

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Le groupe de Cremona

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 413, p. 261-276

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__261_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE GROUPE DE CREMONA D'APRÈS DEMAZURE

par André HIRSCHOWITZ

0. Introduction

En première approximation, le groupe de Cremona à n variables est le groupe des \mathbb{C} -automorphismes de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Ce groupe est bien trop gros pour être algébrique (voici, pour les sceptiques, une flopée d'automorphismes :

$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + P(x_1))$). Cependant, il a un rôle important à tenir dans l'étude des variétés rationnelles si bien que les renseignements le concernant sont activement recherchés. Une façon naturelle de l'aborder consiste à étudier ses sous-groupes algébriques. Pour mettre en évidence des sous-groupes algébriques, on dispose de la remarque suivante : Soit X une variété rationnelle de dimension n complète. La composante neutre du groupe des automorphismes de X définit, via les isomorphismes entre $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, une classe de conjugaison de sous-groupes algébriques du groupe de Cremona.

En 1893, Enriques a montré (cf. [5] et [4]) que tous les sous-groupes algébriques connexes maximaux du groupe de Cremona à deux variables sont décrits par le procédé ci-dessus et qu'on peut choisir X lisse. On observe alors que ces groupes sont de rang deux de centre nul, et que leur partie réductive est de type A .

Plus récemment, Demazure a conçu le projet d'adopter un point de vue analogue pour étudier le groupe de Cremona à n variables sur un corps quelconque. Le fruit de ses observations a fait l'objet de la publication (cf. [1]) dont le présent exposé prétend rendre compte.

Pour pouvoir exploiter les techniques habituelles de la théorie des groupes algébriques, Demazure concentre son effort sur les sous-groupes algébriques du groupe de Cremona contenant un tore déployé de dimension n . Il peut alors développer une théorie des racines qui rappelle celle des groupes réductifs déployés (cf. [6]) et qui lui permet de classifier les sous-groupes en question par ce qu'il appelle les systèmes d'Enriques. On constate ainsi que la partie réductive de ces sous-groupes est de type A et que ceux qui sont semi-simples sont des produits de groupes projectifs.

Le reste du travail est consacré à une noble entreprise : réaliser les sous-groupes en question comme groupes d'automorphismes de variétés rationnelles lisses (en vérité, on aurait préféré pouvoir choisir ces variétés rationnelles lisses propres). A cet effet, Demazure introduit certains objets de nature combinatoire, les éventails auxquels il associe des \mathbb{Z} -schémas rationnels de dimension n munis de l'opération fidèle d'un tore déployé de rang n . Voyons dès maintenant ces éventails de plus près.

1. Eventails et schémas associés

Soit M un groupe abélien libre de type fini.

DÉFINITION 1.- On appelle éventail dans M tout ensemble E fini non vide de parties de M^* vérifiant :

E_1 Tout élément de E est une base incomplète de M^* .

E_2 Toute partie de M^* contenue dans un élément de E est un élément de E .

E_3 Si K et L sont deux éléments de E , on a $N(K \cap L) = NK \cap NL$ où NK par exemple désigne l'ensemble des combinaisons à coefficients dans \mathbb{N} d'éléments de K .

DÉFINITION 2.- On appelle support de l'éventail E la réunion $|E|$ des éléments de E .

Notons \mathbb{N}^+K l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers strictement positifs d'éléments de K (en particulier $\mathbb{N}^+\emptyset = \{0\}$).

DÉFINITION 3.- On dit que l'éventail E est complet si les \mathbb{N}^+K forment une partition de M^* lorsque K décrit E .

Avant de donner des exemples, montrons comment on associe à un éventail un \mathbb{Z} -schéma.

Pour K dans E , notons M_K le sous-monoïde de M formé des $m \in M$ tels que $\langle r, m \rangle \geq 0$ pour tout r dans K .

Notons $\mathbb{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M , qui est engendrée par les e^m où m décrit M . Notons V_K le spectre premier du sous-anneau $\mathbb{Z}[M_K]$ de $\mathbb{Z}[M]$ engendré par les e^m où m décrit M_K . Si $K = \emptyset$, V_K est le \mathbb{Z} -tore T dual de M . Si K est une base, V_K est isomorphe à \mathbb{G}_a^n et si K est quelconque, V_K est isomorphe à un produit de groupes additifs et multiplicatifs. L'isomorphisme canonique entre M et $\text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ permet de définir une opération de T sur le \mathbb{Z} -groupe $\mathbb{Z}[M_K]$ qui induit une opération de T sur le \mathbb{Z} -schéma V_K . Il nous reste à recoller les V_K . Voici le lemme qu'on utilise :

Lemme 4.- Si $L \subset K$, l'injection de M_K dans M_L induit un morphisme canonique de V_L dans V_K :

a) Ce morphisme est une immersion ouverte de \mathbb{Z} -schémas, compatible avec l'opération de T .

b) Le morphisme canonique de $V_{K \cap L}$ dans $V_K \times V_L$ est une immersion fermée.

Notons que c'est l'axiome E_3 qui permet de montrer la seconde partie du lemme.

DÉFINITION 5.- On appelle schéma associé à l'éventail E le schéma \hat{E} obtenu en recollant les V_K à l'aide des immersions décrites dans le lemme précédent.

On voit sans difficulté que \hat{E} est un \mathbf{Z} -schéma lisse séparé de présentation finie et à fibres intègres.

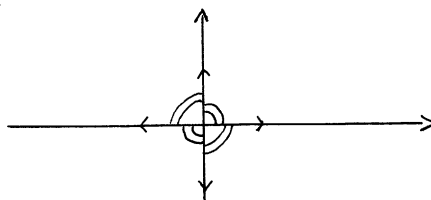
PROPOSITION 6.- Pour que \hat{E} soit propre, il faut et il suffit que E soit complet.

On peut montrer que si E est complet, ses éléments maximaux sont des bases.

Donnons maintenant des exemples :

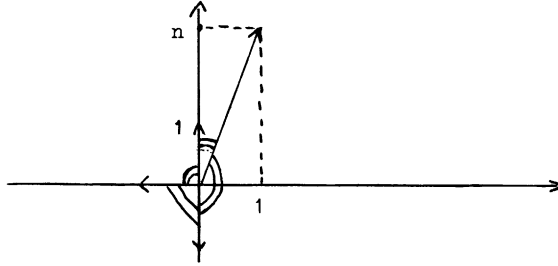
a) $M^* = \mathbf{Z}^n$ (r_1, \dots, r_n) est la base canonique et, par définition $r_{n+1} = -r_1 - r_2 - \dots - r_n$. Posons $|E| = \{r_1, \dots, r_n, r_{n+1}\}$ et considérons l'éventail E dont les éléments sont les parties de $|E|$ distinctes de $|E|$. Le schéma \hat{E} , obtenu en recollant $(n + 1)$ espaces affines, est un espace projectif. Rien d'étonnant à ce qu'il soit propre : on vérifie sans difficulté que E est complet.

b) $M^* = \mathbf{Z}^2$, (e_1, e_2) est la base canonique. $|E| = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ et E est engendré par (e_1, e_2) , $(e_1, -e_2)$, $(-e_1, e_2)$, $(-e_1, -e_2)$ ce qui se mémorise à l'aide du dessin suivant



Les angles mis en évidence sont ceux définis par des parties à deux éléments de E . Dire que E est complet revient à dire que la réunion de ces angles est l'espace entier. Dans \mathbf{Z}^3 la situation est analogue : ce sont les angles solides qui interviennent. Dans l'exemple qui nous occupe $\hat{E} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

c) $M^* = \mathbb{Z}^2$. Représentons l'éventail par le dessin



Le schéma \hat{E} est la surface F_n obtenue en adjoignant (de la façon évidente) une section à l'infini au fibré $\mathcal{O}(n)$ sur la sphère de Riemann.

b) On peut distinguer les éventails convexes : E est convexe si les éléments maximaux de E sont des bases et si, K étant un tel élément et r un point de $|E| - K$, la somme des coordonnées de r dans K est négative. Soit ω_E le faisceau inversible canonique sur \hat{E} . On peut montrer que pour que E soit convexe, il faut et il suffit que ω_E^{-1} soit ample. De façon plus générale, on peut se demander si tous les \hat{E} sont quasi-projectifs. La réponse est négative même dans le cas propre (cf. [3]). Demazure donne un critère numérique de quasi-projectivité issu de l'étude de $\text{Pic } \hat{E}$.

2. Automorphismes du \mathbb{Z} -schéma \hat{E} associé à E

On connaît déjà le sous-tore T de $\text{Aut}(\hat{E})$.

Soient k un corps et a dans $M = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$. Notons $T \times_a \mathbb{G}_a$ le produit semi-direct de T par \mathbb{G}_a pour l'opération de T sur \mathbb{G}_a définie par a .

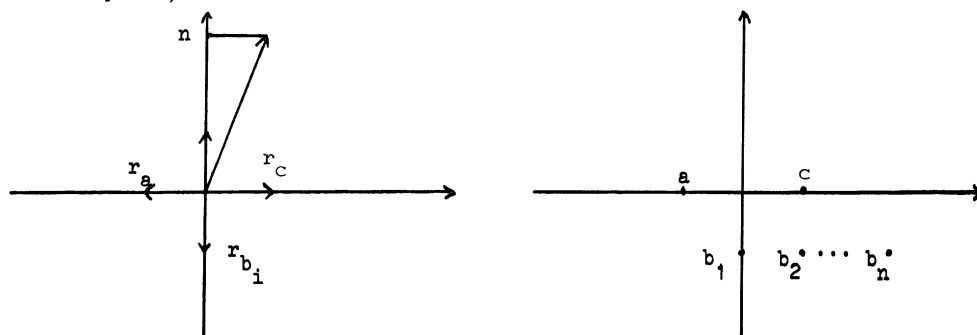
DÉFINITION 7. - On dit que a est une racine de E s'il existe une opération de $(T \times_a \mathbb{G}_a)_k$ sur \hat{E}_k prolongeant l'opération canonique de T_k sur \hat{E}_k et n'induisant pas l'opération triviale de \mathbb{G}_a .

Nous allons tout de suite donner la caractérisation combinatoire qui permet de repérer les racines dans la pratique.

THÉORÈME 8.- Pour que a soit racine de E , il faut et il suffit qu'il existe r_a dans $|E|$ vérifiant :

- 1°) $\langle r_a, a \rangle = 1$ et $\forall r \in |E| - \{r_a\}$, $\langle r, a \rangle \leq 0$.
 2°) Si $K \in E$ et $\forall r \in K$, $\langle r, a \rangle = 0$, alors $K \cup \{r_a\} \in E$.

On peut vérifier que si E est complet, la condition 2°) est superflue. D'autre part, il résulte de la première condition que si a est une racine, r_a est bien déterminé. A titre d'exemple, cherchons les racines dans le cas de l'exemple c) ci-dessus



On obtient dans M les racines a, b_1, \dots, b_n dessinées ci-dessus. Voyons maintenant de plus près les automorphismes de \hat{E} associés à a .

THÉORÈME 9.- Il existe un monomorphisme unique x_a de G_a dans $\text{Aut}(\hat{E})$ tel que, si S est un k -schéma, si $\ell \in G_a(S)$ et $t \in T(S)$, on ait :

- 1°) $tx_a(\ell)t^{-1} = x_a(a(t)\ell)$.
 2°) Si $1 + \ell/a(t)$ est inversible, alors $x_a(\ell)$ transforme t en $tr_a(1 + \ell/a(t))$:

L'image U_a de x_a est donc un sous-groupe normalisé par T dans $\text{Aut}(\hat{E})$. On l'appellera groupe à un paramètre d'automorphismes de \hat{E} associé à la racine a .

Si a et b sont deux racines de E , quelles sont les relations de commutation entre les automorphismes associés ?

THÉORÈME 10.- 1°) Si $r_a = r_b$ ou si $\langle r_a, b \rangle = \langle r_b, a \rangle = 0$, les deux sous-
groupes à un paramètre commutent.

2°) Si $\langle r_b, a \rangle = 0$, alors si on pose $\langle r_a, b \rangle = -n$, les éléments $b + pa$ sont racines de E pour $0 \leq p \leq n$ et on a, pour tout schéma S et tous
 ℓ, ℓ' dans $\mathbb{G}_a(S)$

$$x_a(\ell)x_b(\ell')x_a(\ell)^{-1} = \prod_{0 \leq p \leq n} x_{b+pa}((-1)^p \binom{n}{p} \ell^p \ell').$$

3°) Si $a + b = 0$, il existe un homomorphisme unique $\varphi : G_{2, \mathbb{Z}} \rightarrow \text{Aut}(\hat{E})$ tel
que $\varphi \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_a(\ell)$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} = x_b(\ell)$, $\varphi \begin{pmatrix} \ell' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r_a(\ell')$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell' \end{pmatrix} = r_b(\ell')$
pour tous ℓ, ℓ' et S tels que $\ell \in \mathbb{G}_a(S)$ et $\ell' \in \mathbb{G}_m(S)$.

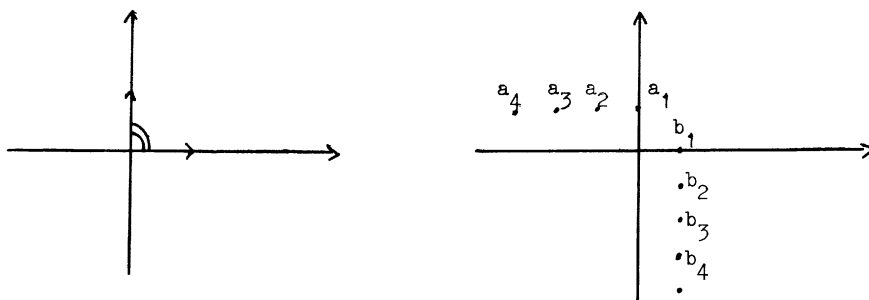
On notera que le théorème ci-dessus est muet sur le cas où $\langle r_a, b \rangle < 0$ et $\langle r_b, a \rangle < 0$. Ce qui se passe, c'est que sous l'une des trois hypothèses ci-dessus, T, U_a et U_b acceptent d'engendrer un sous-groupe représentable de $\text{Aut}(\hat{E})$. Plus précisément :

THÉORÈME 11.- Soit R un ensemble fini de racines de E et pour $a \in R$ soit
 r_a l'élément qui lui est associé par le théorème 8. Pour qu'il existe un sous-
schéma en groupe G de $\text{Aut}(\hat{E})$ contenant T , affine, lisse et à fibres con-
nexes dont l'ensemble des racines relativement à T soit R , il faut et il
suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées.

1°) $\forall a, b \in R$, si $a + b$ est une racine de E , alors $a + b \in R$.

2°) $\forall a, b \in R$, si $\langle r_a, b \rangle < 0$ et $\langle r_b, a \rangle < 0$, alors $a + b = 0$.

Exemple.— Considérons l'éventail E dans \mathbb{Z}^2 correspondant au dessin



\hat{E} est l'espace affine \mathbb{C}_a^2 et l'ensemble des racines de E est réunion de deux suites (a_n) et (b_n) .

Les ensembles R décrits dans le théorème sont : les parties finies de (a_n) ou de (b_n) , les parties de la forme $(b_1, a_1, a_2, \dots, a_p)$ ou $(a_1, b_1, b_2, \dots, b_p)$ et la partie (a_1, a_2, b_1, b_2) . On peut vérifier à l'aide du théorème que $x_a(\ell)$ transforme (t_1, t_2) en $(t_1 + \ell t_2^{p-1}, t_2)$ et $x_b(\ell)$ transforme (t_1, t_2) en $(t_1, t_2 + \ell t_1^{p-1})$. On remarque en particulier que, pour $p = 3$, ces deux sous-groupes à un paramètre ne sont pas contenus dans un même sous-schéma en groupes de $\text{Aut}(\hat{E})$ contenant T .

Signalons enfin que, dans la situation du théorème 11, il existe un sous-éventail E' de E tel que le sous-schéma ouvert \hat{E}' de \hat{E} soit stable et homogène sous G .

3. Le groupe de Cremona et ses tores

Voici la définition que Demazure donne du groupe de Cremona :

Soient S un schéma, X et Y deux S -schémas lisses séparés et de type fini. Un ouvert U de X est S -dense si, pour chaque $s \in S$, U_s est un ouvert dense de la fibre X_s . Un S -pseudo-morphisme est une classe d'équivalence de couples (U, f) , où U est un ouvert S -dense de X et f un S -

morphisme de U dans Y , deux couples (U, f) et (U', f') étant équivalents si f et f' coïncident sur $U \cap U'$. Les S -pseudo-morphismes se composent sous certaines conditions et on a des notions naturelles de S -pseudo-isomorphisme et de S -pseudo-automorphisme. Si X est un S -schéma lisse séparé de type fini, on note $\text{Psaut}(X/S)$ le groupe des S -pseudo-automorphismes de X . Quand S' varie dans la catégorie des S -schémas, les $\text{Psaut}(X_{S'}/S')$ s'organisent en un S -foncteur en groupes noté $\text{Psaut}_S(X)$. Le groupe de Cremona à n -variables sur k est le k -foncteur en groupe $\text{Psaut}_k(\mathbb{P}_k^n)$.

Ce groupe mérite son nom puisque $\text{Cr}_{nk}(k)$ est le groupe opposé au groupe des k -automorphismes de $k(x_1, \dots, x_n)$. En revanche, si A est une k -algèbre, $\text{Cr}_{nk}(A)$ n'est pas en général anti-isomorphe au groupe des A -automorphismes de $A(x_1, \dots, x_n)$. Remarquons que $\text{Cr}_{1,k}(k)$ est le groupe $\text{PGL}_{2,k}$. Mais l'algèbre de Lie de $\text{Cr}_{1,k}$ (au sens de la théorie des groupes algébriques [2]) est un k -espace vectoriel de dimension infinie : le groupe $\text{Cr}_{1,k}(k[\varepsilon])$ contient en effet un sous-groupe anti-isomorphe au groupe des $k[\varepsilon]$ automorphismes de $k[\varepsilon, t]$ et ce groupe est décidément trop gros.

On voit sur l'exemple précédent que le foncteur $\text{Psaut}_S(X)$ n'est pas représentable en général.

Rappelons maintenant qu'un k -tore déployé est un k -groupe isomorphe à un groupe G_m^n . On s'intéressera seulement dans la suite aux tores déployés.

Voici les observations qu'on peut faire sur les sous-tores déployés de $\text{Cr}_{n,k}$:

PROPOSITION 12.- Les sous-tores de $\text{Cr}_{n,k}$ sont de dimension au plus n . Ceux qui sont déployés de dimension n sont conjugués (et maximaux).

On aimerait bien savoir que tout sous-tore déployé de Cr_{nk} est contenu dans un sous-tore déployé de dimension n . Il reviendrait au même de résoudre le joli problème que voici. Soit L une extension de k telle que $L(t)$ soit pure.

Montrer que L est pure.

Voici un autre aspect des sous-tores de $Cr_{n,k}$.

PROPOSITION 13.- Soit T un sous-tore déployé de dimension n de $Cr_{n,k}$.

. T est son propre centralisateur, en particulier, c'est un sous-groupe commutatif maximal de $Cr_{n,k}$.

. Le normalisateur N de T est un k -schéma en groupes localement algébrique lisse.

. Le morphisme canonique $N/T \rightarrow \text{Aut}(T)$ est un isomorphisme.

Les tores déployés de rang n seront, dans la suite, exploités à travers la remarque suivante : les groupes $\text{Psaut}(T)$ et $Cr_{n,k}$ sont isomorphes. Ce fait sera utilisé sous la forme plus précise que voici :

PROPOSITION 14.- Soit T un sous-tore déployé de rang n de $Cr_{n,k}$. Il existe un isomorphisme de $Cr_{n,k}$ sur $\text{Psaut}(T)$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Cr_{n,k} & \rightarrow & \text{Psaut}(T) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & T & \end{array}$$

commutatif.

4. Classification des sous-groupes en question

Nous supposons ici que k est de caractéristique 0 mais Demazure traite le cas général.

Soit G un sous-groupe algébrique lisse de $Cr_{n,k}$ contenant un tore déployé T de dimension n . On peut montrer qu'il existe un sous-groupe H tel que G/H soit un k -schéma rationnel et un isomorphisme de $\text{Psaut}(G/H)$ dans $Cr_{n,k}$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G & \rightarrow & \text{Aut}(G/H) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Cr}_{n,k} & \leftarrow & \text{Psaut}(G/H)
 \end{array}$$

commutatif.

On utilise plutôt la proposition 14 qui nous ramène à l'étude des diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 G & \rightarrow & \text{Psaut}(T) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & T &
 \end{array}$$

commutatifs.

Poursuivons la métamorphose du problème.

DÉFINITION 15.- On appelle pseudo-opération de G sur le k -schéma X tout homomorphisme de G dans $\text{Psaut}(X)$.

A toute opération de G sur X (homomorphisme de G dans $\text{Aut}(X)$) correspond de façon naturelle un morphisme de $G \times_k X$ dans X . On peut, de façon analogue, associer à toute pseudo-opération un pseudo-morphisme de $G \times_k X$ dans X qui la caractérise : A tout h dans $\text{Psaut}(G \times_k X/G)$ correspond un morphisme $m(h)$ entre les k -foncteurs (à valeurs ensembles) G et $\text{Psaut}(X)$. Notons A l'ensemble des h tels que le morphisme $m(h)$ soit un morphisme de groupes. A tout h dans A on peut maintenant associer (par projection sur le second facteur) un pseudo-morphisme $p(h)$ de $G \times_k X$ dans X .

PROPOSITION 16.- L'application m de A dans $\text{Hom}(G, \text{Psaut}(X))$ est bijective et l'application p restreinte à A est injective.

Soit alors $T \rightarrow G \rightarrow \text{Psaut}(T)$ comme ci-dessus et notons $*$ la pseudo-opération correspondante de G sur T .

PROPOSITION 17.- La formule $f(g) = g * 1$ définit un pseudo-morphisme de G dans T qui caractérise le diagramme.

On peut caractériser les pseudo-morphismes de G dans T obtenus de cette façon. On obtient la :

DÉFINITION 18.- Soit G un k -groupe algébrique lisse et soit T un sous-tore déployé de G . Un pseudo-projecteur de G sur T est un pseudo-morphisme f de G dans T vérifiant les axiomes :

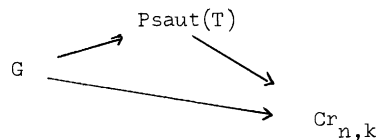
P_1 Si S est un k -schéma, si g, g' sont dans $G(S)$ et si $f(g')$ est défini, alors $f(gg')$ est défini si et seulement si $f(gf(g'))$ l'est, on a dans ce cas $f(gg') = f(gf(g'))$.

P_2 f est défini en tout point de T et induit l'identité sur T .

P_3 Si S est un k -schéma, si g et g' sont dans $G(S)$ et si $f(gt) = f(g't)$ pour tout point t de T à valeur dans un S -schéma tel que $f(gt)$ et $f(g't)$ soient définis, alors $g = g'$.

La proposition 14 peut s'exprimer maintenant de la façon suivante :

DÉFINITION 19.- Soient G un sous-groupe algébrique de $Cr_{n,k}$ et f un pseudo-projecteur de G sur T . On dit que f est adapté à l'inclusion de G dans $Cr_{n,k}$ s'il existe un isomorphisme entre $Psaut(T)$ et $Cr_{n,k}$ rendant le diagramme



commutatif.

PROPOSITION 20.- Soient G un sous-groupe algébrique lisse de $Cr_{n,k}$ et T un sous-tore de rang n de G . Il existe un pseudo-projecteur f de G sur T adapté à l'inclusion de G dans $Cr_{n,k}$.

Soit maintenant f un pseudo-projecteur d'un groupe algébrique lisse G sur T . Notons M le groupe $\text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ des caractères de T , $M^* = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ le groupe abélien dual et \langle, \rangle la dualité entre M et M^* . Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et, pour tout $m \in M$, soit \mathfrak{g}^m le sous-espace propre de la représentation adjointe de T dans \mathfrak{g} correspondant à la valeur propre m . Les racines de G relativement à T sont les $a \in M$ tels que $a \neq 0$ et $\mathfrak{g}^a \neq \{0\}$. On note R l'ensemble des racines et on sait que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \sum_{a \in R} \mathfrak{g}^a$. Ce décor permet de décrire le groupe G de la façon suivante :

THÉORÈME 21.- Le groupe G est affine et T y est son propre centralisateur.

Si G est connexe, $\text{Cent}(G) = \bigcap_{a \in R} \ker a \subset T$.

. Pour tout a dans R , \mathfrak{g}^a est de dimension un, il existe un sous-groupe fermé U_a de G tel que $\text{Lie}(U_a) = \mathfrak{g}^a$.

. Il existe un isomorphisme x_a de \mathbb{G}_a dans U_a et un élément s_a de M^* , uniquement déterminés tels que pour tout k -schéma S , pour tout $t \in T(S)$ et tout $\ell \in \mathbb{G}_a(S)$, on ait :

$$tx_a(\ell)t^{-1} = x_a(a(t)\ell)$$

et
$$f(x_a(\ell)) = s_a(1 + \ell) \quad \text{si } 1 + \ell \text{ est inversible ;}$$

$$\langle s_a, a \rangle = 1 .$$

. G admet un plus grand sous-groupe invariant lisse connexe et unipotent U et un plus grand sous-groupe réductif connexe L contenant T . L est de type A et son centre est un tore.

La composante neutre G^0 de G est le produit semi-direct de L par U .

Si on pose $R_+ = R \cap (-R)$ et $R_- = R - R_+$, on a

$$(a \in R_+) \Leftrightarrow (U_a \subset L) \quad , \quad (a \in R_-) \Leftrightarrow (U_a \subset U) \quad , \quad \text{Lie}(L) = \mathfrak{g}^0 + \sum_{a \in R_+} \mathfrak{g}^a$$

et $U = \prod_{a \in R_-} U_a$ pour n'importe quel ordre total sur R_- .

Les s_a qui apparaissent dans le théorème conduisent Demazure à une description complète de $\text{Lie}(G)$ en termes de générateurs et de relations de commutation. Ils permettent aussi d'immatriculer de façon plus combinatoire les objets que nous étudions :

DÉFINITION 22.- On appelle système d'Enriques tout triplet (M, R, s) où M est un groupe abélien libre de type fini, R une partie finie de M et

$s : a \mapsto s_a$ une application de R dans le dual M^* de M vérifiant :

- 1°) $\forall a \in R, \quad \langle s_a, a \rangle = 1$;
- 2°) $\forall a, b \in R, \quad s_a \neq s_b \Rightarrow \langle s_a, b \rangle \leq 0$.

A tout pseudo-projecteur, on associe le système d'Enriques (M, R, s_a) décrit dans le théorème 21.

THÉORÈME 23.- Soit G (resp. G') un sous-groupe algébrique lisse connexe de $Cr_{n,k}$ contenant un tore déployé T (resp. T') de rang n . A tout choix d'un pseudo-projecteur f (resp. f') adapté à l'inclusion de G (resp. G') dans $Cr_{n,k}$, correspond un système d'Enriques S (resp. S'). Pour que G et G' soient conjugués, il faut et il suffit que S et S' soient isomorphes (en un sens évident). Dans ce cas, on peut plus précisément choisir c dans $Cr_{n,k}(k)$ de façon que $\text{int}_c(G) = G'$ et $\text{int}_c(T) = T'$.

Il reste à voir quels sont les systèmes d'Enriques associés à des pseudo-projecteurs :

DÉFINITION 24.- Le système d'Enriques (M, R, s) est dit saturé si, pour tous a, b dans R vérifiant $\langle s_a, b \rangle < 0$, on a :

$$\langle s_b, a \rangle < 0 \Rightarrow a + b = 0$$

et $\langle s_b, a \rangle = 0 \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} .$

On montre facilement la

PROPOSITION 25.- Le système d'Enriques associé à un pseudo-projecteur est saturé.

Et en associant à tout système d'Enriques saturé un éventail, on montre le

THÉORÈME 26.- La correspondance entre sous-groupes algébriques lisses de rang n de $Cr_{n,k}$ et systèmes d'Enriques définit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes algébriques de rang n de $Cr_{n,k}$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes d'Enriques saturés.

Signalons enfin que l'étude des systèmes d'Enriques "réductifs" permet de montrer que les sous-groupes algébriques lisses semi-simples de rang n de $Cr_{n,k}$ sont des produits de groupes projectifs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. DEMAZURE - Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, Annales Sc. de l'E.N.S., 4e série, t. 3, fasc. 4, 1970, p. 507-588.
- [2] M. DEMAZURE-P. GABRIEL - Groupes algébriques, Tome 1, Masson - North-Holland, 1970.
- [3] A. DOUADY - Le shaddok à six becs, à paraître.
- [4] ENRIQUES - Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano, Rend. Accad. Lincei, 1er sem., 1893.
- [5] L. GODEAUX - Les transformations birationnelles du plan, Mémorial des Sciences Mathématiques, n° 122, Gauthier-Villars, 1953.
- [6] S. G. A. III, Chapitre 22.