

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HAROLD ROSENBERG

## Feilletages sur des sphères

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 393, p. 221-232

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1970-1971\\_\\_13\\_\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__221_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES SUR DES SPHÈRES

[d'après H. Blaine LAWSON]

par Harold ROSENBERGI. Introduction.

Par feuilletage d'une variété  $V$ , on entend un feuilletage de  $V$  de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , tel que les composantes du bord de  $V$  soient des feuilles. En 1951, Georges Reeb a donné un exemple d'un feuilletage de la sphère  $S^3$  [6], et récemment, il a été démontré que toute variété fermée de dimension 3 admet un feuilletage [8]. Le problème de l'existence des feuilletages des sphères  $S^{2n+1}$  pour  $n > 1$ , se posait depuis que Reeb a trouvé un feuilletage de  $S^3$ . Le but de cet exposé est d'expliquer les exemples de Lawson, de feuilletages des sphères  $S^{2^k+3}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  [2].

II. Quelques exemples préliminaires.

1. La composante de Reeb. Ceci est un feuilletage de  $D^n \times S^1$  dont toutes les feuilles dans  $\text{int}(D^n \times S^1)$  sont  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $h : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que :

$$(i) \quad h/[0, \frac{1}{2}] = 0 \quad ;$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{d^k h(x)}{dx^k} = \infty \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots .$$

Soit  $F'$  le feuilletage de  $D^n \times \mathbb{R}$  qui a pour feuilles :

$$\{(x, h(|x|) + s) \in D^n \times \mathbb{R} \mid x \in \text{int } D^n, s \in \mathbb{R}\} = L(s)$$

et  $\partial(D^n \times \mathbb{R})$ . Les feuilles de  $F'$  sont invariantes par l'action de  $Z$  sur  $D^n \times \mathbb{R}$  engendrée par la translation  $(x, s) \rightarrow (x, s + 1)$ . Donc  $F'$  se projette en un feuilletage de  $D^n \times S^1$  qu'on appelle la composante de Reeb.

2. Modification. Nous décrivons ici un feuilletage de  $\mathbb{R}^n \times S^1$  qui est la composante de Reeb dans  $D^n \times S^1$  et qui est le feuilletage produit :  $\mathbb{R}^n \times \{z\}$ ,  $z \in S^1$ , dans le complément de  $D^n(3/2) \times S^1$ , où  $D^n(3/2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 3/2\}$ . Ensuite on expliquera l'intérêt de cet exemple.

Soit  $h : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de l'exemple 1, et posons  $h(s) = 0$  pour  $s \leq 0$ . Soit  $F'$  le feuilletage de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  qui a pour feuilles :

$$L(s) = \{(x, h(|x|) + s) \in D^n \times \mathbb{R} \mid x \in \text{int } D^n, s \in \mathbb{R}\},$$

$$L'(s) = \{(x, h(2 - |x|) + s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x| > 1, s \in \mathbb{R}\},$$

et  $\partial(D^n \times \mathbb{R})$ .

De nouveau,  $F'$  est invariant par les translations  $(x, s) \rightarrow (x, s + k)$ ; donc  $F'$  se projette en un feuilletage  $F^*$  de  $\mathbb{R}^n \times S^1$  qui a les propriétés voulues.

Maintenant, soit  $F$  un feuilletage quelconque, d'une variété  $V$ . Soit  $C$  l'image d'un plongement de  $S^1$  dans  $V$  tel que  $C$  soit transverse à  $F$  en chaque point et que le fibré normal de  $C$  soit trivial. Soit  $T(C)$  un voisinage tubulaire de  $C$  dans  $V$  et soit  $g : D^n(2) \times S^1 \rightarrow T(C)$  un difféomorphisme. Il n'est pas difficile de voir qu'on peut choisir  $g$  de telle sorte que  $g(D^n(2) \times \{z\})$  soit contenu dans une feuille de  $F$ , pour chaque  $z \in S^1$  (cf. [8]). Soit  $F(C)$  le feuilletage de  $V$  qui est égal à  $F$  dans  $V - T(C)$  et qui est égal à  $g(F^*)$  dans  $T(C)$ . Intuitivement, on a remplacé la trans-

versale fermée  $C$  par une composante de Reeb et dans un voisinage du bord de la composante de Reeb, les feuilles de  $F(C)$  spiralent vers le bord.  $C$  est Reeb qui a décrit ce processus [6]. Nous dirons que  $F(C)$  est le feuilletage obtenu de  $F$  par modification en  $C$ . Notons que  $V - \text{int}(\text{la composante de Reeb})$  est feuilletée par  $F(C)$ .

3. L'une des sources principales de feuilletages est fournie par des submersions. Soit  $f : V \rightarrow M$  une submersion (c.à.d. le rang de  $f$  en chaque point est égal à la dimension de  $M$ ) et soit  $F$  un feuilletage de  $M$ . Alors on a un feuilletage induit  $f^*(F)$  de  $V$ , défini de la manière suivante : soit  $\sigma$  le champ de plans tangent à  $F$  ; on définit un champ de plans  $\eta$  sur  $V$  par :

$$\eta(x) = df_x^{-1}(\sigma(f(x))) .$$

Par le théorème de Frobenius et le fait que  $f$  soit une submersion, on voit que  $\eta$  est intégrable, donc que  $\eta$  est le champ de plans tangent à un feuilletage  $f^*(F)$  de  $V$ .

### III. Feuilletage obtenu d'un polynôme.

Soit  $P : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme homogène de degré  $d$ , tel que  $\text{grad } P$  ne soit pas nul hors de l'origine. La variété  $V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid P(z) = 0\}$  est une variété avec une singularité isolée à l'origine. Soit  $S^n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z| = 1\} = S^{2n+1}$  et soient  $L = V \cap S$ ,  $S = S^n(\mathbb{C})$  ; on appelle  $L$  le link de  $P$ . Alors  $0$  est une valeur régulière de  $P_1 = P/S$  [page 55 de 3], donc  $L$  est une variété compacte, de classe  $C^\infty$ , de dimension réelle  $2n-1$ , et de fibré normal trivial dans  $S$ .

Soit  $T(L)$  un voisinage tubulaire de  $L$  dans  $S$  ;  $T(L)$  est difféomorphe à  $D^2 \times L$ . Notons par  $M$  la fermeture de  $S - T(L)$ .

PROPOSITION 1.- Il existe un feuilletage  $F(P)$  de  $M$  tel que :

- a) le bord  $S^1 \times L$  de  $M$  est la seule feuille compacte, et  
 b) les autres feuilles sont toutes difféomorphes et elles ont le type d'homotopie d'un bouquet de  $k$  sphères  $S^n$ , où  $k$  est le degré de l'application :

$$\frac{\nabla P_1}{|\nabla P_1|} : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} .$$

Démonstration. Soit  $M' = S - L$  et soit  $\varphi : M' \rightarrow S^1$  l'application :

$$\varphi = \frac{P}{|P|} .$$

Alors  $\varphi$  est une fibration et les fibres sont les variétés qui ont le type d'homotopie des bouquets dans b). Ceci est démontré par Milnor dans [3], mais pour construire un feuilletage (sans s'occuper de la condition b)) tout ce qu'il faut savoir est que  $\varphi$  est une submersion ; ce qu'on voit immédiatement du fait que  $\varphi(e^{it} z) = e^{i\varphi t} \varphi(z)$  pour  $z \in M'$ .

Maintenant,  $0$  est une valeur régulière de  $P_1$  donc pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  assez petit,  $T(L) = P_1^{-1}(D^2(\varepsilon))$  est un voisinage tubulaire de  $L$  difféomorphe à  $D^2 \times L$ . Notons  $L(\theta) = \varphi^{-1}(e^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , et  $R(\theta) = \{re^{i\theta} \mid 0 < r \leq \varepsilon\}$ . Alors :

$$P_1^{-1}(R(\theta)) = T(L) \cap L(\theta) .$$

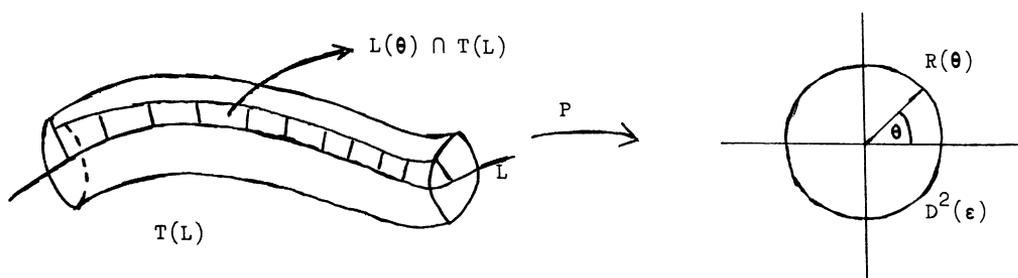


Figure 1

Maintenant on change le feuilletage de  $M'$  donné par la fibration de telle façon que les feuilles dans  $M$  soient les fibres et que l'on ait une famille de feuilles compactes dans  $T(L)$  qui sont  $\partial T_s(L)$ ,  $0 < s \leq \epsilon/2$ , où  $T_s(L) = P_1^{-1}(D^2(s))$ . Ceci se fait de la manière suivante : dans  $D^2(\epsilon) - \{(0,0)\}$ , soit  $F_0$  un feuilletage de classe  $C^\infty$  [  $F_0$  ne sera pas tangent à  $\partial D^2(\epsilon)$  ], dont les feuilles sont les segments de  $R(\theta)$  dans  $D^2(\epsilon) - D^2(3\epsilon/4)$ , qui ensuite spiralent autour du cercle de rayon  $\epsilon/2$ . Et dans  $D^2(\epsilon/2) - \{(0,0)\}$ , les feuilles sont les cercles concentriques centrés en  $(0,0)$  (voir figure 2). Or,  $P_1^*(F_0)$  est un feuilletage de  $T(L) - L$  qui coïncide avec les fibres  $L(\theta)$  dans un voisinage de  $\partial T(L)$ . Donc on obtient un feuilletage de  $S - \text{int}(T_{\epsilon/2}(L)) \cong M$  qui a les propriétés a) et b).

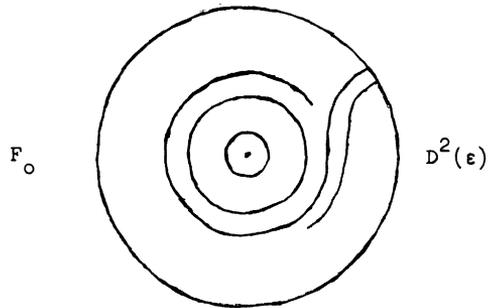


Figure 2

THÉORÈME 1.- Soit  $P$  le polynôme de la proposition 1 et supposons qu'il existe un feuilletage de  $D^2 \times L$ . Alors il existe un feuilletage de  $S^{2n+1}$ .

En fait, on n'a pas besoin de supposer  $P$  homogène. Le théorème de fibration de Milnor est vrai pour une sphère  $S_\epsilon$  centrée à l'origine de rayon  $\epsilon$  assez petit (donc le théorème 1) pourvu que  $P$  soit nul à l'origine et non constant.

Le théorème 1 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.- Si le link  $L$  est l'espace total d'une fibration sur  $S^1$ , alors il existe un feuilletage de  $S^{2n+1}$ .

Démonstration. Soit  $h : L \rightarrow S^1$  la fibration et  $F$  le feuilletage de Reeb de  $D^2 \times S^1$  (exemple 1). Alors  $f = 1 \times h : D^2 \times L \rightarrow D^2 \times S^1$  est une submersion, donc  $f^*(F)$  est un feuilletage de  $D^2 \times L$ .

Remarque.- Milnor a démontré que  $L$  est  $(n-2)$  connexe [3], donc pour  $n \geq 3$  on ne pourrait appliquer le corollaire 1. Lawson l'applique pour  $n = 2$  et puis il fait une récurrence pour feuilletter les sphères  $S^{2^k+3}$ .

IV. Feuilletages de  $S^3$  .

Soit  $P : C^2 \rightarrow C$  le polynôme :

$$P(z_0, z_1) = z_0 + z_1 .$$

Alors  $L \cong S^1$  n'est pas noué dans  $S^3$  . On peut feuilleter  $D^2 \times L$  par l'exemple 1 et  $F(P)$  est le feuilletage que Reeb a trouvé. Plus généralement, soit  $P(z_0, z_1) = z_0^r + z_1^s$ , où  $r, s \geq 2$  . Si  $r$  et  $s$  sont premiers entre eux,  $L$  est un noeud torique de type  $(r, s)$  :

$L \subset \{(z_0, z_1) \mid |z_0| = a, |z_1| = b\}$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives ; en fait

$$L = \{(ae^{is\theta}, be^{ir\theta + \frac{\pi i}{s}}) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\} .$$

Les feuilles dans  $S^3 - (D^2 \times L)$  sont difféomorphes à une surface compacte de genre  $(r-1)(s-1)/2$ , moins un point. Cet exemple et le problème de savoir quand le complément d'un noeud dans  $S^3$  est fibré sur  $S^1$  ont été étudiés complètement par Neuwirth et Stallings [5].

Si  $r = ks$ ,  $L$  est un link torique de  $s$  cercles, chaque cercle étant non noué, et deux cercles quelconques ayant entre eux un nombre d'enlacement égal à  $k$  ; l'ensemble algébrique  $z_0^{ks} + z_1^s = 0$  se compose de  $s$  branches non singulières et la multiplicité d'intersection à l'origine de deux branches est égale à  $k$  . Chaque branche est définie par l'équation :

$$z_1 = \omega z_0^k, \quad \omega^s = -1 .$$

En figure 3, est dessiné le link de  $z_0^3 + z_1^6 = 0$  .

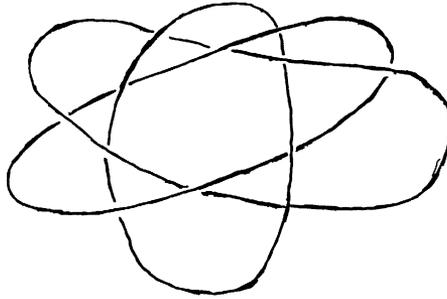


Figure 3

### V. Un feuilletage de $S^5$ .

Regardons le polynôme  $P : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$P(z) = z_0^3 + z_1^3 + z_2^3.$$

L'équation  $P = 0$  définit une courbe  $K$  projective dans  $P_2(\mathbb{C})$  sans singularité. Le genre de  $K$  est donné par  $(d-1)(d-2)/2$ , où  $d = 3$ ; formule bien connue en géométrie algébrique ([7] pages 68 et 74). Donc  $L$  est un fibré sur le tore  $T^2$  de fibre  $S^1$ , par la projection  $S^2(\mathbb{C}) \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ . Par projection de  $T^2$  sur  $S^1$ , on voit que  $L$  est un fibré sur  $S^1$ ; donc par le corollaire 1, on a :

THÉOREME 2.- Il y a un feuilletage de  $S^5$  avec une feuille compacte  $B$ , tel que :

- a)  $B$  est homéomorphe à  $S^1 \times L$ , où  $L$  est un fibré sur  $T^2$  de fibre  $S^1$ ,
- b) les feuilles non compactes dans une composante de  $S^5 - B$  sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^2 \times T^2$ ,
- c) les feuilles dans l'autre composante ont le type d'homotopie d'un bouquet de huit sphères  $S^2$ .

COROLLAIRE 2.- Il existe un feuilletage de  $D^2 \times S^3$ .

Démonstration. Soit  $F$  le feuilletage de  $S^5$  donné par le théorème 2. Soit  $\gamma$  une transversale fermée pour  $F$ , c.à.d.,  $\gamma$  est l'image d'un plongement  $f : S^1 \rightarrow S^5$  qui est transversal à  $F$ . Il est facile de construire un tel plongement en partant d'un champ de vecteurs transverse à  $F$  et en modifiant une orbite récurrente du champ. Maintenant, faisons la modification décrite dans l'exemple 2. On obtient un feuilletage  $F(\gamma)$  de  $S^5$  tel que le complément de  $\text{int } T(\gamma)$  est une réunion de feuilles ;  $T(\gamma) \cong S^1 \times D^4$  est un voisinage tubulaire de  $\gamma$ . Parce que  $\gamma$  n'est pas noué dans  $S^5$ , on sait que  $S^5 - \text{int } T(\gamma) \cong D^2 \times S^3$  ; donc  $F(\gamma)$  définit un feuilletage de  $D^2 \times S^3$ .

COROLLAIRE 3.- Il y a un feuilletage de  $D^2 \times V_{4,2}$  ( $V_{n,k}$  = les  $k$ -repères orthonormaux dans  $R^n$ ).

Démonstration.  $V_{4,2} = SO(4)/SO(2)$  est un fibré sur  $SO(4)/SO(3) = S^3$  ; donc on relève le feuilletage de  $D^2 \times S^3$  par la fibration  $D^2 \times V_{4,2} \rightarrow D^2 \times S^3$ .

## VI. Feuilletages de $S^{2^k+3}$ .

Soit  $P : C^{n+1} \rightarrow C$  le polynôme :

$$P(z) = z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

On voit que  $L$  est difféomorphe à  $T_1(S^n)$  - le fibré des vecteurs tangents à  $S^n$  de longueur 1 : écrivons

$$z = x + iy, \quad x, y \in R^{n+1},$$

$$P(z) = |x|^2 - |y|^2 + 2i\langle x, y \rangle.$$

Donc  $L = \{ (x, y) \mid |x|^2 = |y|^2, \langle x, y \rangle = 0, |x|^2 + |y|^2 = 1 \}$ .

Maintenant du théorème 1 on déduit :

COROLLAIRE 4.- Chaque fois que l'on sait feuilletter  $V_{n+1, 2} \times D^2$ , on sait feuilletter  $S^{2n+1}$ .

Démonstration.  $T_1(S^n) \cong V_{n+1, 2}$ .

COROLLAIRE 5.- Si on sait feuilletter  $S^n \times D^2$ , on sait feuilletter  $S^{2n+1}$ .

Démonstration.  $V_{n+1, 2} = SO(n+1)/SO(n-1)$  est une fibration sur  $SO(n+1)/SO(n) = S^n$ .

THÉORÈME 3.- Il existe un feuilletage de  $S^{2^k+3}$ , pour  $k = 1, 2, \dots$ .

Démonstration. Si  $F$  est un feuilletage de  $S^{n+2}$ , en modifiant  $F$  suivant une transversale fermée (non nouée), on obtient un feuilletage de  $S^n \times D^2$  (voir exemple 2). Donc par le corollaire 5, on obtient un feuilletage de  $S^{2n+1}$ . Commençons avec un feuilletage de  $S^5$ , on obtient par récurrence un feuilletage de chaque sphère  $S^{2^k+3}$  :  $n+2 = 2^k+3 \Rightarrow 2n+1 = 2^{k+1}+3$ .

COROLLAIRE 6.- Pour  $n = 2^k + 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , il y a un feuilletage de  $S^n \times D^2$  et  $V_{n+1, 2} \times D^2$ .

COROLLAIRE 7.- Pour  $n = 2^k + 4$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , il y a des feuilletages de  $SO(n)$ ,  $SU(n/2)$ ,  $Sp(n/4)$  (pour  $Sp(n/4)$ , il faut supposer  $k > 1$ ).

#### VII. Feuilletages des sphères exotiques.

Soit  $L^{2n-1}(d)$  le link du polynôme :

$$P(z) = z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

Si  $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ,  $L^{2n-1}(d)$  est difféomorphe à  $S^{2n-1}$  et est noué dans  $S^{2n+1}$  [3]. Quand  $d \equiv \pm 3 \pmod{8}$ , et  $n+1$  n'est pas une puissance de 2,

$L^{2n-1}(d)$  est une sphère exotique.

**THÉOREME 4.-** Pour  $n = 2^k + 3$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , et pour tout  $d \geq 1$ , il existe un feuilletage de  $L^n(d)$ .

Démonstration. Soit  $\varphi$  l'action de  $SO(n)$  sur  $L = L^{2n-1}(d)$ , définie par :

$$(z_0, z) \rightarrow (z_0, \sigma(x) + i\sigma(y))$$

où  $\sigma \in SO(n)$ ,  $(z_0, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ , et  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Parce que  $|\sigma(x)| = |x|$  et  $\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ ,  $L$  est invariant par l'action. Il y a deux types d'orbites de  $\varphi$  dans  $L$ . Si  $x$  et  $y$  sont indépendants, le sous-groupe d'isotropie en  $(z_0, x + iy) \in L$  est  $SO(n-2)$ . et l'orbite est  $SO(n)/SO(n-2) = V_{n,2}$ . Si  $x$  et  $y$  sont dépendants, le sous-groupe d'isotropie est  $SO(n-1)$  et l'orbite est  $S^{n-1}$ .

L'espace des orbites  $N = L/SO(n)$  est stratifié par les orbites d'un type donné et la projection  $\pi : L \rightarrow N$  est une fibration quand elle est restreinte aux orbites du même type [4]. Dans ce cas,  $N$  est difféomorphe à  $D^2$  avec les strates  $\text{int } D^2$  et  $\partial D^2$  [1]. Pour  $z \in \text{int } D^2$ ,  $\pi^{-1}(z) = V_{n,2}$ , et pour  $z \in \partial D^2$ ,  $\pi^{-1}(z) = S^{n-1}$ .

Soit  $B = \pi^{-1}(D^2(1/2))$ . Alors  $\pi : B \rightarrow D^2(1/2)$  est une fibration, donc  $B \cong V_{n,2} \times D^2$ . Pour  $n = 2^k + 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on peut feuilletter  $B$  par le corollaire 6.

Pour feuilletter  $T = L - \text{int } B$ , on remarque que si  $\gamma$  est une courbe lisse dans  $D^2$ , orthogonale à  $\partial D^2$ , alors  $\pi^{-1}(\gamma)$  est une sous-variété de codimension 1 de  $L$ . Donc on peut feuilletter  $\{z \in D^2 \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$  avec le feuilletage  $F_0$  de la proposition 1, et puis on relève  $F_0$  par  $\pi^{-1}$  pour feuilletter  $T$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. HIRZEBRUCH und K. MAYER - 0(n)-Mannifaltigkeiten, exotische sphären und singularitäten, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [2] H. LAWSON - Codimension-one foliations of spheres, à paraître.
- [3] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [4] D. MONTGOMERY and C. YANG - The existence of a slice, Ann. of Math., 65 (1957), p. 108-116.
- [5] L. NEUWIRTH - On Stallings fibrations, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), p. 380-381.
- [6] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.
- [7] J.-P. SERRE - Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959.
- [8] J. WOOD - Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math., vol. 89 (1969), p. 336-358.