Adrien Douady

Prolongement de faisceaux analytiques cohérents

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 366, p. 39-54
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__39_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 366 Novembre 1969

PROLONGEMENT DE FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

(Travaux de TRAUTMANN, FRISCH-GUENOT et SIU)

par Adrien DOUADY

1. Faisceaux prolongeables.

Soient X un espace analytique complexe, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique et $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $X - Z$. Notons i l'injection canonique de $X - Z$ dans X. On dit que $\underline{E}$ est prolongeable s'il existe un faisceau cohérent sur X qui prolonge $\underline{E}$. C'est le cas notamment si le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.

Les problèmes de prolongeabilité sont propres à la géométrie analytique : en géométrie algébrique, tous les faisceaux cohérents sont prolongeables [2].

Exemples. 1) Le faisceau $\underline{O}_{X-Z}$ est prolongeable. Si Z est de codimension 1, le faisceau $i_*\underline{O}_{X-Z}$ n'est pas cohérent. Si X est normal et Z de codimension ≥ 2, on a $i_*\underline{O}_{X-Z} = \underline{O}_X$, donc $i_*\underline{O}_{X-Z}$ est cohérent.

2) Pour tout point a, on note $\mathbf{C}_a$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en a et 0 ailleurs. Si (a_n) est une suite de points de X tendant vers un point de Z, le faisceau $\Sigma\, \mathbf{C}_{a_n}$ est cohérent mais non prolongeable.

3) Prenons $X = \mathbf{C}^2$ et $Z = \{0\}$. Posons $U_1 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : x \neq 0\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : y \neq 0\}$. Le faisceau localement libre $\underline{E}$ obtenu en recollant $\underline{O}_{U_1}$ et $\underline{O}_{U_2}$ par multiplication par $e^{\frac{1}{xy}}$ sur $U_1 \cap U_2$ n'est pas prolongeable. En effet,

supposons que $\underline{F}$ soit un faisceau cohérent prolongeant $\underline{E}$. Quitte à remplacer $\underline{F}$ par son bidual, on peut supposer $\underline{F}$ réflexif. Mais il résulte du théorème des syzygies que, sur $\mathbf{C}^2$, tout faisceau réflexif est localement libre, donc il existe un bidisque ouvert V de centre 0 dans X tel que $\underline{E}_{V-Z}$ soit libre. D'autre part, l'élément défini par $\frac{1}{xy} \in \underline{O}(U_{1,2})$ dans $H^1(V - Z, (U_i)_{i=1,2}; \underline{O})$ n'est pas nul, donc son image par exp n'est pas triviale car dans la suite exacte

$H^1(V - Z; \mathbf{Z}) \xrightarrow{2i\pi} H^1(V - Z; \underline{O}) \xrightarrow{\exp} H^1(V - Z; \underline{O}^*)$ on a $H^1(V - Z; \mathbf{Z}) = 0$, d'où contradiction.

*4) Prenons $X = \mathbf{C}^3$ et $Z = \{0\}$. Il existe sur X - Z un faisceau localement libre prolongeable qui n'admet aucun prolongement localement libre. En effet, soit $\mathbf{C}_o$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en 0 et 0 ailleurs, soit $0 \to \underline{L}_3 \to \underline{L}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{L}_o \to \mathbf{C}_o \to 0$ une résolution de $\mathbf{C}_o$, soit $\underline{F}$ l'image de $\underline{L}_2$ dans $\underline{L}_1$ et posons $\underline{E} = \underline{F}|_{X-Z}$. Le faisceau $\underline{E}$ est localement libre et $\underline{F}$ est de profondeur 2, donc $\underline{F} = i_*\underline{E}$ d'après le cor. de la prop. 3 ci-dessous. Si $\underline{E}$ admettait un prolongement localement libre $\underline{F}'$, on aurait $\underline{F}' = i_*\underline{E}$, d'où $\underline{F}' = \underline{F}$ et prof $\underline{F} = 3$, ce qui n'est pas.$_*$

Dans [8], Serre donne un premier critère de prolongeabilité :

THÉORÈME 1.- Si X est normal, Z partout de codimension ≥ 2 et $\underline{E}$ sans torsion, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.

(ii) Le faisceau $\underline{E}$ est prolongeable.

(iii) Pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que la restriction de $\underline{E}$ à $U - (Z \cap U)$ soit engendrée par ses sections.

L'inconvénient de ce critère est que la condition (iii) n'est pas locale sur

$X - Z$. Dans [8], Serre posait la question de trouver des critères de prolongeabilité plus utilisables.

2. Profondeur.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U . Pour tout $x \in U$, on note $\mathrm{Tordim}_x \underline{F}$ le plus petit k tel qu'il existe une résolution libre $0 \to \underline{L}_k \to \dots \to \underline{L}_o \to \underline{F} \to 0$ de $\underline{F}$ au voisinage de x . C'est aussi le plus grand k tel que $\mathrm{Tor}_k^{\underline{O}_x}(\underline{F}_x, \mathbb{C}) \neq 0$.

Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et $x \in X$. Soit φ un plongement d'un voisinage de x dans X dans un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{C}^n$; l'entier $n - \mathrm{Tordim}_{\varphi(x)} \varphi_* \underline{F}$ ne dépend pas du choix de φ, on l'appelle <u>profondeur</u> de $\underline{F}$ en x et on le note $\mathrm{prof}_x \underline{F}$. C'est aussi le plus grand entier p tel qu'il existe un morphisme π d'un voisinage de x dans X dans $\mathbb{C}^p$ tel que $\underline{F}$ soit π-plat. On pose $\mathrm{prof}\, \underline{F} = \inf_{x \in X} \mathrm{prof}_x \underline{F}$.

Pour tout k , notons $S_k(\underline{F})$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathrm{prof}_x \underline{F} \leq k$. C'est un sous-ensemble analytique de X , de dimension $\leq k$. On dit que $\underline{F}$ vérifie la condition (s_k) si l'on a

(s_k) $$\dim S_k(\underline{F}) \leq k - 2 .$$

3. Enoncé des résultats.

Frisch-Guenot [6] et Siu [9] ont obtenu indépendamment et simultanément le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> X <u>un espace analytique complexe,</u> $Z \subset X$ <u>un sous-ensemble analytique de dimension</u> $\leq p$ <u>et</u> $\underline{E}$ <u>un faisceau cohérent sur</u> $X - Z$. <u>Supposons que</u> $\underline{E}$

vérifie (s_k) pour $k \leq p+2$. Alors $i_*\underline{E}$ est cohérent et vérifie (s_k) pour $k \leq p+2$.

En particulier, on voit que tout faisceau de profondeur $\geq \dim Z + 3$ est prolongeable.

Trautmann avait démontré ce résultat dans le cas particulier où Z est de dimension 0 . Les deux démonstrations du Théorème 2 utilisent ce cas particulier.

Nous allons indiquer la démonstration du résultat de Trautmann, puis, très sommairement, celle du Théorème 2 par la méthode de Frisch-Guenot.

4. Cohomologie d'une couronne.

Si E est un espace vectoriel topologique, notons ${}^tE$ son dual. Si X est un espace analytique séparé à base dénombrable, pour tout faisceau analytique cohérent $\underline{F}$ sur X , on définit sur $H^i(X;\underline{F})$ une topologie (non nécessairement séparée) en identifiant $H^i(X;\underline{F})$ à $H^i(X,\underline{U};\underline{F})$, où $\underline{U}$ est un recouvrement ouvert de Stein dénombrable ; cette topologie ne dépend pas du choix de $\underline{U}$. C'est aussi la topologie que l'on obtient en prenant une résolution fine $\underline{R}^\bullet$ de $\underline{F}$ telle que, pour tout ouvert U de X , les espaces $\underline{R}^i(U)$ soient des Fréchets. Nous noterons $\hat{H}^i(X;\underline{F})$ le séparé de $H^i(X;\underline{F})$; c'est un Fréchet. Si $H^i(X;\underline{F})$ est de dimension finie, il est séparé.

PROPOSITION 1 (Dualité de Serre).- Soient X une variété analytique de dimension n séparée à base dénombrable et $\underline{M}$ un faisceau localement libre sur X . Si $H^{i+1}(X;\underline{M})$ est séparé, on a $H^{n-i}_{\text{comp}}(X;\underline{M}') = {}^tH^i(X;\underline{M})$, où $\underline{M}' = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{M};\underline{K})$, où $\underline{K}$ est le faisceau des formes différentielles analytiques de degré n .

Démonstration. Notons $\underline{R}^i$ le faisceau sur X des formes différentielles de type $(0,i)$ de classe C^∞ à valeurs dans le fibré M associé à $\underline{M}$, et $\underline{S}^j$ le faisceau des courants de type $(0,j)$ à valeurs dans $\underline{M}'$. On a des résolutions fines $\underline{R}^\cdot$ de $\underline{M}$ et $\underline{S}^\cdot$ de $\underline{M}'$, les $\underline{R}^i(X)$ sont des Fréchets et $H^0_{comp}(X\,;\underline{S}^{n-i}) = {}^t\underline{R}^i(X)$. Si $H^{i+1}(X\,;\underline{M})$ est séparé, $d^i : \underline{R}^i(X) \to \underline{R}^{i+1}(X)$ est un morphisme strict et $H^{n-i}_{comp}(X\,;\underline{M}') = H_i({}^t\mathbf{R}^\cdot(X)) = {}^tH^i(R^\cdot(X)) = {}^tH^i(X\,;\underline{M})$, cqfd.

Une norme ayant été choisie sur $\mathbf{C}^n$, notons D_a la boule fermée de rayon a dans $\mathbf{C}^n$. Pour $0 \le a < b$, posons $R_{a,b} = \mathring{D}_b - D_a$. Si K est un compact de $\mathbf{C}^n$, on pose $H^i_K(\underline{F}) = H^i_K(U\,;\underline{F})$ (cohomologie à support dans K), où U est un voisinage quelconque de K .

PROPOSITION 2.- <u>On a</u>

$$H^i_{D_a}(\underline{O}) = \begin{cases} {}^t\underline{O}(D_a) & \underline{\text{pour}}\ i = n \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ i < n . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Pour $b > a$, on a $H^i_{comp}(\mathring{D}_b\,;\underline{O}) = {}^t\underline{O}(\mathring{D}_b)$ pour $i = n$ et 0 pour $i \neq n$ par dualité de Serre. Le résultat s'en déduit par passage à la limite projective. Pour justifier ce passage, il suffit de montrer que

$H^i(\mathbf{C}^n - D_a\,;\underline{O}) = \varprojlim_{b>a} H^i(\mathbf{C}^n - \mathring{D}_b\,;\underline{O})$, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 1.- <u>Soient</u> X <u>un espace paracompact,</u> (X_n) <u>une suite de fermés de</u> X <u>telle que</u> $X_n \subset \mathring{X}_{n+1}$ <u>pour tout</u> n <u>et</u> $X = \cup X_n$ <u>et soit</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau sur</u> X . <u>L'application canonique</u> $H^i(X\,;\underline{F}) \to \varprojlim H^i(X_n\,;\underline{F})$ <u>est surjective. Elle est bijective si</u> $H^{i-1}(X_{n+1}\,;\underline{F}) \to H^{i-1}(X_n\,;\underline{F})$ <u>est surjective pour tout</u> n .

COROLLAIRE (Frenkel [4]).- <u>Supposons</u> $n \ge 2$. <u>On a</u> :

$$H^i(R_{a,b}\,;\underline{O}) = \begin{cases} {}^t\underline{O}(D_a) & \underline{\text{pour}}\ i = n-1 \\ \underline{O}(\mathring{D}_b) & \underline{\text{pour}}\ i = 0 \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ 0 < i < n-1 . \end{cases}$$

Démonstration : résulte de la suite exacte

$$H^i_{D_a}(\underline{O}) \to H^i(\mathring{D}_b ; \underline{O}) \to H^i(R_{a,b} ; \underline{O}) \to H^{i+1} \quad \ldots \; .$$

PROPOSITION 3.- Soient $z \in \mathbf{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de z . Posons $Z = \{z\}$. On a

$$H^i_Z(\underline{F}) \begin{cases} = 0 & \text{pour } i < \operatorname{prof}_z \underline{F} \\ \neq 0 & \text{pour } i = \operatorname{prof}_z \underline{F} \; . \end{cases}$$

Démonstration. Posons $p = \operatorname{prof}_z \cdot \underline{F}$.

(a) Cas $p = \infty$; on a $\underline{F}_z = 0$, c'est trivial.

(b) Cas $p = n$; on a $\underline{F} \approx \underline{O}^r$ au voisinage de z , avec $r \neq 0$, d'où $H^i_Z(\underline{F}) \approx {}^t\underline{O}^r_z$ pour $i = n$ et $= 0$ pour $i < n$ d'après la prop. 2.

(c) Cas $p = n - 1$. Soit $0 \to \underline{O}^r \xrightarrow{d} \underline{O}^s \to \underline{F} \to 0$ une résolution de $\underline{F}$ minimale en z , i. e. telle que les coefficients de la matrice d appartiennent à $\underline{m}_z$. Pour $i < n - 1$, la suite exacte $H^i_Z(\underline{O}^s) \to H^i_Z(\underline{F}) \to H^{i+1}_Z(\underline{O}^r)$ donne $H^i_Z(\underline{F}) = 0$. L'application $H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ définie par d n'est pas injective. En effet, c'est l'application ${}^t\underline{O}^r_z \to {}^t\underline{O}^s_z$ définie par la matrice d , et son noyau contient les éléments de la forme $(a_1\delta, \ldots, a_r\delta)$, où $\delta \in {}^t\underline{O}_z$ est la mesure de Dirac, et $r \neq 0$ car sinon $\operatorname{prof}_z \underline{F} = n$. La suite exacte $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \to H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ montre que $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \neq 0$.

(d) Cas $p < n - 1$. Soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte au voisinage de z , où $\underline{L}$ est libre. On a $H^i_Z(\underline{F}) = H^{i+1}_Z(\underline{F}_1)$ pour $i < n - 1$, d'où le résultat par récurrence descendante sur p .

COROLLAIRE.- Soient X un espace analytique, $z \in \dot{X}$, notons i l'injection canonique de $X - \{z\}$ dans X et soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Pour que

$\underline{F} = i_* i^* \underline{F}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\text{prof}_z\, \underline{F} \geq 2$.

<u>Démonstration</u>. Pour U voisinage ouvert de Stein de z dans X , on a une suite exacte : $0 \to H^0_Z(\underline{F}) \to H^0(U\,;\underline{F}) \to H^0(U-Z\,;\underline{F}) \to H^1_Z(\underline{F}) \to 0$, où $Z = \{z\}$, qui montre que $\underline{F}(U) \to \underline{F}(U-Z)$ est un isomorphisme si et seulement si la profondeur de $\underline{F}$ n'est ni 0 ni 1 .

PROPOSITION 4 (Andreotti-Grauert [1]).- <u>Soient</u> a , b , a' , b' <u>tels que</u> $0 \leq a < a' < b' < b$ <u>et</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> $R_{a,b}$.

(a) <u>L'application</u> $H^1(R_{a,b}\,;\underline{F}) \to H^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>est surjective</u> ; <u>on a</u> $\hat{H}^1(R_{a,b}\,;\underline{F}) = \hat{H}^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>et</u> $H^i(R_{a,b}\,;\underline{F}) = H^i(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>pour</u> $i > 1$.

(b) <u>L'application</u> $H^i(R_{a,b}\,;\underline{F}) \to H^i(R_{a',b}\,;\underline{F})$ <u>est bijective pour</u> $i < \text{prof}\,\underline{F} - 1$ <u>et injective pour</u> $i = \text{prof}\,\underline{F} - 1$.

(c) <u>L'espace</u> $H^i(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>est de dimension finie pour</u> $1 \leq i \leq \text{prof}\,\underline{F} - 2$.

LEMME 2 (I. Furoncoli).- <u>Soient</u> a , c , c' <u>tels que</u> $0 \leq a < c \leq c'$. <u>Il existe une suite finie</u> $(C_0,\dots,C_N)$ <u>d'ouverts convexes telle que</u> $\mathring{D}_c = C_0 \subset \dots \subset C_N = \mathring{D}_{c'}$, <u>et que</u> $\overline{C_k - C_{k-1}}$ <u>puisse être séparé de</u> D_a <u>par un hyperplan réel</u>.

(En termes imagés : "suffisamment de piqûres de moustiques provoquent un oedème".)

<u>Démonstration du lemme dans le cas euclidien</u>. On peut supposer $c' < \frac{4c-a}{3}$. Pour $A \subset \mathbb{C}^n$, notons $\text{Conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A . Soient $x_1,\dots,x_N$ des points de norme $\frac{4c-a}{3}$ tels que $\bigcup \text{Conv}(\mathring{D}_c \cup \{x_k\}) \supset D_{c'}$. Définissant les C_k par $C_k = \mathring{D}_{c'} \cap \text{Conv}(C_{k-1} \cup \{x_k\})$, ça marche.

<u>Démonstration de la proposition 4</u>. (a) Soient $C_0,\dots,C_N$ comme dans le lemme avec $c = b'$, $c' = b$, posons $G_k = \mathring{C}_k - D_a$. Soit S un demi-espace ouvert conte-

nant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ et ne rencontrant pas D_a , soit (U_m) un recouvrement de G_k par des ouverts convexes tel que $U_o = S \cap G_k$ et $U_m \subset G_{k-1}$ pour $m \neq 0$, et posons $V_m = U_m \cap G_{k-1}$. On a $U_{m,m'} = V_{m,m'}$ pour $m \neq m'$, d'où $C^i(G_k,(U_m);\underline{F}) = C^i(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$ pour $i > 0$, en notant C^i l'espace des cochaînes alternées. Comme V_o est convexe, l'application $\underline{F}(U_o) \to \underline{F}(V_o)$ est d'image dense, et il en est de même de $C^o(G_k,(U_m);\underline{F}) \to C^o(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$. Par suite $H^1(G_k ; \underline{F}) \to H^1(G_{k-1} ; \underline{F})$ est surjective et devient bijective quand on sépare, et $H^i(G_k ; \underline{F}) = H^i(G_{k-1} ; \underline{F})$ pour $i > 1$, d'où (a).

(b) Soient c et c' tels que $a < c \leq c' < b$, et soient $C_o,\ldots,C_N$ comme dans le lemme. Posons $G_k = D_b - C_k$. Soit S un demi-espace ouvert contenant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ tel que $\bar{S} \cap D_a = \emptyset$, posons $U = S \cap C_k$ et $V = S \cap C_{k-1}$. Par dualité de Serre, on a $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) = H^i_{comp}(V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$, et, l'application $\underline{O}(U) \to \underline{O}(V)$ étant d'image dense, $H^n_{comp}(V) \to H^n_{comp}(U)$ est injective. La suite exacte $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) \to H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(U ; \underline{O})$ montre que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$. D'après le Théorème A de H. Cartan, $\underline{F}$ admet sur $\bar{U}$ une résolution de longueur $n - p$, où $p = \text{prof } \underline{F}$. Il en résulte par récurrence descendante sur p que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) = 0$ pour $i < p$. La suite exacte $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) \to H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F}) \to H^{i+1} \ldots$ montre que $H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F})$ est bijective pour $i < p - 1$ et injective pour $i = p - 1$, et il en est de même de $H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_{c'} ; \underline{F}) \to H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_{c'} ; \underline{F})$. On conclut par passage à la limite projective en faisant tendre c vers a ou vers a' , grâce au lemme 1.

(c) résulte de (a) et (b) par la méthode qui donne le théorème de finitude de Cartan-Serre.

5. Résultats de Trautmann [10].

PROPOSITION 5.- Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $R_{a,b}$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, il existe un faisceau analytique cohérent prolongeant $\underline{F}$ à $\overset{\circ}{D}_b$.

LEMME 3.- Soit b' tel que $a < b' < b$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, l'espace $H^o(R_{a,b'}; \underline{F})$ engendre $\underline{F}_x$ pour tout $x \in R_{a,b'}$.

Démonstration. Considérons la suite exacte $0 \to \underline{m}_x\underline{F} \to \underline{F} \to C_x \otimes \underline{F} \to 0$. L'espace $H^1(R_{a,b'}; \underline{F})$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). La suite exacte $C \otimes \underline{F}_x \to H^1(R_{a,b'}; \underline{m}_x\underline{F}) \to H^1(R_{a,b'}; \underline{F})$ montre que $H^1(R_{a,b'}; \underline{m}_x\underline{F})$ est de dimension finie, donc séparé. Soit b'' tel que $a < b'' < \|x\| < b'$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^o(R_{a,b'}; \underline{F}) & \xrightarrow{\varepsilon} & C \otimes \underline{F}_x & \to & H^1(R_{a,b'}; \underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{u} & H^1(R_{a,b'}; \underline{F}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H^1(R_{a,b''}; \underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{=} & H^1(R_{a,b''}; \underline{F}) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes d'après la prop. 4 (a) puisqu'elles partent d'espaces séparés, donc u est un isomorphisme, ε est surjectif, d'où le lemme par Nakayama.

Démonstration de la prop. 5. On peut supposer $n \geq 3$. Soient a', b', b'' tels que $a < a' < b' < b'' < b$. Il résulte du lemme qu'il existe un faisceau libre $\underline{L}_o$ et un morphisme $d_o : \underline{L}_o \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b''}$ surjectif sur $Q = \overline{R_{a',b'}}$. Posons $\underline{F}_1 = \operatorname{Ker} d_o$. On a prof $\underline{F}_1 \geq 3$ sur Q, donc il existe un faisceau libre $\underline{L}_1$ et un morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{F}_1$ défini surjectif au voisinage de Q. Le morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ se prolonge à $D_{b'}$, et on a $d_o \circ d_1 = 0$ sur $R_{a,b'}$. Posons $\underline{G} = \operatorname{Coker} d_1$. On a un morphisme $f : \underline{G} \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b'}$ qui est un isomorphisme sur $R_{a',b'}$. Posons $S = S_1(\underline{G})$ et soit T l'ensemble des $x \in R_{a,b'}$ tels que f_x ne soit pas un isomorphisme. Les ensembles S et T sont des ensembles analytiques qui ne rencontrent pas $R_{a',b'}$, donc sont de dimension 0 . Par suite S est fini. Mais il résulte du corollaire de la prop. 3 que $T \subset S$, car, si $x \notin S$, on a $\underline{G} = j_* j^* \underline{G} = j_* j^* \underline{F} = \underline{F}$ au voisinage de x , où $j : R - \{x\} \to R$ est l'injection canonique. Par suite, T est fini, donc fermé dans $\mathring{D}_{b'}$. On obtient un prolongement de $\underline{F}$ en recollant $\underline{F}$ et $\underline{G}|_{\mathring{D}_{b'} - T}$ suivant f .

COROLLAIRE.- _Si_ Z _est de dimension_ 0 , _tout faisceau de profondeur_ ≥ 3 _sur_ $X - Z$ _est prolongeable._

PROPOSITION 6.- _Supposons_ Z _de dimension_ 0 _et soit_ $\underline{E}$ _un faisceau analytique cohérent de profondeur_ ≥ 2 _sur_ $X - Z$. _Si_ $\underline{E}$ _est prolongeable,_ $i_* \underline{E}$ _est cohérent de profondeur_ ≥ 2 .

LEMME 4.- _Soient_ $n \geq 3$ _et_ $0 < b' < b$. _Posons_ $X = \mathring{D}_b$, $X' = \mathring{D}_{b'}$, $Z = \{0\}$ _et_ $W = X' - Z$. _Soit_ $\underline{E}$ _un faisceau cohérent sur_ $X - Z$ _de profondeur_ ≥ 2 _prolongeable. Il existe alors une suite exacte_ $0 \to \underline{E}_1 \to \underline{L}_0 \to \underline{E} \to 0$ _sur_ W _où_ $\underline{L}$ _libre et_ $H^1(W ; \underline{E}_1) = 0$.

Démonstration. Soient $\underline{F}$ un prolongement de $\underline{E}$ et $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{X}'$, où $\underline{L}$ est libre. Dans la suite exacte $H^0(W ; \underline{L}) \to H^0(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{F}_1)$, le faisceau $\underline{F}_1$ est de profondeur ≥ 3 sur $\bar{X}' - Z$, donc $H^1(W ; \underline{F}_1)$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). Il existe donc des sections $f_1, \ldots, f_s \in H^0(W ; \underline{E})$ telles que $H^0(W ; \underline{E})$ soit engendré par $H^0(W ; \underline{L}) \cup \{f_1, \ldots, f_s\}$, d'où, en posant $\underline{L}_0 = \underline{L} \oplus \underline{O}_W^s$, un morphisme $\underline{L}_0 \to \underline{E}$ tel que $H^0(W ; \underline{L}_0) \to H^0(W ; \underline{E})$ soit surjectif. En notant $\underline{E}_1$ le noyau de ce morphisme, la suite exacte $H^0(W ; \underline{L}_0) \to H^0(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{E}_1) \to H^1(W ; \underline{L}_0)$, où $H^1(W ; \underline{L}_0) = 0$

d'après le cor. de la prop. 2, donne $H^1(W;\underline{E}_1) = 0$.

Démonstration de la prop. 6. On peut supposer qu'on est dans les conditions du lemme. Le faisceau $\underline{E}_1$ est alors de profondeur ≥ 3 , donc prolongeable d'après la prop. 5, ce qui permet d'itérer la construction. On obtient une suite exacte $0 \to \underline{E}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{E}_1 \to 0$ sur $W' = X'' - Z$, où $X'' = \overset{\circ}{D}_{b''}$, $0 < b'' < b'$. Le morphisme $\underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ se prolonge à X'' . Notons $\bar{\underline{E}}$ le conoyau de ce morphisme prolongé. Pour $U = \overset{\circ}{D}_a$, $a \leq b''$, on a des suites exactes

$\underline{E}_2(U-Z) \to \underline{L}_1(U-Z) \to \underline{E}_1(U-Z) \to 0$, $0 \to \underline{E}_1(U-Z) \to \underline{L}_o(U-Z) \to \underline{E}(U-Z) \to 0$,

d'où $\underline{E}(U-Z) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U-Z) \to \underline{L}_o(U-Z)) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U) \to \underline{L}_o(U)) = \bar{\underline{E}}(U)$. Par suite $\bar{\underline{E}} = i_*\underline{E} = i_*i^*\bar{\underline{E}}$, et $\bar{\underline{E}}$ est de profondeur ≥ 2 à l'origine d'après le cor. de la prop. 3.

6. Introduction de paramètres.

Le corollaire de la prop. 3 admet la généralisation suivante :

PROPOSITION 7 [7].- Soient X un espace analytique, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique de dimension p , soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et notons i l'injection canonique $X - Z \to X$. Si $\underline{F}$ vérifie (s_k) pour $k \leq p+1$, on a $\underline{F} = i_*i^*\underline{F}$.

LEMME 5.- Soient $U = U' \times U'' \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ un polydisque ouvert, $\underline{F}$ un faisceau cohérent de profondeur $\geq p + k$ au voisinage de $\bar{U}$. Posons $Z = U' \times \{0\}$. On a $H^o(U-Z;\underline{F}) = H^o(U;\underline{F})$ si $k \geq 2$, et $H^i(U-Z;\underline{F}) = 0$ pour $1 \leq i \leq k-2$.

Démonstration par récurrence descendante sur k : On a

$$H^i(U-Z;\underline{O}) = \underline{O}(U') \hat{\otimes} H^i(U''-\{0\};\underline{O}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq q-2 \\ \underline{O}(U) & \text{pour } i = 0 \end{cases}$$

d'où le résultat pour $k = q$. Si $k < q$, soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{U}$, où $\underline{L}$ est libre. On a prof $\underline{F}_1 \geq p + k + 1$. La suite exacte $H^i(U - Z ; \underline{L}) \to H^i(U - Z ; \underline{F}) \to H^{i+1}(U - Z ; \underline{F}_1)$ donne le résultat pour $i > 0$. Si $k \geq 2$, on a $H^1(U - Z ; \underline{F}_1) = 0$, d'où
$\underline{F}(U - Z) = \mathrm{Coker}(\underline{F}_1(U - Z) \to \underline{L}(U - Z)) = \mathrm{Coker}(\underline{F}_1(U) \to \underline{L}(U)) = \underline{F}(U)$.

Démonstration de la proposition par récurrence sur p : Posons $Z' = \mathrm{sing}(Z) \cup (Z \cap S_{p+1}(\underline{F}))$. Au voisinage de chaque point de $Z - Z'$, on est dans la situation du lemme, d'où etc.

Pour continuer, il nous faut des espaces de Banach et des complexes directs.

Soient $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ et $L = L_1 \times \ldots \times L_n$ deux polydisques concentriques dans $\mathbf{C}^n$ tels que $\mathring{L} \neq \emptyset$ et $L \subset \mathring{K}$. Posons $Q = K - \mathring{L}$, $Q_i = K_i - \mathring{L}_i$, $T_i = K_1 \times \ldots \times Q_i \times \ldots \times K_n$ et $T_{i_o,\ldots,i_q} = T_{i_o} \cap \ldots \cap T_{i_q}$. Notons $B(T_{i_o,\ldots,i_q})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $T_{i_o,\ldots,i_q}$ holomorphes à l'intérieur. Posons $C_b^q(Q ; \underline{O}) = \prod_{i_o < \ldots < i_q} B(T_{i_o,\ldots,i_q})$. On a un complexe $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$, où les $d : C_B^q(Q ; \underline{O}) \to C_B^{q+1}(Q ; \underline{O})$ sont les différentielles de Čech. Notons $H_B^q(Q ; \underline{O})$ son homologie.

PROPOSITION 8.- <u>Si</u> $n \geq 2$, <u>le complexe</u> $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$ <u>est direct</u>. <u>On a</u>

$$H_B^q(Q ; \underline{O}) = \begin{cases} B(K) & \underline{\text{pour}} \quad q = 0 \\ 0 & \underline{\text{pour}} \quad 1 \leq q \leq n - 2 . \end{cases}$$

Pour la démonstration, on se ramène par $\hat{\otimes}_\varepsilon$ à l'étude du cas $n = 1$.

Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de K . On dit que Q est une <u>couronne privilégiée</u> pour $\underline{F}$ si, quels que soient q et $(i_o,\ldots,i_q)$, le compact $T_{i_o,\ldots,i_q}$ est $\underline{F}$-privilégié [3]. On montre, comme dans [3], que pour tout faisceau $\underline{F}$ analytique cohérent sur un voisinage U de 0 dans $\mathbf{C}^n$, il existe une couronne privilégiée Q pour $\underline{F}$ de centre 0 contenue dans U. De plus, si (s_n) est une suite de points de U tendant vers 0, on peut choisir Q ne contenant aucun des s_n.

Si Q est une couronne privilégiée pour $\underline{F}$, on définit comme ci-dessus le complexe $C_B^{\bullet}(Q ; \underline{F})$. On dit qu'un complexe $E^{\bullet}$ d'espaces de Banach est _direct en degré_ i si $d^{i-1} : E^{i-1} \to E^i$ et $d^i : E^i \to E^{i+1}$ sont des morphismes directs (en particulier on exige que $\operatorname{Im} d^i$ soit facteur direct topologique dans E^{i+1}).

PROPOSITION 9.- _Soit_ $Q = K - \mathring{L}$ _une couronne privilégiée pour_ $\underline{F}$, _où_ $\underline{F}$ _est un faisceau cohérent au voisinage de_ K. _Posons_ $p = \operatorname{prof}_Q \underline{F}$ _et_ $p' = \operatorname{prof}_K \underline{F}$. _Le complexe_ $C_B^{\bullet}(Q ; \underline{F})$ _est direct en degré_ $p - 2$. _On a_

$$H_B^q(Q ; \underline{F}) = \begin{cases} B(K ; F) & \underline{\text{pour}}\ q = 0\ \underline{\text{si}}\ p' \geq 2 \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ 1 \leq q \leq p' - 2 \\ \underline{\text{est de dimension finie pour}} & 1 \leq q \leq p - 2 . \end{cases}$$

Longueur de la démonstration : 3 pages dans [6].

La démonstration du théorème 2 va maintenant résulter de trois lemmes.

LEMME 6.- _Soient_ $U = U' \times U''$ _un voisinage de_ 0 _dans_ $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$, _notons_ $\pi : U \to U'$ _la projection, soient_ Z _un sous-ensemble analytique de_ U _tel que_ $\pi|_Z$ _soit fini et_ $\underline{E}$ _un faisceau analytique cohérent sur_ $U - Z$ _vérifiant_ (s_k) _pour_ $k \leq p + 2$. _Posons_ $S = S_{p+2}(\underline{E})$. _On suppose que les fibres de_ $\pi|_S$ _sont de dimension_ 0 _et que_ $\underline{E}|_{U - Z - S}$ _est_ π_-plat. Il existe alors un voisinage_ U_1 _de_ 0 _dans_ U _et un sous-ensemble analytique_ $Z_1 \subset Z \cap U_1$ _de dimension_ $\leq p - 1$ _tels que, en notant_ i _l'injection canonique_ $X - Z \to X - Z_1$, _le faisceau_ $i_* \underline{E}$ _soit cohérent et vérifie_ (s_k) _pour_ $k \leq p + 2$.

<u>Démonstration</u>. Pour $t \in U'$, posons $Z(t) = Z \cap \pi^{-1}(t)$. On peut supposer que $Z(0) = \{0\}$ et que $S(0)$ est l'ensemble des points d'une suite tendant vers 0. Soit $Q = K - \mathring{L} \subset U''$ une couronne privilégiée pour $\underline{E}(0)$ ne rencontrant pas $S(0)$. Il existe un voisinage U'_1 de 0 dans U' tel que, pour tout $t \in U'_1$, la couronne Q ne rencontre pas $S(t)$ et soit privilégiée pour $\underline{E}(t)$. Les complexes $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E}(t))$ sont les fibres d'un complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E})$ de fibrés vectoriels banachiques sur U'_1. Pour tout $t \in U'_1$, le faisceau $\underline{E}(t)$ est de profondeur ≥ 3 sur Q, et il existe en vertu des prop. 5 et 6 un faisceau $\underline{F}(t)$ de profondeur ≥ 2 sur K qui coïncide avec $\underline{E}(t)$ sur Q. D'après la prop. 8, le complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E}(t)) = C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{F}(t))$ est direct en degré 1 et son homologie est de dimension finie. Cette dimension dépend de façon analytiquement semi-continue supérieurement de t, donc il existe un ensemble analytique $T \subset U'_1$ de dimension $\leq p-1$ tel que $\dim H^1_B(Q\,;\underline{E}(t))$ soit constante sur $U'_1 - T$. Sur cet ouvert, les $H^0_B(Q\,;\underline{E}(t))$ sont les fibres d'un fibré $H^0_B(Q\,;\underline{E})$. A ce fibré correspond par la méthode de ([3], § 8, n° 5) un faisceau sur $(U'_1 - T) \times \mathring{K}$, π-plat, et on montre grâce à la prop. 7 que ce faisceau coïncide avec $\underline{E}$ là où ils sont tous deux définis, d'où le lemme avec $U_1 = U'_1 \times \mathring{K}$ et $Z_1 = Z \cap \pi^{-1}(T)$.

LEMME 7.- <u>Soient</u> V <u>un ouvert de</u> $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$, Z <u>un sous-ensemble analytique de</u> V, Y <u>un sous-ensemble analytique de</u> $V - Z$ <u>et</u> $\pi : V \to \mathbf{C}^p$ <u>la projection canonique</u>. <u>On suppose les fibres de</u> $\pi|_Z$ <u>de dimension</u> 0 <u>et les fibres de</u> $\pi|_Y$ <u>de dimension</u> ≥ 1 <u>en chaque point</u>. <u>Alors l'adhérence</u> $\bar{Y}$ <u>de</u> Y <u>dans</u> V <u>est un sous-ensemble analytique de</u> V. <u>Si</u> $\pi|_Y$ <u>n'est ouverte en aucun point</u>, $Z \cap \bar{Y}$ <u>est de dimension</u> $\leq p-1$.

<u>Longueur de la démonstration</u> : $3\,\frac{1}{2}$ pages, en introduisant une filtration analytique (Y_k) sur Y telle que $\pi|_{Y_k - Y_{k+1}}$ soit "de rang constant" $p-k$.

LEMME 8.- <u>Soient</u> V <u>un ouvert de</u> $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, $\underline{F}$ <u>un faisceau cohérent sur</u> V <u>et</u> $\pi : V \to \mathbb{C}^p$ <u>la projection</u>. <u>Soit</u> Y <u>l'ensemble des points où</u> $\underline{F}$ <u>n'est pas</u> π-<u>plat</u>. <u>Alors</u> Y <u>est un sous-ensemble analytique de</u> V <u>et</u> $\pi|_Y$ <u>n'est ouverte en aucun point</u>. <u>Si</u> prof $\underline{F} \geq p + k$, <u>les fibres de</u> $\pi|_Y$ <u>sont de dimension</u> $\geq k + 1$ <u>en chaque point</u>.

La première assertion constitue l'un des buts de [5]. La seconde est démontrée dans [6] en deux pages.

<u>Démonstration du théorème 2</u> par récurrence sur p . Le résultat est local. Soit $z \in Z$. On peut plonger un voisinage de z dans X dans un ouvert $U = U' \times U''$ de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, de façon que $\pi|_{Z \cap U}$ soit fini. Posons $S = S_{k+2}(\underline{E})$. Soient Y_1 l'ensemble des points de S où la fibre de $\pi|_S$ est de dimension ≥ 1 , Y_2 l'ensemble des points de $U - Z - S$ où $\underline{E}$ n'est pas π-plat et posons $Y = Y_1 \cup Y_2$. Il résulte des lemmes 7 et 8 que l'adhérence $\bar{Y}$ de Y dans U est un sous-ensemble analytique de U qui rencontre Z suivant un sous-ensemble analytique Z_1 de dimension $\leq p - 1$. Au voisinage de chaque point de $Z - Z_1$, on est dans les conditions du lemme 6, donc l'image directe de $\underline{E}$ dans $U - Z_1$ est un faisceau cohérent vérifiant (s_k) pour $k \geq p + 2$. Il en est de même de son image directe dans U en vertu de l'hypothèse de récurrence, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. S. M. F., 90 (1962), p. 193-259.

[2] A. BOREL et J.-P. SERRE - Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. S. M. F., 86 (1958), p. 97-136.

[3] A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 1-98.

[4] J. FRENKEL - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. S. M. F., 85 (1957), p. 135-220.

[5] J. FRISCH - Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, Inv. Math., 4 (1967), p. 118-138.

[6] J. FRISCH et J. GUENOT - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Inv. Math., 7 (1969), p. 321-343.

[7] G. SCHEJA - Fortsetzungssätze der complex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung, Math. Ann., 157 (1964), p. 75-94.

[8] J.-P. SERRE - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 363-374.

[9] Y.-T. SIU - Extending coherent analytic sheaves, Ann. of Math., 90 (1969), p. 108-143.

[10] G. TRAUTMANN - Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben, Arch. Math., 19 (1967), p. 188-196.