MARCEL BERGER

Le théorème de Gromoll-Meyer sur les géodésiques fermées

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 364, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__1_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 364 Novembre 1969

LE THÉORÈME DE GROMOLL-MEYER SUR LES GÉODÉSIQUES FERMÉES

par Marcel BERGER

Conventions. Variété (tout court) veut dire variété C^{∞} de dimension finie (les variétés de dimension infinie intervenant seront nommées variétés hilbertiennes : n° 4). Dans les n^{os} 2, 5, 7, 10 et sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés sont supposées SIMPLEMENT CONNEXES. Toutes les homologies seront à coefficients dans un corps de caractéristique zéro, à cela près quelconque. La bibliographie a été restreinte ; sinon, voir celle de [2].

-:-

Soit M une variété ; on notera $\Omega(M) = C^{0}(S^{1} ; M)$ l'espace topologique de ses lacets sans point base (espace des applications continues du cercle S^{1} dans M). Si M est simplement connexe et compacte, alors les nombres de Betti $b_{k}(\Omega(M))$ de $\Omega(M)$ sont tous finis ; en effet ([6], p. 483), les nombres de Betti de $\Omega_{\cdot}(M)$, l'espace des lacets à point base de M , sont d'abord tous finis. Puis il en est de même de ceux de $\Omega(M)$, d'après [6], p. 465, appliqué à la fibration $\Omega_{\cdot}(M) \to \Omega(M) \to M$. Pour une telle variété M , on dira que "les nombres de Betti de $\Omega(M)$ ne sont pas bornés si $\forall\, r \in R\ \exists\, k$ tel que $b_{k}(\Omega(M)) > r$ ". Le résultat de Gromoll-Meyer est le suivant :

THÉORÈME 0.1 ([2]).- Soit M une variété compacte, simplement connexe et supposons que les nombres de Betti de $\Omega(M)$ ne soient pas bornés. Alors, quelle que soit la structure riemannienne g sur M , la variété riemannienne (M,g) possède une infinité de géodésiques périodiques géométriquement distinctes.

-:-

1. Géodésiques périodiques.

Soit (M,g) une variété riemannienne (v.r.) quelconque ; par définition g est une forme différentielle bilinéaire symétrique définie positive sur M . On écrira $g(x,x) = |x|^{2}$. La longueur d'une courbe $c : [0,1] \to M$ est $\mathrm{long}(c) = \int_0^1 |\dot{c}(t)|^{2}dt$, où $\dot{c}$ désigne le champ de vitesses de c . La fonction

$d(p,q) = \inf_{c \text{ courbe de } p \text{ à } q} \mathrm{long}(c)$ est une distance sur M , compatible avec la topologie de variété de M . Les géodésiques de (M,g) sont les courbes qui, localement, réalisent cette distance et sont paramétrées à $|\dot{c}|$ constant ; $\forall\, x \in TM$ $\exists\, \varepsilon > 0$ et une géodésique unique $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ telle que $\dot{c}(0) = x$. Dans tout cet exposé on supposera (M,g) *complète* pour la distance d ; alors les géodésiques sont indéfiniment prolongeables, i.e. $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique $c : R \to M$ telle que $\dot{c}(0) = x$ (mais, bien sûr, en général c ne réalise la distance que sur des intervalles assez petits). L'application exponentielle $\exp : TM \to M$ est $x \mapsto \exp(x) = c(1)$ où c est la géodésique telle que $\dot{c}(0) = x$.

Si $c : [0,1] \to M$ est une géodésique telle que $\dot{c}(0) = \dot{c}(1)$, alors elle se prolonge en une géodésique $c : R \to M$ périodique : $\forall\, t$: $c(t+1) = c(t)$.

DÉFINITION 1.1.- *Une géodésique* $c : [0,1] \to M$ *est dite* périodique *si* c *n'est pas constante et si* $\dot{c}(0) = \dot{c}(1)$. *Notation* : g.p. .

Remarque.- On exclut donc les lacets géodésiques : 

mais par contre permet les points multiples : 

Exemple 1.2.- Pour leur structure riemannienne canonique, la sphère S^n , le projectif complexe $P^n(C)$, le projectif quaternionien $P^n(H)$, le plan projectif des octaves de Cayley $P^2(Ca)$, ont *toutes* leurs géodésiques périodiques.

DÉFINITION 1.3.- *Soient* $m \in N^+$ *et* $c : [0,1] \to M$ *une* g.p. . *Alors* la $m^{\text{ème}}$-itérée *de* c , c_m , *est la* g.p. $c_m : [0,1] \ni t \mapsto c_m(t) = c(mt) \in M$.

En tant qu'applications : $c \neq c_m$ $(m>1)$, mais les images $c([0,1])$, $c_m([0,1])$ sont confondues. D'où la :

DÉFINITION 1.4.- *Des* g.p. $c^1,\dots,c^s$ *sont dites* géométriquement distinctes *si les images* $c^1([0,1]),\dots,c^s([0,1])$ *sont des sous-ensembles distincts de* M . *Notation* : g.p.g.d. .

2. Historique et utilisation du théorème 0.1.

Le premier problème qui s'est posé historiquement est celui de l'existence d'au moins une g.p. sur une v.r. donnée. Pour sa structure riemannienne canonique, l'espace euclidien R^n n'en a aucune ; un résultat folklorique ancien est que si M n'est pas simplement connexe mais compacte, elle admet une g.p. dans toute classe d'homotopie libre non nulle de M (à savoir toute composante connexe non triviale de $\Omega(M)$) ; on l'obtient en réalisant effectivement la borne inférieure de la longueur des courbes de cette composante connexe. Mais ceci laissait ouvert la question pour les variétés compactes simplement connexes. En 1905 Poincaré démontrait cette existence pour (S^2,g) où la structure riemannienne g est analytique réelle. Il fallut attendre jusqu'en 1952 Fet-Lusternik pour démontrer cette existence pour une variété compacte quelconque.

Pour les variétés compactes, on a cherché ensuite à s'assurer de l'existence de plusieurs g.p.g.d. $(2,3,\dots)$. Mentionnons des travaux de Lusternik, Schnirelman, Morse, Fet, Alber, Klingenberg. La question qui nous intéresse est celle de l'existence pour toute variété riemannienne compacte, d'une infinité de g.p.g.d. . Actuellement, on ne connait aucune variété riemannienne dont on ait pu démontrer qu'elle n'a qu'un nombre fini de g.p.g.d. (variété compacte de dimension ≥ 2).

Dans quelle mesure le théorème 0.1 est utile n'est pas encore connu parce que les $b_k(\Omega(M))$ sont peu connus ; les seuls résultats vraiment généraux sont :

THÉORÈME 2.1 (P. Klein).- *Les nombres de Betti de* $\Omega(M)$ *ne sont pas bornés si* :

a) $M = P \times Q$ *est un produit de deux variétés compactes* ;

b) *le plus petit* $k > 0$ *tel que* $b_k(M) \neq 0$ *est impair et* ≥ 3 (M *compacte*).

En fait, on ne connait pas d'autres M compactes pour lesquelles les $b_k(\Omega(M))$ sont bornés que les S^n , $P^n(C)$, $P^n(H)$, $P^2(Ca)$. Par ailleurs, l'exemple 1.2 montre que ces variétés ont une bonne infinité de g.p.g.d., mais seulement pour leur structure riemannienne canonique ; même pour des structures riemanniennes voisines de la canonique, on ne sait rien.

3. Plan de l'exposé.

La démonstration du théorème 0.1 étant longue et très technique, au lieu d'une démonstration en forme (pour laquelle on renvoie à [2], [3]), on va faire un exposé introductif à ces articles ; on rappellera d'abord la démonstration de l'existence d'une infinité de géodésiques joignant deux points p , q quelconques d'une variété riemannienne non contractile et d'abord dans le cas non-dégénéré. Puis on exposera l'architecture de la démonstration du théorème 0.1, en s'attachant à montrer les obstacles que l'on rencontre pour passer du cas des géodésiques de p à q au cas des g.p., puis pour passer du cas non-dégénéré au cas dégénéré.

4. Théorie de Morse pour les variétés hilbertiennes, cas non-dégénéré.

Soit V une variété hilbertienne, c'est-à-dire une variété C^∞ modelée sur un espace de Hilbert et munie d'une structure hilbertienne et soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction sur V ; on supposera toujours V complète. Un point critique p de f est $p \in V$ tel que $df_p = 0$; une valeur critique est $r \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe p critique avec $f(p) = r$. A un point critique p on attache la hessienne $\mathrm{Hess}_p f$ de f en p , forme bilinéaire symétrique sur T_pV . Si par exemple s est une courbe de V telle que $\dot{s}(0) = x$, on a

$$(4.1) \qquad \mathrm{Hess}_p f(x,x) = \frac{d^2(f \circ s)}{dt^2}(0) .$$

L'index du point critique p est l'index de $\mathrm{Hess}_p f$, c'est-à-dire la dimension maxima (éventuellement infinie) d'un sous-espace vectoriel de T_pV où la restriction de $\mathrm{Hess}_p f$ est définie négative. La nullité de p est la dimension de

$\mathrm{Hess}_p f^{-1}(0) = \{x \mid \forall\, y : \mathrm{Hess}_p f(x,y) = 0\}$. Le point critique p est dit <u>non dégénéré</u> si nullité$(p) = 0$ (un tel point critique est toujours isolé). On ne peut travailler plaisamment qu'avec les f vérifiant la condition de compacité suivante (condition (C)) :

CONDITION 4.2.- <u>Soit</u> $S \subset V$ <u>tel que</u> :

a) f <u>est bornée sur</u> S ;

b) 0 <u>est adhérent à</u> $\{|df_v| , v \in S\}$.

<u>Alors il existe un point critique de</u> f <u>adhérent à</u> S .

On pose, pour $\alpha \in R$: $V^{\alpha} = \{v \in V : f(v) \leq \alpha\}$.

THÉORÈME 4.3 ([5], p. 338).- <u>Soient</u> V <u>une variété hilbertienne et</u> f <u>une fonction sur</u> V , <u>vérifiant</u> 4.2, <u>n'ayant que des points critiques non-dégénérés et soient</u> α , β <u>deux valeurs non critiques</u>. <u>Alors, si</u> $a(k)$ <u>désigne le nombre de points critiques d'index</u> k <u>et de valeur</u> $\in [\alpha,\beta]$, <u>on a</u> $\forall\, k : b_k(V^{\beta},V^{\alpha}) \leq a(k)$.

<u>Remarques</u> 4.4.- On a $a(k) < \infty$ d'après 4.2. On ne doit pas être surpris de ne pas voir apparaître les points critiques d'index infini ; ils comptent en effet homologiquement pour du beurre, parce que dans l'espace de Hilbert l'homologie du disque, modulo sa frontière, est nulle. Le théorème 4.3 se démontre en deux temps : dans le premier, on montre que "passer" un point critique p peut se faire en attachant une anse de type index(p) ; dans le second on utilise le fait que la fonction $b_k(V^{\beta},V^{\alpha})$ est sous-additive.

On peut généraliser le théorème 4.3 au cas des sous-variétés critiques non dégénérées :

DÉFINITION 4.5.- <u>Une sous-variété connexe</u> W <u>de</u> V <u>est dite</u> critique non dégénérée <u>si</u> :

a) $\forall\, p \in W$, p <u>est un point critique</u> ;

b) $\forall\, p \in W \ \exists\, E_p \subset T_pV$ <u>sous-espace fermé tel que</u> $T_pV = E_p \oplus T_pW$ <u>et que la restriction de</u> $\mathrm{Hess}_p f$ <u>à</u> E_p <u>est non dégénérée</u>.

<u>L'index de cette restriction est appelé</u> l'index de W .

On montre que "passer" une sous-variété critique W correspond à attacher un fibré de type $(\dim W, \mathrm{index}(W))$, d'où le :

THÉORÈME 4.6 ([4], p. 65).- Soient α, β des valeurs non critiques d'une f vérifiant 4.2 et dont les seuls points critiques de valeurs $\in [\alpha,\beta]$ constituent des sous-variétés critiques non dégénérées W_i d'index k_i. Alors : $\forall k$:

$$b_k(V^\beta, V^\alpha) \leq \sum_i b_{k-k_i}(W_i) .$$

5. Les géodésiques de p à q ; cas non dégénéré.

Soient (M,g) une v.r. et p, $q \in M$ (distincts ou non). On cherche les géodésiques de p à q parmi $\Omega_{p,q}(M) = \{c \in C^0([0,1];M) : c(0) = p , c(1) = q\}$. L'idée de base est que les géodésiques sont les points critiques de la fonction longueur sur $\Omega_{p,q}(M)$. Plus précisément : soit $V = \Omega^1_{p,q}(M)$ l'espace de toutes les applications $c : [0,1] \to M$ absolument continues et telles que $\dot{c}$ est de carré sommable. Plaisamment V est une variété hilbertienne ; les vecteurs tangents X à V en c sont les champs de vecteurs le long de c, s'annulant en p et q, absolument continus et de dérivée X' de carré sommable (la dérivée de X, champ de vecteurs le long de c, est $X' = D_{\dot{c}}X$, dérivée covariante pour la connexion canonique de (M,g)).

Remarque 5.1.- Une courbe s de V, telle que $\dot{s}(0) = X \in T_cV$, n'est autre qu'une famille de courbes à un paramètre s_α, telle que $s_0 = c$ et $\frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha}(0) = X$. La structure hilbertienne de V est

(5.2) $$\langle X,Y \rangle = \int_0^1 ((X|Y) + (X'|Y'))dt .$$

La fonction *énergie* E sur V est $E : V \ni c \mapsto E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{c}(t)|^2 dt \in \mathbb{R}$. Elle est différentiable et on démontre que les géodésiques de p à q sont exactement les points critiques de V pour E (tandis que la fonction longueur, outre qu'elle n'est pas différentiable, fournirait les géodésiques reparamétrées par un difféomorphisme quelconque de $[0,1]$). On montre enfin que E vérifie la condition 4.2.

THÉORÈME 5.3.- <u>Soient</u> M <u>une variété non contractile et</u> p , q , g <u>deux points de</u> M <u>et une structure riemannienne sur</u> M <u>tels que toutes les géodésiques de</u> p <u>à</u> q <u>soient non dégénérées</u>. <u>Alors ces géodésiques sont en nombre infini</u>.

<u>Démonstration</u>. Par l'absurde : s'il n'y a qu'un nombre fini de telles géodésiques, notons α leur plus petite énergie et β leur plus grande, ainsi que k_o leur plus grand index (fini !). Le théorème 4.3 entraîne $b_k(V^\gamma, V^\alpha) = 0$ quels que soient $\gamma > \beta$ et $k > k_o$. Comme V^α est un nombre fini de points et que $V = \bigcup_\gamma V^\gamma$, on aura $b_k(V) = 0$ pour tout $k > k_o$. Maintenant on montre que $\Omega_{p,q}(M)$ et $\Omega^1_{p,q}(M)$ ont même type d'homotopie ; en particulier $b_k(\Omega_{p,q}(M)) = 0$ $\forall\, k > k_o$. On trouve alors dans [6], p. 485, la démonstration du fait que ceci implique que M est contractile.

En fait ce théorème est valable en toute généralité :

THÉORÈME 5.4 ([6], p. 484).- <u>Soit</u> M <u>une variété non contractile</u>. <u>Alors</u> $\forall\, p$, $q \in M$, $\forall\, g$ <u>structure riemannienne sur</u> M , <u>il existe pour</u> (M,g) , <u>une infinité de géodésiques de</u> p <u>à</u> q .

<u>Démonstration</u>. On peut supposer nos géodésiques isolées, en tant que points critiques de E sur V (sinon on a déjà gagné !). Il suffira alors de savoir que, pour des points critiques dégénérés, les $b_k(V^\beta, V^\alpha)$ sont nuls pour des k assez grands. Ceci est précisément le corollaire 9.3.

<u>Remarque</u>.- Dans ce théorème, il s'agit d'une infinité de géodésiques distinctes en tant qu'applications $[0,1] \to M$. Et on ne peut pas faire mieux, comme le montre l'exemple de la sphère, munie de sa structure riemannienne canonique et deux points

p , q non antipodes. Cependant, génériquement, le théorème 5.2 fournira une infinité de géodésiques de p à q géométriquement distinctes.

6. Géodésiques périodiques : premier obstacle.

Désormais M est COMPACTE. On essaie, pour les g.p., de procéder de même en posant $V = \Omega^1(M)$ = espace de toutes les applications $c : S^1 \to M$ absolument continues et de vitesse $\dot{c}$ de carré sommable. T_cV sera l'ensemble des champs de vecteurs X le long de c , absolument continus et de carré sommable ; la structure hilbertienne est définie toujours par (5.2) et la fonction énergie est $E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{c}(t)|^2 dt$. Elle vérifie toujours la condition 4.2 (parce que M est compacte) et ses points critiques sont exactement les g.p. . Le hessien d'une g.p. c se calcule avec la formule (4.1) et la remarque (5.1) : il faut calculer la dérivée seconde en 0 de l'énergie d'une famille de courbes à un paramètre. La réponse est la fameuse "formule de la variation seconde" :

$$(6.1) \qquad \mathrm{Hess}_c E(X,Y) = \int_0^1 ((X'|Y') - (R(X,\dot{c})\dot{c}|Y))dt$$

(où R est le tenseur de courbure de (M,g)).

L'obstacle est maintenant qu'une g.p. c n'est jamais un point critique non dégénéré de V pour E ; en effet le groupe $O(2)$, agissant sur S^1 , agit sur V ; de façon équivariante d'ailleurs : $E(\alpha c) = E(c)$ $\forall\, \alpha \in O(2)$. Si c est une g.p., il en sera de même de αc $\forall\, \alpha \in O(2)$.

Remarque 6.2.- Une difficulté technique est que cette action n'est pas différentiable.

Remarque 6.3.- Il est vain de passer au quotient $V/O(2)$, car il n'est pas une variété ; la cause en est les itérées d'une g.p. . Appelons simple une g.p. qui n'est l'itérée d'aucune autre ; alors si une g.p. c est égale à $c = c'_m$ avec c' simple, le groupe d'isotropie de c est exactement Z_m .

Soit c une g.p. ; elle donne naissance dans V à deux orbites connexes $O^+(2).c$ et $O^-(2).c$, qui sont des sous-variétés critiques et homéomorphes à S^1 . Pour utiliser le théorème 4.6, il faut savoir quand ces orbites sont des sous-variétés critiques non dégénérées (on dira alors par abus de langage que c elle-même est <u>non dégénérée</u>). On étudie $\mathrm{Hess}_c E$ avec la décomposition orthogonale $T_c V = R.\dot{c} \oplus N_c \oplus U_c$, où $R.\dot{c} = T_c(O(2).c)$, $N_c = \{X : \forall\ t \in [0,1] : (X(t)|\dot{c}(t)) = 0\}$, $U_c = \{a.\dot{c} : \int_0^1 a(t)dt = 0\}$. La formule (6.1) montre que $\dot{c} \in \mathrm{Hess}_c E^{-1}(0)$ (ce qu'on savait déjà) et que $\mathrm{Hess}_c E$ est défini positif sur U_c .

DÉFINITION 6.4.- <u>Pour une</u> g.p. <u>on appelle</u> index (resp. nullité) <u>l'index</u> (resp. <u>nullité</u>) <u>de</u> $\mathrm{Hess}_c E$ <u>restreint à</u> N_c .

Ainsi $O^+(2).c$ et $O^-(2).c$ sont des sous-variétés critiques non dégénérées si et seulement si c est non dégénérée.

THÉORÈME BIDON 6.5.- <u>Supposons que toutes les</u> g.p. <u>d'une</u> v.r. <u>compacte soient non dégénérées et qu'il y ait un nombre infini de</u> k <u>tels que</u> $b_k(\Omega(M)) \neq 0$. <u>Alors ces</u> g.p. <u>sont en nombre infini</u> (mod. $O(2)$) .

<u>Démonstration.</u> Grâce au théorème 4.6, on peut calquer la démonstration du théorème 5.3. Il faut seulement remarquer que maintenant la plus petite énergie est 0 et que V^o est formé des applications constantes, donc que V^o est homéomorphe à M ; mais les nombres de Betti $b_k(M)$ sont nuls pour $k > \dim M$. On aura donc encore : les $b_k(\Omega(M))$ sont nuls sauf au plus un nombre fini d'entre eux (car ici aussi $V = \Omega^1(M)$ a même type d'homotopie que $\Omega(M)$).

7. Géodésiques périodiques : deuxième obstacle.

Ce théorème est bidon, en ce sens qu'il ne fournit pas nécessairement des g.p.g.d. ; on pourrait très bien obtenir une seule g.p. et toutes ses itérées. Il faut donc se servir, dans le théorème 4.6, de l'inégalité qui y figure et étudier les $\mathrm{index}(c_m)$ en fonction de m. L'idée est : les $\mathrm{index}(c_m)$ croissant comme une progression arithmétique, il n'y a qu'un nombre borné d'itérées d'une g.p. ayant un index donné. Les $b_k(\Omega(M))$ seront donc bornés s'il n'y a qu'un nombre fini de g.p.g.d. . Précisément :

THÉORÈME 7.1.- Soit M compacte, telle que les nombres de Betti de $\Omega(M)$ ne soient pas bornés. Alors, si g est une structure riemannienne sur M dont toutes les g.p. sont non dégénérées, il existe une infinité de ces g.p. qui sont géométriquement distinctes.

Démonstration. Toujours par l'absurde. Soient c^i $(i = 1,\dots,r)$ nos g.p.g.d. (mod. $O(2)$) et simples. D'après le théorème 8.1, pour une c^i donnée, si $\mathrm{index}(c^i_{m+s}) = \mathrm{index}(c^i_m)$, on a $s \leq \frac{a}{\varepsilon}$. Soit donc K le sup des $\frac{a}{\varepsilon}$ ainsi associés aux c^i $(i = 1,\dots,r)$; chaque c^i donne donc naissance à au plus K g.p. d'index donné. Notant que $b_k(S^1) = 0$ sauf $b_0(S^1) = 1$, $b_1(S^1) = 1$, on déduit du théorème 4.6 que $\forall\, k$ et $\forall\, \alpha$ $\forall\, \beta$ non critiques : $b_k(V^\beta, V^\alpha) \leq 2rK$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 6.5, on aura donc $b_k(V) \leq 2rK$, sauf au plus un nombre fini de k. Les $b_k(\Omega(M))$ sont donc bornés, contradiction.

8. Itération des géodésiques.

Les deux résultats nécessaires sont les :

THÉORÈME 8.1 ([2]).- Soit c une g.p. . Alors : ou $\forall\, m$: $\mathrm{index}(c_m) = 0$, ou $\exists\, \varepsilon > 0$

$\exists\ a > 0$ <u>tels que</u> $\forall\ m \in N^+\ \forall\ s \in N^+$: $\mathrm{index}(c_{m+s}) \geq \mathrm{index}(c_m) + s.\varepsilon - a$.

THÉORÈME 8.2 ([2]).- <u>Soit</u> c <u>une g.p.</u> . <u>Alors</u> : <u>ou</u> $\forall\ m$: $\mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) = 0$, <u>ou il existe un nombre fini d'itérées de</u> c : $c_{m_1}, \ldots, c_{m_s}$, <u>telles que</u> $\forall\ m \in N^+\ \exists\ i\ \exists\ k$ <u>tels que</u> $m = km_i$ <u>et</u> $\mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) = \mathrm{nullit\acute{e}}(c_{m_i})$.

<u>Esquisse de démonstration</u>. Soit c une g.p. ; si $X \in N_c$ est différentiable et si $X'(0) = X'(1)$ (par définition $X(0) = X(1)$), alors la formule (6.1) permet d'écrire

$$\forall\ Y \ :\ \mathrm{Hess}_c E(X,Y) = - \int_0^1 (X'' + R(X,\dot{c})\dot{c}|Y)dt\ .$$

On introduit donc l'opérateur différentiel elliptique A : $X \longmapsto -(X'' + R(X,\dot{c})\dot{c})$. Songeant plus généralement aux c_m , on prolonge c en une géodésique $\bar{c} : R \to M$; on peut alors, pour des champs de vecteurs différentiables le long de $\bar{c}$, poser : $\Theta_m(\mu) = \dim\{ X : A(X) = \mu X\ ,\ X(0) = X(m)\ ,\ X'(0) = X'(m)\}$. On voit de suite que, pour tout $m \in N^+$:

(8.3) $$\mathrm{index}(c_m) = \sum_{\mu<0} \Theta_m(\mu) \quad , \quad \mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) = \Theta_m(0)\ .$$

Dans [1], Bott a étudié le comportement en m des $\Theta_m(\mu)$ par l'astuce suivante : on complexifie les champs de vecteurs le long de $\bar{c}$ et l'opérateur A . Posons alors, pour tout z complexe : $\Theta_m^z(\mu) = \dim\{ X : A(X) = \mu X\ ,\ X(m) = z.X(0)\ ,\ X'(m) = z.X'(0)\}$. La clef est le :

LEMME 8.4.- <u>La somme portant sur les racines</u> $m^{\text{èmes}}$ <u>de</u> z , <u>on a</u> :

$$\Theta_m^z(\mu) = \sum_{w^m = z} \Theta_1^w(\mu)\ .$$

(La démonstration est facile : on introduit la résolvante $e = R(0,1)$ de $t = 0$ à $t = 1$ du système différentiel du premier ordre associé à $A(X) = \mu X$. Considérée comme endomorphisme de $N_{c(0)}$, on cherche donc les x tels que $e^m(x) = z.x$; si $E \subset N_{c(0)}$ est le sous-espace vectoriel qu'ils forment, la formule du lemme 8.4

traduit tout simplement la décomposition de Jordan de l'endomorphisme e de E, tel que $e^m = z.\mathrm{id}_E$.)

Si l'on pose $\Lambda(z) = \sum_{\mu<0} \Theta_1^z(\mu)$, $N(z) = \Theta_1^z(0)$, la formule (8.3) se relit donc en la :

(8.5) $\quad \mathrm{index}(c_m) = \sum_{z^m=1} \Lambda(z) \quad , \quad \text{nullité}(c_m) = \sum_{z^m=1} N(z)$.

Il n'y a plus qu'à connaître sur S^1 les fonctions Λ et N :

LEMME 8.6 ([1], [2]).- (i) $N(z) = 0$ sauf en au plus $2(\dim M - 1)$ points de S^1, dits points de Poincaré ;

(ii) Λ est localement constante, sauf au plus en les points de Poincaré ;

(iii) $\lim_{z \to z_0^{\pm}} \Lambda(z) \geq \Lambda(z_0)$.

((i) vient simplement de ce qu'un endomorphisme d'un espace de dimension h admet au plus h valeurs propres distinctes ; (ii) et (iii) résultent de la continuité des spectres.)

Les théorèmes 8.1 et 8.2 suivent facilement de (8.5) et 8.6 ; par exemple, heuristiquement, 8.1 est vrai parce que les z tels que $z^m = 1$ sont répartis de façon homogène sur S^1 .

9. Points critiques isolés dégénérés.

Nous avons toujours en vue la démonstration du théorème 0.1 (et non seulement le théorème 7.1). Pour ce faire, Gromoll-Meyer ont développé dans [3] une théorie des points critiques dégénérés isolés (théorie commencée par Morse). Cette théorie s'appliquera ensuite, avec de faibles modifications, au cas des orbites critiques dégénérées isolées du type $O(2).c$.

Dans tout ce n° la variété hilbertienne V et la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ vérifient les :

CONDITIONS 9.1.- (i) f vérifie la condition 4.2 ;

(ii) tous les points critiques de f sont isolés ;

(iii) $\forall\, p$ point critique de f, si A est l'opérateur self-adjoint de $T_c V$ défini par $\forall\, x \;\forall\, y$: $(Ax|y) = \mathrm{Hess}_p f(x,y)$, alors il existe un opérateur compact C tel que $A = \mathrm{id} + C$.

Pour la commodité de l'écriture, le théorème suivant est formulé pour $V = H$, l'espace de Hilbert réel séparable, le point critique considéré est 0, $f(0) = 0$; on pose $A^{-1}(0) = N$ et $H = E \oplus N$; et on note x, y les coordonnées associées à $H = E \oplus N$.

THÉORÈME 9.2 (splitting lemma, [3]).- Il existe un difféomorphisme local au voisinage de 0 : $\Phi : B \to \Phi(B)$, $\Phi(0) = 0$, un projecteur orthogonal P de H et une application différentiable h d'un voisinage de 0 dans N à valeurs dans E, tels que :

1) $\Phi|_N = \mathrm{id}_N$;

2) $T(h)_0 = 0$;

3) $(f \circ \Phi)(x,y) = |Px|^2 - |(\mathrm{id} - P)x|^2 + f(h(y),y)$.

On en déduit par perturbation linéaire le :

COROLLAIRE 9.3 ([3]). Au voisinage d'un point critique, la fonction f peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions n'ayant que des points critiques non dégénérés, en nombre fini et d'index compris entre index(p) et index(p) + nullité(p).

Pour étudier les g.p. dégénérées, il faut une analyse plus fine. A l'aide du splitting lemma (9.2), on attache à chaque point critique p de f un invariant $\mathcal{H}(f,p)$ (qui est l'homologie $H_*(W,W^-)$ de certaines paires convenables de sous-ensembles locaux de V). Si p_i $(i = 1,\ldots,r)$ sont les points critiques d'une valeur critique h , la seule dans $[\alpha,\beta]$, alors

(9.4) $$H_*(V^\beta,V^\alpha) = \sum_i \mathcal{H}(f,p_i) .$$

En un point critique p , on appelle sous-variété caractéristique Q la transférée par une carte locale en p du sous-ensemble $\Phi(B \cap N)$ de H , où Φ vérifie les conclusions du théorème 9.2 (bien prendre garde que Q est plus qu'une sous-variété telle que $T_pQ = \mathrm{Hess}_p f^{-1}(0)$).

THÉORÈME 9.6 (shifting theorem, [3]).- Quelle que soit la sous-variété caractéristique Q pour le point critique p , on a : $\forall k$: $\mathcal{H}_{k+\mathrm{index}(p)}(f,p) = \mathcal{H}_k(f|_Q , p)$. En particulier, on définit un invariant $\mathcal{H}^o(f,p) = \mathcal{H}(f|_Q , p)$.

10. Démonstration du théorème 0.1 ([2]).

On vérifie que $V = \Omega^1(M)$ et E satisfont les conditions 9.1. On suppose que (M,g) n'a que des g.p. isolées (sinon le théorème est déjà démontré !). Soient c une telle g.p. et $O(2).c$ son orbite dans $V = \Omega^1(M)$, qui se compose de deux composantes connexes, chacune homéomorphe à S^1 . On montre d'abord, ce qui n'est pas évident à cause de la remarque 6.2, que, pour un disque transverse convenable D_c , la restriction $E|_{D_c}$ admet c comme point critique isolé. On prend ensuite une paire (W_c,W_c^-) définissant, comme au n° 9, l'invariant $\mathcal{H}(E|_{D_c},c)$ et on montre que $\mathcal{H}(E,O(2).c) = H_*(W,W^-)$, où $W = O(2).W_c$ et $W^- = O(2).W_c^-$, est encore un invariant. Alors :

LEMME 10.1.- Pour des valeurs non critiques α , β et h seule valeur critique dans $[\alpha,\beta]$, si les c^i $(i = 1,\dots,r)$ sont les g.p. d'énergie h , alors $H_*(V^\beta,V^\alpha) = \sum_i \mathcal{H}(E,O(2).c^i)$.

Soit maintenant G le groupe d'izotropie de c (voir remarque 6.3) ; on a

$(W,W^-) = (O(2) \times W_c, O(2) \times W_c^-)/G$ et

(10.2) $\mathcal{H}(E,O(2).c) = H_*(O(2)) \otimes H_*(W_c,W_c^-)^G \subset \mathcal{H}(O(2)) \otimes \mathcal{H}(E|_{D_c},c)$.

Appelons <u>nombres types</u> de c les

(10.3) $B_k(c) = \dim \mathcal{H}_k(E,O(2).c)$, $B_k^o(c) = \dim \mathcal{H}_k^o(E|_{D_c},c)$.

D'après (10.2) et le shifting theorem 9.6 :

(10.4) $B_k(c) \leq 2(B^o_{k-\mathrm{index}(c)}(c) + B^o_{k-1-\mathrm{index}(c)}(c))$.

Puis (lemme 10.1 et remarque 4.4) :

LEMME 10.5.- <u>Soient</u> α , β <u>non critiques et</u> c^i $(i = 1,\ldots,r)$ <u>les</u> g.p. <u>d'énergie</u> $\in [\alpha,\beta]$. <u>Alors</u> : $\forall\, k$: $b_k(V^\beta,V^\alpha) \leq \sum_i B_k(c^i)$.

Il ne reste plus maintenant qu'à étudier le comportement en m des $B_k(c_m)$. D'après (10.4), comme nous connaissons le comportement des $\mathrm{index}(c_m)$ (théorème 8.1), il reste enfin à étudier les $B_k^o(c_m)$, $m \in N^+$. Le point crucial est la

PROPOSITION 10.6.- <u>Soient</u> $m \in N^+$ <u>et</u> c <u>une</u> g.p. <u>tels que</u> c_m <u>soit une</u> g.p. <u>isolée</u>. <u>Alors</u>, <u>si</u> $\mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) = \mathrm{nullit\acute{e}}(c)$, <u>on a</u> : $\forall\, k$: $B_k^o(c_m) = B_k^o(c)$.

(La démonstration est assez technique ; l'idée est que, en général : $\mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) \geq \mathrm{nullit\acute{e}}(c)$, le noyau $\mathrm{Hess}_c E^{-1}(0)$ étant appliqué <u>dans</u> le noyau $\mathrm{Hess}_{c_m} E^{-1}(0)$ par l'application $i(m) : V \to V$ qui est l'itération $m^{\text{ème}}$ et se trouve être une injection hilbertienne. Si $\mathrm{nullit\acute{e}}(c_m) = \mathrm{nullit\acute{e}}(c)$, alors $\mathrm{Hess}_c E^{-1}(0)$ est appliqué par $i(m)$ <u>sur</u> $\mathrm{Hess}_{c_m} E^{-1}(0)$, et on en déduit qu'une sous-variété caractéristique Q_c de D_c est appliquée <u>sur</u> une sous-variété caractéristique Q_{c_m} de D_{c_m} , donc $\mathcal{H}^o(E|_{D_c},c) = \mathcal{H}^o(E|_{D_{c_m}},c_m)$.)

Du théorème 8.2 on déduit sans malice :

(10.7) soit c une g.p. telle que $\forall\, m$: c_m soit une g.p. isolée. Alors $\exists\, B(c)$

tel que $\forall\, k\ \ \forall\, m$: $B_k^o(c_m) \le B(c)$. En outre $\exists\, k_o(c)$ tel que $\forall\, m\ \ \forall\, k > k_o(c)$: $B_k^o(c_m) = 0$.

Puis :

(10.8) avec les mêmes hypothèses et notations sur c : $\forall\, k\ \ \forall\, m$: $B_k(c_m) \le 4B(c)$. En outre $\exists\, C(c)$ tel que $\forall\, k > k_o(c)$ le nombre de m tels que $B_k(c_m) \neq 0$ soit $\le C(c)$.

On procède maintenant par l'absurde comme dans les démonstrations des théorèmes 6.5 et 7.1 ; soient c^i $(i = 1,\dots,r)$ nos géodésiques périodiques simples et (mod. $O(2)$) en nombre fini. Posons $B = 4 \sup_i B(c^i)$, $k_o = \sup_i k_o(c^i)$, $C = \sum_i C(c^i)$. Alors d'après (10.7) et (10.8), on aura pour toutes valeurs non critiques α , β : $\forall\, k > k_o$: $b_k(V^\beta, V^\alpha) \le BC$. D'où la contradiction cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BOTT - On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory, Comm. on Pure and Applied Math. 9 (1956), p. 171-206.

[2] D. GROMOLL, W. MEYER - Periodic geodesics on compact riemannian manifolds, à paraître dans Journal of Differential Geometry.

[3] D. GROMOLL, W. MEYER - On differentiable functions with isolated critical points, Topology, 8(1969), p. 361-369.

[4] W. MEYER - Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 170 (1967), p. 45-66.

[5] R. PALAIS - Morse theory on Hilbert manifolds, Topology 2 (1963), p. 299-340.

[6] J.-P. SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math. 54 (1951), p. 425-505.