projections canoniques de $X\times Y$ sur X et Y . D'après la proposition 1, le foncteur additif ainsi obtenu se prolonge en un foncteur additif de $\widetilde{\underline{\underline{M}}}_k^+$ dans $\underline{\underline{A}}_K$ noté $M \mapsto H^\bullet(M)$, et tel que

(47) $$H^*(X) = H^\bullet(h(X)) , \qquad X \in \widetilde{\underline{\underline{V}}}_k$$

(48) $$H^\bullet(M \otimes N) = H^\bullet(M) \otimes_K H^\bullet(N) , \qquad M , N \in \widetilde{\underline{\underline{M}}}_k^+ .$$

En particulier, d'après (C3), on a

(49) $$H^\bullet(L) = H^2(L) = H^2(\underline{\underline{P}}_1) = K.u_{\underline{\underline{P}}_1} ;$$

on en conclut que $H^\bullet$ se prolonge en un foncteur additif de $\widetilde{\underline{\underline{M}}}_k$ dans $\underline{\underline{A}}_K$, encore noté $H^\bullet$, satisfaisant à (48) pour $M , N \in \widetilde{\underline{\underline{M}}}_k$, et tel que $H^\bullet(T) = H^{-2}(T)$ soit le K-espace vectoriel dual de $H^2(\underline{\underline{P}}_1)$. Pour $M \in \widetilde{\underline{\underline{M}}}_k$ et $n \in \underline{\underline{Z}}$, on a

(50) $$H^i(M(n)) = H^{i+2n}(M) \otimes H^{-2}(T)^{\otimes n} .$$

PROPOSITION 7.- <u>Le foncteur</u> $H^\bullet : \widetilde{\underline{\underline{M}}}_k \to \underline{\underline{A}}_K$ <u>est fidèle</u>.

Il s'agit de prouver que, si $M , N \in \widetilde{\underline{\underline{M}}}_k$, l'application canonique

(51) $$\mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}_K(H^\bullet(M) , H^\bullet(N))$$

est injective. Or on peut supposer que $M = N = h(X)$, où $X \in \widetilde{\underline{\underline{V}}}_k$ est irréductible. On a alors des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_K(H^\bullet(M) , H^\bullet(N)) = \mathrm{Hom}_K(H^*(X) , H^*(X)) = H^*(X) \otimes_K H^*(X) = H^*(X \times X)$$

et (51) s'identifie à l'injection composée

$$\mathrm{Hom}(M,N) \hookrightarrow C(X \times X) \xhookrightarrow{\bar{\gamma}_X} H^*(X \times X) .$$

Par exemple, dans les conditions de (C5), p_i est l'unique élément de $\mathrm{Hom}(h(X) , h(X))$ tel que $H^\bullet(p_i)$ soit le projecteur de $H^*(X)$ d'image $H^i(X)$. On en déduit que, si on pose $h^i(X) = (\bar{X}, p_i) = \mathrm{Im}(p_i : h(X) \to h(X))$, on a

(52) $$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2n} h^i(X) \quad , \quad h^o(X) = \underline{\underline{1}} \quad , \quad h^{2n}(X) = T^{-n} \; ,$$

(53) $$H^{\bullet}(h^i(X)) = H^i(X) \; .$$

On en conclut que tout motif M de $\underline{\underline{\tilde{M}}}_k$ s'écrit

(54) $$M = \bigoplus_{n \in \underline{\underline{Z}}} M^n$$

avec $H^{\bullet}(M^n) = H^n(M)$. On pose $h(X) = \oplus\, h^n(X)$ pour $X \in \underline{\underline{\tilde{V}}}_k$.

Il convient ici de faire quelques commentaires.

1) On espère que les p_i, et donc la graduation de la catégorie $\underline{\underline{\tilde{M}}}_k$, sont indépendants de la théorie de la cohomologie choisie ; cela résulterait des "conjectures standard" (cf. [2], lemma 3.15).

2) Soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique p de k. Prenons pour H^* la cohomologie ℓ-adique :

$$K = \underline{\underline{Q}}_{\ell} \quad , \quad H^*(X) = H^*(X \otimes_k \bar{k} \, , \underline{\underline{Z}}_{\ell}) \otimes_{\underline{\underline{Z}}_{\ell}} \underline{\underline{Q}}_{\ell} \; .$$

Les conditions (C1), (C2), (C3) sont satisfaites. On ne sait rien pour l'instant sur (C4) et (C5) en général. Ces conditions (pour $\underline{\underline{\tilde{V}}}_k = \underline{\underline{V}}_k$) sont deux des <u>conjectures-standard</u> (voir [2]) ; lorsque $p = 0$, (C5) est une conséquence de la conjecture de Hodge.

3) On peut cependant prendre d'ores et déjà pour $\underline{\underline{\tilde{V}}}_k$ la plus petite sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{V}}_k$, stable par produits fibrés, sommes disjointes et sections hyperplanes, et contenant les variétés abéliennes et les variétés à décomposition cellulaire (par exemple, quotients de groupes affines par des sous-groupes paraboliques, en particulier grassmanniennes, espaces projectifs,... - plus généralement les variétés satisfaisant au théorème de Lefschetz fort et dont toute la cohomologie est algébrique).

n° 9. Théories de la cohomologie et fonctions-zêta.

Gardons les notations et hypothèses du n° précédent.

PROPOSITION 8.- Soit $X \in \widetilde{\underline{\underline{V}}}_k$ irréductible de dimension n, et soit $f \in \mathrm{Hom}(h(X), h(X)) \subset C(X \times X)$. Pour chaque i, soit $f_i : H^i(X) \to H^i(X)$ l'homomorphisme $H^i(f)$. Alors

(i) On a

(55) $$\langle p_i . f \rangle = (-1)^i \mathrm{Tr}(f_i) ,$$

(56) $$\langle \Delta_X . f \rangle = \Sigma (-1)^i \mathrm{Tr}(f_i) .$$

(ii) On a $\det(1 - f_i t) \in \underline{\underline{Q}}[t]$ et même $\det(1 - f_i t) \in \underline{\underline{Z}}[t]$ si f provient d'un élément de $Z(X \times X)$.

Démontrons (i). Soit $a = \bar{\gamma}_{X \times X}(f) \in H^{2n}(X \times X)$. Par définition, on a $f_i(x) = (\pi_1)_*(a\pi_2^*(x))$ pour $x \in H^i(X)$, où π_1 et π_2 sont les projections de $X \times X$ sur ses facteurs. D'autre part, on a $\langle p_i . f \rangle = (\bar{\gamma}_{X \times X}(p_i).a)/u_{X \times X}$, de sorte que la formule à démontrer s'écrit aussi

(57) $$(\bar{\gamma}_{X \times X}(p_i).a)/u_{X \times X} = \mathrm{Tr}(x \mapsto (\pi_1)_*(\pi_2^*(x).a)) .$$

Cette relation est linéaire en a, et on voit aussitôt que les deux membres ne dépendent que de la projection de a sur $H^i(X) \otimes H^{2n-i}(Y)$. On peut donc supposer $a = b \otimes c$, $b \in H^i(X)$, $c \in H^{2n-i}(Y)$. Alors

$$(\pi_1)_*(\pi_2^*(x).a) = (\pi_1)_*(b \otimes cx) = b.(cx)/u_X ,$$

de sorte que le second membre de (57) est égal à $(bc)/u_X$. D'autre part, par définition des p_i, on a $\bar{\gamma}_{X \times X}(p_i).(b \otimes c) = \bar{\gamma}_{X \times X}(\Delta_X)(b \otimes c) = \delta^*(1)(b \otimes c)$ où $\delta : X \to X \times X$ est le morphisme diagonal. Le premier membre de (57) vaut donc $\delta_*(1)(b \otimes c)/u_{X \times X} \doteq \delta^*(b \otimes c)/u_X = (bc)/u_X$, ce qui achève la démonstration de (55). On en déduit trivialement (56).

Démontrons (ii). D'après (i), on a

$$\langle p_i.(f \circ \ldots \circ f)\rangle \;=\; (-1)^i \operatorname{Tr}(f_i \circ \ldots \circ f_i) ,$$

donc $\operatorname{Tr}(f_i^s) \in \underline{\underline{Q}}$; d'après les formules de Newton, les coefficients de $\det(1 - f_i t)$ appartiennent donc à $\underline{\underline{Q}}$. Si de plus f est à coefficients entiers, il existe $a \in \underline{\underline{N}}$, $a \neq 0$, tel que ap_i soit à coefficients entiers, donc

$$\operatorname{Tr}(af_i^s) \;=\; \langle ap_i.(f \circ \ldots \circ f)\rangle \;\in\; \underline{\underline{Z}} .$$

D'après un lemme facile, il s'ensuit que les coefficients de $\det(1 - f_i t)$ sont entiers.

COROLLAIRE.- Supposons k fini à q éléments, et soit $X \in \underline{\underline{\widetilde{V}}}_k$; pour chaque $i \in \underline{\underline{Z}}$, il existe $P_i \in \underline{\underline{Z}}[t]$ tel que $P_i(0) = 1$ et

(58) $$Z(h^i(X) , t) \;=\; P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

donc

(59) $$Z(X,t) \;=\; \frac{P_1(t)\ P_3(t)\ \ldots}{P_o(t)\ P_2(t)\ \ldots} .$$

Supposons d'abord X irréductible de dimension n et soit $i \in \underline{\underline{Z}}$. On a pour tout s

$$\nu_s(h^i(X)) \;=\; \langle p_i . F_X^s\rangle \;=\; (-1)^i \operatorname{Tr}((F_i)^s) ,$$

donc

$$\log Z(h^i(X) , t) \;=\; (-1)^i \sum_s \operatorname{Tr}((F_i)^s)t^s/s \;=$$

$$(-1)^{i+1} \operatorname{Tr} \log(1 - f_i t) \;=\; (-1)^{i+1} \log \det(1 - f_i t) ,$$

d'où (58), puis (59). On en déduit aussitôt le cas général.

Nous renvoyons à [2] pour l'étude de celles des "conjectures standard" dont on peut tirer que les racines de P_i sont de module $q^{-i/2}$, ainsi que pour la démonstration de l'équation fonctionnelle de $Z(X,t)$, $X \in \underline{\underline{V}}_k$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK - Exposés à l'I.H.E.S., 1967 (non publié).

[2] S. KLEIMAN - Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Masson-North-Holland, 1968, p. 359-386.

[3] Y. MANIN - Correspondances, Motifs et Transformations monoïdales (en russe), Matematičeski Sbornik, T. 77 (119), n° 4, p. 475-507.

[4] S. ABHYANKAR - Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, 1966.

[5] A. WEIL - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, 1948.