PAUL-ANDRÉ MEYER

Le théorème de dérivation de Lebesgue par rapport à une résolvante

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. nº 422, p. 88-97

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__88_0>

LE THÉORÈME DE DÉRIVATION DE LEBESGUE PAR RAPPORT A UNE RESOLVANTE

[d'après G. MOKOBODZKI]

par Paul-André MEYER

Introduction

Le théorème de dérivation de Lebesgue sur la droite peut s'énoncer de la manière suivante.

Soit f une fonction décroissante et positive sur $\mathbb{R}$, continue à droite, bornée et telle que $f(+\infty) = 0$: f s'écrit

(1) $$f(x) = \int_x^\infty \mu(dt)$$ où μ est une mesure positive bornée.

Formons $D_h f(x) = \frac{1}{h}(f(x) - f(x+h))$. Alors :

1) $D_h f$ converge p.p. au sens de Lebesgue lorsque $h \to 0$;

2) la limite de $D_h f$ est la densité de la partie absolument continue de μ ;

3) on a le lemme maximal de Hardy-Littlewood : soit $D^* f = \sup_h D_h f$. Alors

(2) $$\int_x^\infty \varphi_{\{D^*f > c\}}(t)dt \le \frac{f(x)}{c}$$ pour tout $c > 0$.

[On rappelle que $\varphi_{\{..\}}$ est la fonction caractéristique de $\{..\}$! .]

Ce théorème ne passe pas pour évident. Il en existe des généralisations à $\mathbb{R}^n$, et aux intégrales multiples, mais on sait que la situation est plus compliquée que dans $\mathbb{R}$. En voici maintenant une généralisation d'un type tout différent :

Soit f une fonction surharmonique positive dans $\mathbb{R}^3$, potentiel newtonien d'une mesure positive bornée μ

(1') $$f(x) = \int n(x,t)\,\mu(dt) .$$

Formons $D_h f(x) = \frac{c}{h^2}(f(x) - M_{x,h}f)$, où c est une constante convenable, et $M_{x,h}(f)$ est la moyenne de f sur la boule de centre x et de rayon h . Alors :

1) $D_h f$ converge p.p. au sens de Lebesgue lorsque $h \to 0$;

2) la limite de $D_h f$ est la densité de la partie absolument continue de μ ;

3) on a le "lemme maximal" suivant : soit $D^* f = \sup_h D_h f$. Alors

$$\int n(x,t)\,\varphi_{\{D^*f > c\}}(t)dt \leq \frac{f(x)}{c} \qquad \text{pour tout } c > 0 . \tag{2'}$$

C'est vraiment le même théorème ! Personne n'a, semble-t-il, essayé de démontrer des résultats de ce genre en théorie du potentiel avant que Mokobodzki fasse une théorie entièrement générale de la dérivation par rapport à un semi-groupe sous-markovien (ou plus généralement encore une résolvante), qui comprend les deux théorèmes ci-dessus comme cas particuliers. Les résultats de Mokobodzki sont déjà anciens (1969), et n'ont absolument pas été diffusés comme ils le méritent : leur auteur lui-même semble les négliger. On peut renvoyer le lecteur à l'excellente rédaction de Mokobodzki (cf. [1]).

<u>Notations générales</u>

– E est un ensemble muni d'une tribu $\underline{\underline{B}}$. $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une <u>résolvante</u> sousmarkovienne, c'est-à-dire une famille de noyaux positifs sur $(E, \underline{\underline{B}})$ possédant les propriétés

$$\lambda V_\lambda 1 \leq 1 \qquad\qquad V_\lambda - V_\mu = -(\lambda - \mu)V_\lambda V_\mu$$

les noyaux V_λ croissent lorsque λ décroît. Leur limite pour $\lambda \to 0$ est un noyau V , le <u>noyau potentiel</u>, qui n'est en général pas borné. Nous lui imposerons plus loin, toutefois, de n'être "pas trop grand".

– Une fonction f sur E est dite <u>surmédiane</u> si elle est $\underline{\underline{B}}$-mesurable positive, et $\lambda V_\lambda f \leq f$ pour tout $\lambda > 0$. Si de plus on a $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda f = f$, f est dite <u>excessive</u> (la limite au premier membre existe pour toute f surmédiane, on la note $\hat{f}$, et c'est une fonction excessive). On notera $\underline{\underline{S}}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_b$) le cône convexe Λ-stable des fonctions surmédianes finies (resp. bornées).

– L'expression <u>négligeable</u> s'applique à un ensemble négligeable à la fois pour toutes les mesures $V(x,.)$ $(x \in E)$. L'expression <u>presque partout</u> signifie "sauf sur un ensemble négligeable". Par exemple, si $f \in \underline{\underline{S}}$, on a $f = \hat{f}$ p.p. .

- La notation $f \ll g$ (ordre fort) signifie $g = f + h$, où h est <u>surmédiane</u>.

- Nous nous donnons (et donc supposons qu'il existe) un espace vectoriel Λ-stable $\underline{\underline{C}}$ de fonctions $\underline{\underline{B}}$-mesurables bornées sur E , satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) si $f \in \underline{\underline{C}}^+$, Vf est une fonction bornée, et $\lambda V_\lambda f \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} f$ p.p. ,

b) il existe une suite (a_n) d'éléments de $\underline{\underline{C}}$ qui converge vers 1 en croissant,

c) la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{C}})$ engendrée par $\underline{\underline{C}}$ est égale à $\underline{\underline{B}}$ [il suffit même que $\underline{\underline{B}}$ soit contenue dans la complétion universelle de $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{C}})$, mais on n'insistera pas sur ce point].

Si le noyau potentiel V est borné, on peut prendre pour $\underline{\underline{C}}$ l'espace $\underline{\underline{S}}_b - \underline{\underline{S}}_b$.

DÉFINITION.- Soit D un opérateur défini sur $\underline{\underline{S}}$, à valeurs dans l'ensemble des fonctions $\underline{\underline{B}}$-mesurables positives finies ou non (D n'est pas supposé linéaire, pas même positivement homogène). On dit que D est <u>presque dérivant</u> si

1) $D(u + v) \geq Du \qquad (u , v \in \underline{\underline{S}})$
2) $u \leq v , \; u(x) = v(x) \Rightarrow Du(x) \geq Dv(x) \qquad (u , v \in \underline{\underline{S}})$.

On dit que D est <u>dérivant</u> si de plus

3) $h \in \underline{\underline{C}}^+ \Rightarrow DVh = h$ p.p.

4) si $h \in \underline{\underline{C}}^+$, $u \in \underline{\underline{S}} \Rightarrow D(u + Vh) > Du$ p.p. dans l'ensemble $\{Du < \infty , h > 0\}$.

Nous verrons plus loin que 4) est en fait une conséquence des trois autres. Nous abrégerons les mots "opérateur presque dérivant, dérivant" en o.p.d., o.d. . La terminologie de Mokobodzki est différente (opérateurs <u>presque positifs</u> pour les opérateurs satisfaisant à 2)).

Voici des exemples fondamentaux de tels opérateurs : posons $D_\lambda = \lambda(I - \lambda V_\lambda)$. Alors $\bar{D} = \limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ et $\underline{D} = \liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sont des o.d. (sous les hypothèses précédentes d'existence de $\underline{\underline{C}}$) et $D^* = \sup_\lambda D_\lambda$ est un o.p.d. . Signalons tout de suite que l'on peut obtenir des résultats sur $\bar{D}$ et $\underline{D}$, sans aucune hypothèse quant à $\underline{\underline{C}}$, en travaillant sur la résolvante $(V_{\lambda+\mu})_{\lambda>0}$, μ fixe > 0 , et en faisant ensuite tendre μ vers 0 .

Si la résolvante est de la forme $V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt$, où (P_t) est un semi-groupe, on obtient d'autres exemples en remplaçant D_λ par $\frac{1}{t}(I - P_t)$.

<u>Les résultats fondamentaux</u> : <u>énoncés</u>

On expliquera plus loin pourquoi le numérotage des énoncés commence à 2 . <u>Dans les théorèmes</u> 2, 3, 4, D <u>est dérivant</u>.

THÉORÈME 2.- <u>Si</u> u <u>est surmédiane finie</u>, <u>on a</u> $VDu \ll u$.

THÉORÈME 3.- <u>Si</u> h <u>est positive</u>, <u>et</u> Vh <u>finie</u>, <u>alors</u> $DVh = h$ <u>p.p.</u> .

COROLLAIRE.- <u>Si</u> $V|\varphi|$ <u>est finie</u>, $\lambda V_\lambda \varphi \to \varphi$ <u>p.p.</u> .

Noter que c'est un "théorème ergodique local" au sens abélien, dont les hypothèses sont différentes des hypothèses usuelles : il n'y a pas de mesure privilégiée sur E .

COROLLAIRE.- <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont positives</u>, Vf <u>et</u> Vg <u>finies</u>, <u>alors</u>

$$(f \leq g \text{ p.p.}) \Leftrightarrow (Vf \ll Vg) .$$

Voici le théorème de dérivation de Lebesgue, au moins pour les fonctions surmédianes finies. Pour s'en rendre compte, prendre $D = \underline{D}$.

THÉORÈME 4.- <u>Si</u> u <u>est surmédiane finie</u>, <u>on a</u> $Du = \bar{D}u$ <u>p.p.</u> .

Ce théorème donne aussi la décomposition de Lebesgue : posons $VDu = u'$ et $u - VDu = u''$. Alors u'' est excessive (th. 2) ; $Du'' = 0$ p.p., et tout potentiel $Vh \ll u$ est tel que $Vh \ll u'$. Ainsi u' est "absolument continue" et u'' "singulière" .

On suppose maintenant que D est <u>presque dérivant</u>. Le théorème suivant correspond au lemme maximal de Hardy-Littlewood, mais il a un champ d'application bien plus vaste. Dans la théorie de la dérivation classique, il sert à démontrer le th. de Lebesgue. Ici, il est assez curieux qu'on ne sache le démontrer qu'après les autres théorèmes.

THÉORÈME 5.- Supposons que $V1$ soit finie, et que D soit un opérateur presque dérivant tel que $DV\lambda \leq \lambda$ p.p. pour $\lambda \in R_+$. On a alors pour $u \in \underline{\underline{S}}$

$$u \geq \lambda . VI_{\{Du \geq \lambda\}} .$$

L'opérateur D^* satisfait aux hypothèses ci-dessus, et l'inégalité est vraie pour D^* même si $V1$ n'est pas finie.

La méthode de démonstration des quatre théorèmes repose entièrement sur l'emploi des réduites, dont l'existence et les propriétés essentielles sont données dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 1.- Soit u une fonction mesurable positive. Il existe une plus petite fonction surmédiane majorant u . On l'appelle la réduite au-dessus de u , et on la note Ru .

Si $u = v - w$ $(v \in \underline{\underline{S}}, w \in \underline{\underline{S}})$, on a $Ru \ll v$.

Si de plus $v = Vh$ $(h \geq 0)$ et $A = \{u = Ru\}$, alors $Ru \ll V(hI_A)$.

Remarque.- Soit D un opérateur satisfaisant à 1 , 2 , 3 ; l'opérateur $D' = tD + (1 - t)\bar{D}$ satisfait à 1 , 2 , 3 et 4 pour tout $t \in]0,1[$, donc $D'u = \bar{D}u$ p.p. si $u \in \underline{\underline{S}}$, d'où le même résultat pour D lui-même (en particulier, D satisfait à 4).

Le théorème 1 est vraiment le résumé de toute la théorie du potentiel par rapport à une résolvante. On ne va pas le démontrer ici, mais plutôt en déduire les autres théorèmes. Il s'établit à partir d'un énoncé analogue de théorie du potentiel discrète, par un "passage du discret au continu". Voir l'article [1] de Mokobodzki (particulièrement, la prop. 12, p. 184 pour la dernière assertion de l'énoncé, et les pages 178-182 pour la première [1]).

---

[1] Pour la seconde assertion, toutefois, Mokobodzki ne traite que le cas où V est borné et $h = 1$. On peut toujours se ramener au cas borné en considérant un noyau $V'f = V(af)$, où a est partout > 0 .

Démonstration du théorème 2

La notation $\underline{\underline{C}}$ est là pour suggérer un espace de fonctions continues bornées. Aussi dirons-nous qu'une fonction k , positive bornée, est "s.c.s." s'il existe des $k_n \in \underline{\underline{C}}^+$ tels que $k = \inf_n k_n$.

Lemme 1.- Pour toute fonction positive mesurable g et toute mesure positive bornée μ , $\mu(g) = \sup \mu(k)$, k s.c.s. $\leq g$.

Raisonnement par classes monotones. On utilise ici le fait que $\underline{\underline{B}}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{C}}$.

Lemme 2.- Si k est positive s.c.s., alors $DVk \leq k$ p.p.

On prend des $k_n \in \underline{\underline{C}}^+$ qui décroissent vers k . Alors $DVk_n = k_n$ p.p. (propriété 3). D'autre part, $Vk \ll Vk_n$, donc $DVk \leq DVk_n$ (propriété 1). Ainsi $DVk \leq k_n$ p.p. pour tout n .

L'énoncé suivant est une forme du principe du maximum et de sa réciproque : cette forme n'est pas tout à fait classique, elle est par ex. établie dans Meyer [2]. L'assertion relative à f s.c.s. résulte du lemme 1 ci-dessus.

Lemme 3.- Si a est surmédiane, f positive, alors $(a \geq Vf$ sur $\{f > 0\}) \Rightarrow$ $(a > Vf$ partout$)$. Inversement, si $a \geq 0$ a cette propriété (même seulement pour f s.c.s) alors a est surmédiane.

Démonstration principale.- Nous partons de $u \in \underline{\underline{S}}$, et nous voulons montrer que $u - VDu \in \underline{\underline{S}}$. Nous allons montrer

si k est s.c.s., $0 \leq k \leq Du$, alors $Vk \ll u$.

Cela suffira : cela entraînera d'abord $VDu \leq u$ (lemme 1). Puis il s'agit de voir si $(I - \lambda V_\lambda)(u - VDu) \geq 0$. Choisissons des k_n s.c.s., croissant avec n , tels que $0 \leq k_n \leq Du$, tels qu'à un x fixé on ait $Vk_n \uparrow VDu$ et $V_\lambda Vk_n \uparrow V_\lambda VDu$. Nous avons d'après la phrase soulignée $(I - \lambda V_\lambda)(u - Vk_n) \geq 0$, et au point x $(I - \lambda V_\lambda)(u - VDu) \geq 0$.

La phrase soulignée, à son tour, s'énonce ainsi (lemme 3). Si h est s.c.s. positive, et $u - Vk \geq Vh$ sur $\{h > 0\}$, alors $u - Vk \geq Vh$.

Supposons le contraire. Choisissons une fonction a partout > 0, somme d'une série (a_n) d'éléments de $\underline{\underline{C}}^+$, et telle que Va soit bornée. Comme $u - Vk \ngeq Vh$, nous pouvons choisir $\lambda > 0$ assez petit pour que $u - Vk + \lambda Va \ngeq Vh$. Posons alors $t = V(h + k) - (u + \lambda Va)$. Comme t prend des valeurs, nous avons $Rt \neq 0$. Soit $A = \{t = Rt\}$; nous avons $Rt \ll V((h + k)I_A)$, donc A n'est pas négligeable. D'autre part, nous avons $u - Vk \geq Vh$ sur $\{h > 0\}$ par hypothèse, donc (Va étant p.p. > 0) $t < 0$ sur $\{h > 0\}$, et $A \subset \{h \leq 0\}$ p.p. . Nous allons montrer que $Du < h + k$ p.p. sur A, et comme $k \leq Du$, $h \leq 0$ p.p. sur A, il en résultera que notre supposition était stupide.

Nous avons $u + \lambda Va + t = V(h + k)$ partout, donc $u + \lambda Va + Rt \geq V(h + k)$ partout, avec égalité sur A. D'après les propriétés 1 et 2 des o.p.d., on a alors $D(u + \lambda Va) \leq D(u + \lambda Va + Rt) \leq DV(h + k)$ sur A. D'après le lemme 2, on a $DV(h + k) \leq h + k$ p.p., et cette fonction étant finie, la propriété 1 entraîne que Du est finie p.p. sur A. Mais alors $D(u + \lambda Va) > Du$ p.p. sur A, d'après la propriété 4 appliquée à chacun des $a_n \in \underline{\underline{C}}^+$. Finalement, on a bien $Du < h + k$ p.p. sur A (c.q.f.d.).

Démonstration du théorème 3

1. Soit $h_n = h_n \wedge na_n$, et supposons le théorème établi pour h_n. Alors $DVh \geq DVh_n$ (propriété 1), qui vaut h_n p.p. d'après notre supposition. Donc $DVh \geq h$ p.p. et $VDVh \gg Vh$. D'autre part $VDVh \ll Vh$ (th. 2), donc $VDVh = Vh$, et la fonction positive $DVh - h$ (dont le potention est fini puisque Vh est finie par hypothèse) a un potentiel nul : donc $DVh = h$ p.p. et le théorème est aussi vrai pour h.

2. On se trouve donc ramené au cas où h est majorée par na_n. Il suffit de montrer que $VDVh = Vh$, pour la raison suivante. Considérons l'ensemble des h positives telles que $DV(h \wedge na_n) = h \wedge na_n$ p.p.. Il contient $\underline{\underline{C}}^+$ d'après la propriété 3, et le fait que $\underline{\underline{C}}$ est $\wedge$-stable. La limite d'une suite croissante

d'éléments de cet ensemble lui appartient encore (même raisonnement qu'en 1. ci-dessus). Si des h_n de cet ensemble décroissent vers h , alors $DV(h\wedge na_n) \leq DV(h_n\wedge na_n) = h_n\wedge na_n$ p.p. , et la relation $VDV(h_n\wedge na_n) = V(h_n\wedge na_n)$ entraîne l'égalité comme ci-dessus. Par classes monotones, $\underline{\underline{C}}$ engendrant la tribu $\underline{\underline{B}}$, on a l'égalité pour $h\wedge na_n$ pour toute h positive, et le th. est vrai pour les fonctions comprises entre 0 et na_n .

3. Soit donc h comprise entre 0 et na_n . Comme nous savons que $VDVh \leq Vh$ (th. 2), il suffit de montrer que $VDVh \geq Vh$. Introduisons sans définition formelle les fonctions s.c.i., qui satisfont à des lemmes analogues aux lemmes 1 et 2. Tout revient à montrer que si f est s.c.i. bornée, $f \geq DVh$, alors $Vf \geq Vh$. Supposons le contraire, reprenons la fonction a partout > 0 de la démonstration du th. 2, et choisissons $\lambda > 0$ tel que $V(h - f - \lambda a) \nleq 0$. Notons t cette fonction, A l'ensemble $\{t = Rt\}$. Rt n'est pas nulle, et comme $Rt \ll V(hI_A)$ A n'est pas négligeable. Mais $Vh = V(f + \lambda a) + t$, donc $Vh \leq V(f + \lambda a) + Rt$ avec égalité sur A , donc $DVh \geq DV(f + \lambda a)$ sur A . Comme $VDVh \leq Vh$, DVh est finie p.p., donc DVf finie p.p. sur A , et la propriété 4 entraîne que $DVh > DVf$ p.p. sur A . Mais le lemme 2 (retourné, f étant s.c.i.) nous dit que $DVf \geq f$ p.p., donc $DVh > f$ p.p. sur A , qui est absurde.

Les corollaires sont faciles : pour le premier, appliquer le résultat précédent aux opérateurs $\bar{D}$ et $\underline{D}$.

Démonstration du théorème 4

D'après le th. 2, nous avons $V\bar{D}u \ll u$, donc $\bar{D}u$ est finie p.p.. Posons $u' = V\bar{D}u$, $u'' = u - V\bar{D}u$. Si $h \geq 0$ est telle que $Vh \ll u$, nous avons $\bar{D}Vh \leq \bar{D}u$ (pr. 1), donc $V\bar{D}Vh \ll V\bar{D}u$, donc (comme $\bar{D}Vh = Vh$: th. 3) $Vh \ll u'$. D'après le th. 2, on a $VDu \ll u$, donc $VDu \ll u' = V\bar{D}u$, et $Du \leq \bar{D}u$ p.p. (Corol. 2). L'égalité s'obtient en échangeant les deux opérateurs.

Pour obtenir la décomposition de Lebesgue, nous remarquons que u'' est surmédiane (th. 2). Nous avons $\underline{D}u' + \bar{D}u'' \leq \bar{D}u$, donc $V(\underline{D}u' + \bar{D}u'') \ll V\bar{D}u \ll u$, donc $V(\underline{D}u' + \bar{D}'') \ll u' = V\underline{D}u'$. Donc $V\bar{D}u'' = 0$ et $Du'' = 0$ p.p. .

Démonstration du théorème 5

Lemme.- Soit D un o.p.d., et soient u une fonction surmédiane, h une fonction positive. Si l'on a p.p. $Du > DVh$ sur $\{Vh \geq u\}$, on a $u \geq Vh$.

En effet, supposons le contraire. Posons $t = Vh - u$, $A = \{t = Rt\}$; on a $Rt \neq 0$, $Rt \ll V(hI_A)$, donc A n'est pas négligeable. On a $u + t = Vh$, donc $u + Rt \geq Vh$ avec égalité sur A , et $Du \leq D(u + Rt) \leq DVh$ sur A . Cela contredit l'hypothèse que $Du > DVh$ p.p. sur $\{t \geq 0\}$.

Démontrons alors le théorème. Quitte à remplacer D par $\sup(D,\bar{D})$, qui est encore un o.p.d., nous pouvons supposer que pour toute $f \geq 0$ bornée on a $DVf \geq f$ p.p.. Soit $h = \lambda.I_{\{Du < \lambda\}}$. Alors $D(u + Vh) \geq \sup(Du,DVh)$; comme $DVh \geq h$ p.p., on a $D(u + Vh) \geq \lambda$ p.p. . Soit $\lambda' < \lambda$, on a par hypothèse $\lambda' \geq DV\lambda'$, et l'inégalité s'écrit $D(u + Vh) > DV\lambda'$ p.p., d'où l'on tire $u + Vh \geq V\lambda'$ p.p., et $u + Vh \geq V\lambda$ p.p.. Compte tenu de la définition de h , cela s'écrit $u \geq \lambda V(I_{\{Du \geq \lambda\}})$.

Supposons $V1$ finie ; on a $p(I - pV_p)V\lambda = pV_p\lambda \leq \lambda$, donc $D^* = \sup_p p(I - pV_p)$ satisfait à l'hypothèse précédente.

Lorsque $V1$ n'est pas finie, on peut encore appliquer le résultat précédent à la résolvante $(V_{\mu+\lambda})$, où $\mu > 0$ est fixé. L'opérateur D^*_μ correspondant est $\sup_p p(I - pV_{\mu+p})$, qui est plus grand que le précédent. Nous avons donc, u étant aussi μ-surmédiane

$$\lambda V_\mu(I_{\{D^*u \geq \lambda\}}) \leq \lambda V_\mu(I_{\{D^*_\mu u \geq \lambda\}}) \leq u$$

après quoi on fait tendre μ vers 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. MOKOBODZKI - Densité relative de deux potentiels comparables ; Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs. Séminaire de Probabilités de Strasbourg IV (1969), Lecture Notes in Math., vol. 124, Springer-Verlag, 1970.

[2] P. A. MEYER - Deux petits résultats de théorie du potentiel, Séminaire de Probabilités de Strasbourg V (1970), Lecture Notes in Math., vol. 191, Springer-Verlag, 1971.