JOSEPH LE POTIER

# Le problème des modules locaux pour les espaces ℂ-analytiques compacts

*Séminaire N. Bourbaki*, 1975, exp. nº 449, p. 255-272

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__255_0>

# LE PROBLÈME DES MODULES LOCAUX POUR LES ESPACES $\mathbb{C}$-ANALYTIQUES COMPACTS

[d'après A. DOUADY et J. HUBBARD]

par Joseph LE POTIER

## 1. Introduction

Tous les espaces analytiques considérés sont complexes et peuvent avoir des éléments nilpotents.

Soient $X_o$ un espace analytique compact et $(S,s)$ un germe d'espace analytique. On appelle déformation de $X_o$ paramétrée par $(S,s)$ un espace analytique $X \to S$ propre et plat au-dessus de $S$, muni d'un isomorphisme

$$i : X(s) \xrightarrow{\sim} X_o .$$

On considère le foncteur $(S,s) \mapsto F(S,s)$ défini sur la catégorie des germes d'espaces analytiques et à valeurs dans Ens qui au germe $(S,s)$ associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de $X_o$ paramétrées par $(S,s)$. Même si $X_o$ est lisse, ce foncteur n'est pas en général représentable ; cependant, dans ce dernier cas, il est semi-représentable au sens suivant :

Il existe un germe d'espace analytique $(H,h)$ et une déformation $\Xi$ de $X_o$ paramétrée par $(H,h)$ tels que pour toute déformation $X$ de $X_o$ paramétrée par $(S,s)$ il existe un morphisme $f : (S,s) \to (H,h)$ tel que $f^*(\Xi)$ soit isomorphe à $X$ (comme déformation de $X_o$) ; de plus, l'application linéaire tangente à $f$ en $s$ est déterminée de façon unique par cette condition [3].

Dans [1], A. Douady et J. Hubbard donnent une méthode pour montrer que cet énoncé reste vrai même si $X_o$ a des singularités. Les détails de la démonstration ont été exposés au Séminaire Douady-Verdier, 1973/74, à l'E.N.S. Signalons que H. Grauert a lui aussi donné une démonstration.

## 2. La variété des polycylindres $P(K,X)$

2.1 Soit $K$ un polycylindre compact de $\mathbf{C}^n$ ; on note $\underline{B}_K$ le faisceau qui associe à un ouvert $U$ de $K$ l'algèbre des fonctions continues sur $U$ et holomorphes sur $\overset{\circ}{K} \cap U$, et $B(K) = H^0(K,\underline{B}_K)$ .

DÉFINITION.- On appelle sous-espace privilégié de $K$ un couple $(Y,A)$ formé d'un sous-espace topologique de $K$ et d'une algèbre de Banach $A$ quotiente de $B(K)$ par un idéal direct (*) $I$ admettant une résolution finie directe

$$0 \to B(K)^{r_n} \to B(K)^{r_{n-1}} \to \ldots \to B(K)^{r_1} \to I \to 0$$

et dont le support soit $Y$ .

Dans la suite, on notera $A = B(Y)$ .

DÉFINITION.- Soient $Y$ un sous-espace privilégié de $K$ , et $L \subset K$ un autre polycylindre. On dit que $L$ est $Y$-privilégié s'il existe une résolution finie directe

$$0 \to B(K)^{r_n} \to \ldots \to B(K)^{r_1} \to B(K) \to B(Y) \to 0$$

telle que la suite

$$0 \to B(L)^{r_n} \to \ldots \to B(L)^{r_1} \to B(L)$$

obtenue en appliquant $\cdot \otimes_{B(K)} B(L)$ soit encore exacte directe.

Si $L \subset K$ est un polycylindre $Y$-privilégié, alors la propriété énoncée est vraie pour n'importe quelle résolution de $B(Y)$ . L'espace $Y \cap L$ , muni de l'algèbre $B(Y \cap L) = B(Y) \otimes_{B(K)} B(L)$ est alors un sous-espace privilégié de $L$ .

PROPOSITION 1.- Tout point $x \in K$ a un système fondamental de voisinages dans $K$ qui sont des polycylindres $Y$-privilégiés.

(*) Le mot direct se rapporte toujours à la structure de Banach sous-jacente.

Si $x \in \overset{\circ}{K}$ , cette proposition n'est autre que le théorème des voisinages privilégiés de Douady ; si $x \notin \overset{\circ}{K}$ , la démonstration est due à G. Pourcin (cf. [2], [4]).

Soit $Y$ un sous-espace privilégié de $K$ ; il sera muni du faisceau d'algèbres

$$\underline{B}_Y = B(Y) \otimes_{B(K)} \underline{B}_K .$$

2.2 Etant donné un espace analytique $X$ , on désigne par $\mathrm{Mor}(Y,X)$ l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de $Y$ dans $X$ .

PROPOSITION 2.- $\mathrm{Mor}(Y,X)$ peut être muni naturellement d'une structure d'espace analytique banachique.

Démonstration. Si $X$ est un ouvert $U$ de $\mathbf{C}^p$ , $\mathrm{Mor}(Y,X)$ s'identifie à un ouvert de l'espace de Banach $B(Y)^p$ . Si $X$ est défini par une équation $f(x) = 0$ , où $f : U \mapsto \mathbf{C}^q$ est une application analytique d'un ouvert $U$ de $\mathbf{C}^p$ à valeurs dans $\mathbf{C}^q$ , $f$ induit une application analytique

$$f_* : \mathrm{Mor}(Y,U) \mapsto \mathrm{Mor}(Y,\mathbf{C}^q)$$

et alors $\mathrm{Mor}(Y,X)$ s'identifie au modèle $f_*^{-1}(0)$ d'espace analytique banachique défini par $f_*$ .

Supposons maintenant $X$ quelconque. Alors $\mathrm{Mor}^{\circ}(Y,X)$ , ensemble des "petits" morphismes de $Y$ dans $X$ , c'est-à-dire des morphismes dont l'image tombe dans un ouvert de carte, est naturellement muni d'une structure d'espace analytique. Pour mettre sur $\mathrm{Mor}(Y,X)$ tout entier une telle structure, la construction, identique à celle de [2], fait appel à la notion de cuirasse.

DÉFINITION.- Une 1-cuirasse sur $K$ est la donnée

1) de deux familles finies de polycylindres $(K_i)_{i\in I}$ et $(K'_i)_{i\in I}$ contenus dans $K$ et tels que

$$K = \cup \overset{\circ}{K'_i} \quad ; \qquad K'_i \subset \overset{\circ}{K}_i$$

2) pour chaque $(i,j) \in I \times I$ , une famille finie de polycylindres $K_{ij\alpha}$ tels que

$$K'_i \cap K'_j \subset \bigcup_\alpha \overset{\circ}{K}_{ij\alpha} \quad ; \qquad \bigcup_\alpha K_{ij\alpha} \subset \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j$$

où $\overset{\circ}{K}_i$ (resp. $\overset{\circ}{K}_{ij\alpha}$ ) désigne l'intérieur de $K_i$ (resp. $K_{ij\alpha}$ ) dans $K$ .

Une telle cuirasse est dite Y-privilégiée si les polycylindres $K_i$ et $K_{ij\alpha}$ sont Y-privilégiés.

Soient $Q = \{K_i, K'_i, K_{ij\alpha}\}$ une cuirasse Y-privilégiée, et $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ la partie de $\mathrm{Mor}(Y,X)$ constituée des morphismes $f : Y \to X$ tels que, pour tout $i$ , $f|Y \cap K_i$ soit petit. $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ apparaît comme une partie de l'espace analytique $Z$ noyau de la double flèche naturelle

$$\prod_i \mathrm{Mor}^\circ(Y_i, X) \rightrightarrows \prod_{i,j,\alpha} \mathrm{Mor}^\circ(Y_{ij\alpha}, X)$$

où l'on a posé $Y_i = Y \cap K_i$ et $Y_{ij\alpha} = Y \cap K_{ij\alpha}$ .

Soit $\theta : Z \to Z$ le morphisme d'espaces analytiques banachiques qui à $f = (f_i)_{i\in I} \in Z$ associe le morphisme $f'$ de $Y$ dans $X$ qui recolle les $f_i|\overset{\circ}{K}{}'_i$ . Alors $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ s'identifie au noyau de la double flèche $Z \underset{\theta}{\overset{1}{\rightrightarrows}} Z$ , ce qui le munit d'une structure d'espace analytique banachique. D'autre part, il résulte de la proposition 1 que lorsque $Q$ varie, les $\mathrm{Mor}^Q(Y,X)$ recouvrent $\mathrm{Mor}(Y,X)$ ; on peut voir que ces espaces se recollent comme ouverts d'un espace analytique banachique.

DÉFINITIONS.- Soit $G(K)$ l'espace analytique banachique des sous-espaces privilégiés de $K$ : il s'identifie à un ouvert de la grassmannienne des idéaux directs de $B(K)$ . Si $S$ est un espace analytique banachique, on appelle <u>sous-espace privilégié</u> <u>S-anaplat</u> de $S \times K$ un morphisme $Y : S \to G(K)$ .

Un espace analytique $X \to S$ au-dessus de $S$ est dit <u>relativement de présentation finie</u>, si, localement, on peut le réaliser comme sous-espace de

$S' \times U$ ( $S'$ ouvert de $S$ et $U$ ouvert de $\mathbf{C}^p$ ) dans lequel il est défini par une équation à valeurs dans $\mathbf{C}^q$ .

La proposition 2 s'étend au cadre relatif : soient $Y$ un sous-espace privilégié S-anaplat de $S \times K$ , $X \to S$ un espace analytique relativement de présentation finie, et $\mathrm{Mor}_S(Y,X)$ l'ensemble des couples $(s,f)$ , où $s \in S$ et $f : Y(s) \to X(s)$ un morphisme. Alors la méthode ci-dessus permet de montrer que $\mathrm{Mor}_S(Y,X)$ porte une structure naturelle d'espace analytique banachique au-dessus de $S$ . Ceci s'applique en particulier si l'on prend $S = G(K)$ et pour $Y$ le sous-espace "universel" $\underline{Y}$ de $G(K) \times K$ correspondant à l'identité de $G(K)$ [4].

2.3 Soit $X$ un sous-espace analytique d'un ouvert $U$ de $\mathbf{C}^n$ .

DÉFINITION.- On dit qu'un morphisme $f : K \to U$ est transverse à $X$ s'il existe, au voisinage de $f(K)$ , une résolution

$$0 \to L_n \to \dots \to L_o \to \underline{O}_X \to 0$$

de $\underline{O}_X$ par des $\underline{O}_U$-modules libres et de type fini, telle que le complexe $H^o(K, f^*(L.))$ soit exact direct.

Si $f : K \to U$ est un morphisme transverse à $X$ , alors $f^{-1}(X)$ , muni de l'algèbre $H^o(K, f^*(\underline{O}_X))$ est un sous-espace privilégié de $K$ . L'ensemble des morphismes de $K$ dans $U$ transverses à $X$ forme un ouvert que nous désignerons par $\mathrm{Mor}_{\pitchfork X}(K,U)$ .

PROPOSITION 3.- Le morphisme naturel

$$\Phi : \mathrm{Mor}_{\pitchfork X}(K,U) \to \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}, G(K) \times X)$$

d'application sous-jacente $\hat{f} \mapsto (\hat{f}^{-1}(X), \hat{f}|Y)$ est lisse. De plus, en un point $(Y,f)$ de l'image, l'espace tangent est un $B(Y)$-module libre de rang $n$ .

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{m}X}(K,U) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{G(K)}(G(K)\times K\,,\,G(K)\times U) \\ \Phi\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\,G(K)\times X) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\,G(K)\times U)\ . \end{array}$$

Il induit un plongement ouvert de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{m}X}(K,U)$ dans le produit fibré associé à ce diagramme : en effet, un élément du produit fibré est un triplet $(Y,f,\hat{f})$, où $Y \in G(K)$, $f \in \mathrm{Mor}(Y,X)$, $\hat{f} \in \mathrm{Mor}(K,U)$, tel que $\hat{f}|Y = f$ ; au voisinage de l'image d'un point $\hat{f}_o \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{m}X}(K,U)$, on a $\hat{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{m}X}(K,U)$ ; alors $\hat{f}^{-1}(X) \supset Y$ dans $G(K)$ ; comme l'égalité $\hat{f}^{-1}(X) = Y$ est vraie au point $(\Phi(\hat{f}_o)\,,\hat{f}_o)$, elle sera encore vraie au voisinage, ce qui montre que $(Y,f,\hat{f}) = (\Phi(\hat{f})\,,\hat{f})$.

Or, le morphisme vertical de droite est lisse ; il en est donc de même de $\Phi$. Il en résulte que l'image de $\Phi$, que nous noterons $P^o(K;X,U)$, est un ouvert lisse. Si $(Y,f)$ est un point de cette image, soient $I_Y$ l'idéal de $B(K)$ défini par $Y$, et $\hat{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{m}X}(K,U)$ tel que $\Phi(\hat{f}) = (Y,f)$ ; on a $\mathrm{Ker}\, T_{\hat{f}}\Phi = (I_Y)^n$ ; il en résulte que $T_{\hat{f}}\Phi$ induit un isomorphisme

$$B(Y)^n \simeq T_{(Y,f)}\, P^o(K;X,U)$$

qui dépend bien entendu du choix de $\hat{f}$. On vérifie cependant que la structure de $B(Y)$-module obtenue sur $T_{(Y,f)}\, P^o(K;X,U)$ est indépendante de $f$.

Supposons maintenant que $X$ soit un espace analytique quelconque. On pose

$$P^o(K,X) = \bigcup_{(X',U')} P^o(K;X',U') \subset \mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}\,,\,G(K)\times X)$$

où $X'$ est un ouvert de $X$ se réalisant comme sous-espace de l'ouvert $U'$ de $\mathbb{C}^n$ ; $P^o(K,X)$ est une variété dont l'espace tangent au point $(Y,f)$ est un $B(Y)$-module libre de rang $n$. De plus, si $L \subset K$ est un deuxième polycylindre, soit $P^o_L(K,X)$ l'ouvert de $P^o(K,X)$ des couples $(Y,f)$ tels que $L$ soit

Y-privilégié ; la restriction

$$P^o_L(K,X) \to P^o(L,X)$$

est analytique et son application linéaire tangente au point $(Y,f)$ est $B(Y)$-linéaire.

DÉFINITION.- Désignons par $P(K,X)$ l'ouvert de $\mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}, G(K) \times X)$ des couples $(Y,f)$ possédant la propriété suivante : il existe un recouvrement fini de $Y$ par des intérieurs de polycylindres $K_i$ de $K$ Y-privilégiés et tels que $(Y \cap K_i, f|Y \cap K_i) \in P^o(K_i, X)$ . $P(K,X)$ s'appelle <u>variété des polycylindres de</u> $X$ .

PROPOSITION 4.- $P(K,X)$ <u>est un ouvert lisse de</u> $\mathrm{Mor}_{G(K)}(\underline{Y}, G(K) \times X)$ .

La démonstration utilise deux lemmes.

LEMME 1.- <u>Soit</u> $(Y,f) \in P(K,X)$ . <u>Il existe un fibré vectoriel</u> $\Theta_{Y,f}$ <u>de rang</u> $n$ <u>au-dessus de</u> $Y$ <u>tel que pour tout polycylindre</u> $L \subset K$ <u>vérifiant</u> $(Y \cap L, f|Y \cap L) \in P^o(L,X)$ <u>on ait</u> :

$$T_{(Y \cap L, f|Y \cap L)} P^o(L,X) = B(Y \cap L, \Theta_{Y,f}) .$$

<u>De plus</u>, $\Theta_{Y,f}$ <u>dépend analytiquement de</u> $(Y,f)$ .

<u>Démonstration</u>. Soit $(K_i)$ un recouvrement de $Y$ par des polycylindres Y-privilégiés et tels que $(Y \cap K_i, f|Y \cap K_i) \in P^o(K_i, X)$ . Alors, il existe, d'après ce qui précède, un fibré vectoriel trivial $\Theta_i$ de rang $n$ sur $Y_i = Y \cap K_i$ tel que, pour tout polycylindre $L \subset K_i$ , Y-privilégié, on ait

$$T_{(Y \cap L, f|Y \cap L)} P^o(L,X) = B(Y \cap L, \Theta_i) .$$

Il en résulte que les $\Theta_i$ se recollent pour donner un fibré vectoriel $\Theta_{Y,f}$ répondant aux conditions demandées. La fin du lemme s'obtient en étendant cette démonstration au cas relatif.

LEMME 2.- Soit $(Y,f) \in P(K,\mathfrak{X})$ . Alors

$$T_{(Y,f)}\, P(K,\mathfrak{X}) \;=\; B(Y,\Theta_{Y,f}) \;.$$

De plus, cette égalité est vraie au sens des espaces analytiques paramétrés par $P(K,\mathfrak{X})$ et dont la fibre au-dessus du point $(Y,f)$ est donnée par chacun des deux membres.

Démonstration. Soient $(Y_o , f_o) \in P(K,X)$ et $Q = \{K_i , K_i' , K_{ij\alpha}\}$ une cuirasse $Y_o$-privilégiée et telle que $(Y_o \cap K_i , f_o|Y_o \cap K_i) \in P^o(K_i , X)$ . Soit $P'(K_i , \mathfrak{X})$ l'ouvert de $P(K_i , \mathfrak{X})$ des $(Y_i , f_i)$ tels que, pour tout $(j,\alpha)$ , $K_{ij\alpha}$ soit $Y_i$-privilégié, et posons

$$C^o = \prod_i P'(K_i , \mathfrak{X}) \qquad ; \qquad C^1 = \prod_{i,j,\alpha} P^o(K_{ij\alpha} , X) \;.$$

Soit $Z = \operatorname{Ker} d : C^o \rightrightarrows C^1$ le noyau de la double flèche naturelle. Au voisinage de $(Y_o , f_o)$ , $P(K,X)$ est le noyau d'une double flèche

$$Z \underset{\theta}{\overset{1}{\rightrightarrows}} Z$$

où $\theta$ est construite de la même manière que dans le numéro 2.2.

Considérons, au-dessus d'un voisinage de $(Y_o , f_o)$ dans $P(K,X)$ les fibrés vectoriels

$$\underline{C}^o = \prod_i B(Y_i , \Theta_{Y,f}) \qquad ; \qquad \underline{C}^1 = \prod_{i,j,\alpha} B(Y_{ij\alpha} , \Theta_{Y,f})$$

où $(Y,f) \in P(K,\mathfrak{X})$ , $Y_i = Y \cap K_i$ , $Y_{ij\alpha} = Y \cap K_{ij\alpha}$ , et soit $\partial : \underline{C}^o \to \underline{C}^1$ le morphisme défini par $(u_i) \mapsto u_i|Y_{ij\alpha} - u_j|Y_{ij\alpha}$ . Soit $\underline{Z} = \operatorname{Ker} \partial$ ; le morphisme $T\theta : \underline{Z} \to \underline{Z}$ se factorise à travers le $P(K,\mathfrak{X})$-fibré dont la fibre au-dessus de $(Y,f)$ est $B(Y,\Theta_{Y,f})$ et est donné par $(u_i) \mapsto u'$ tel que $u'|\overset{o}{K_i'} = u_i|\overset{o}{K_i'}$ . Le noyau $TP(K,\mathfrak{X})$ de la double flèche

$$\underline{Z} \underset{T\theta}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$$

est donc bien, au-dessus de $(Y,f)$ , $B(Y,\Theta_{Y,f})$ .

La proposition 4 s'obtient maintenant en appliquant le lemme 2 et le

CRITÈRE DE LISSITÉ.- Soit $P$ un espace analytique banachique ; on suppose que l'espace tangent de Zariski $TP$ est, comme espace analytique au-dessus de $P$, un fibré vectoriel banachique. Alors $P$ est lisse.

2.4 Soient $\widetilde{K}$ un compact contenu dans $\overset{\circ}{K}$, et $P(K,\widetilde{K}\,;X)$ l'ouvert de $P(K,X)$ formé des $(Y,f)$ tels que $f$ induise un plongement ouvert d'un voisinage (dans $Y$) de $Y \cap \widetilde{K}$ dans $X$.

Si $L$ est un autre polycylindre, soient $(Y,f) \in P(K,\widetilde{K}\,;X)$ et $(Z,g) \in P(L,X)$ tels que $g(Z) \subset f(Y \cap \overset{\circ}{\widetilde{K}})$. Alors $(Z,f^{-1}g) \in P(L\,,Y \cap \overset{\circ}{K})$, et on définit ainsi un morphisme d'un ouvert de $P(K,\widetilde{K}\,;X) \times P(L,X)$ dans $P(L,Y \cap \overset{\circ}{K})$.

2.5 Soient $S$ un espace analytique banachique et $X \to S$ un espace analytique relativement de présentation finie et S-anaplat ([2], § 8). En reprenant le raisonnement du n° 2.3 dans le cadre relatif, on voit que l'ensemble $P_S(K,X)$ des triplets $(s\,,Y\,,f) \in \mathrm{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \underline{Y}\,, G(K) \times X)$, où $s \in S$, $Y \in G(K)$ et $f \in \mathrm{Mor}(Y,X(s))$ tels que $(Y,f) \in P(K,X(s))$ est un ouvert S-quasi-lisse au sens suivant :

Tout point $(s,Y,f) \in P_S(K,X)$ a un voisinage ouvert $W$ tel que la projection $W \to S$ se factorise à travers un sous-espace analytique $S_1 \subset S$ au-dessus duquel $W$ est lisse.

On ignore si $P_S(K,X)$ est S-lisse. Cependant, on peut montrer qu'il est S-lisse au voisinage des points $(s,Y,f)$ tels que $Y$ vérifie la propriété suivante : il existe une famille continue d'affinités bijectives $h_t : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ paramétrée par $]0,1]$ et telle que

(1) $h_1 = 1_{\mathbf{C}^n}$ ;

(2) le polycylindre $K_t = h_t(K)$ soit contenu dans $K$ et Y-privilégié ;

(3) lorsque $t \to 0$ , le diamètre de $K_t$ tend vers $0$ .

Nous dirons qu'un tel $Y$ est continûment privilégié dans $K$ .

Bien entendu, si $\widetilde{K}$ est un compact contenu dans $\mathring{K}$ , l'ensemble $P_S(K,\widetilde{K}\,;X)$ des points $(s,Y,f)$ de $P_S(K,X)$ tels que $(Y,f) \in P(K,\widetilde{K}\,;X(s))$ est un ouvert, et on étend facilement les résultats du n° 2.4.

## 3. 2-cuirasses

Soit $X$ un espace analytique de dimension finie et compact. Une 2-cuirasse sur $X$ est constituée par les données suivantes :

1) données fixes :

a) un ensemble simplicial fini tronqué à l'ordre 2

$$I_2 \overset{d}{\underset{\longrightarrow}{\rightrightarrows}} I_1 \overset{d}{\rightrightarrows} I_o \ ;$$

b) pour chaque $i \in I_o \cup I_1$ , trois polycylindres compacts de $\mathbb{C}^n$ , $K_i' \subset\subset \widetilde{K}_i \subset\subset K_i$ et pour chaque $i \in I_2$ , deux polycylindres compacts de $\mathbb{C}^n$ , $\widetilde{K}_i \subset\subset K_i$ .

Ces données $\underline{I} = (I.\,,K'.\,,\widetilde{K}.\,,K.)$ constitueront le type de la cuirasse considérée.

2) données mobiles : pour chaque $i \in I_o \cup I_1 \cup I_2$ , un polycylindre $(Y_i\,,f_i) \in P(K_i\,,\widetilde{K}_i\,;X)$ .

Posons $X_i' = f_i(K_i' \cap Y_i)$ , $\mathring{X}_i' = f_i(\mathring{K}_i' \cap Y_i)$ , etc.

Les données ci-dessus sont astreintes à vérifier les conditions suivantes :

$(C_1)$ $$X = \bigcup_{i \in I_o} \mathring{X}_i' \ ;$$

$(C_2)$ pour $(i,j) \in I_o \times I_o$ ,

$$X_i' \cap X_j' \subset \bigcup_{d(k)=(i,j)} \mathring{X}_k' \quad \text{et} \quad \bigcup_{d(k)=(i,j)} X_k \subset \mathring{\widetilde{X}}_i \cap \mathring{\widetilde{X}}_j \ ;$$

$(C_3)$ pour $(i,j,k) \in I_1 \times I_1 \times I_1$ ,

$$X'_i \cap X'_j \cap X'_k \subset \bigcup_{d(\ell)=(i,j,k)} \overset{\bullet}{\tilde{X}}_\ell \quad \text{et} \quad \bigcup_{d(\ell)=(i,j,k)} X_\ell \subset \overset{\circ}{\tilde{X}}_i \cap \overset{\circ}{\tilde{X}}_j \cap \overset{\circ}{\tilde{X}}_k .$$

Tout espace analytique compact admet des 2-cuirasses. De plus, les conditions $C_1$, $C_2$ et $C_3$ étant ouvertes dans la variété

$$\prod_{i \in I.} P(K_i , \tilde{K}_i ; X) ,$$

on voit que les 2-cuirasses de type $\underline{I}$ forment une variété analytique banachique $Q(\underline{I},X)$ .

Soit $X \to S$ un espace analytique banachique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de $S$ ; alors les triplets $(s,Y_i , f_i)$ dans

$$\prod_{i \in I.} P_S(K_i , \tilde{K}_i ; X)$$

tels que $(Y_i , f_i) \in Q(\underline{I},X(s))$ forment un ouvert S-quasi-lisse au sens du n° 2.5, noté $Q_S(\underline{I},X)$ .

DÉFINITION.- On appelle <u>cuirasse relative de type</u> $\underline{I}$ <u>sur</u> $X$ une section de

$$Q_S(\underline{I},X) \to S .$$

4. <u>Puzzles</u>

"Un puzzle est en quelque sorte un espace analytique muni d'une 2-cuirasse livrée en pièces détachées, avec notice d'assemblage, mais qui s'assemble mal sur les bords"

DÉFINITION.- Soit $\underline{I} = (I. , K'. , \tilde{K}. , K.)$ un type de 2-cuirasses. Un <u>puzzle de type</u> $\underline{I}$ est constitué des données suivantes :

1) pour chaque $i \in I_o \cup I_1 \cup I_2$ , un $Y_i \in G(K_i)$ ; on notera $Y'_i = Y_i \cap K'_i$ , $\overset{\circ}{Y}{}'_i = Y_i \cap \overset{\circ}{K}{}'_i$ , etc. ;

2) pour chaque simplexe $j \in I_1 \cup I_2$ de face $i$ , un morphisme $f^i_j : Y_j \to \overset{\circ}{\tilde{Y}}_i$ tel que $(Y_j , f^i_j) \in P(K_j , \tilde{K}_j ; \overset{\circ}{\tilde{Y}}_i)$ .

Ces données doivent vérifier les conditions suivantes :

($P_1$) Pour tout simplexe $\ell \in I_2$ dont deux des faces $j$ et $k$ ont en commun le sommet $i$

$$f_j^i \circ f_\ell^j = f_k^i \circ f_\ell^k \quad ;$$

($P_2$) si $j$ et $k \in I_1$ sont deux simplexes de sommet commun $i$, et si $y \in Y'_j$ et $z \in Y'_k$ vérifient $f_j^i(y) = f_k^i(z)$, il existe un simplexe $\ell \in I_2$ ayant $j$ et $k$ pour faces et $u \in \overset{\circ}{\tilde{Y}}_\ell$ tels que $f_\ell^j(u) = y$ et $f_\ell^k(u) = z$ ;

($P_3$) pour tout simplexe $k \in I_1$ de sommets $i$ et $j$ et tout $z \in Y_k$ tels que $x = f_k^i(z)$ et $y = f_k^j(z)$ appartiennent respectivement à $Y'_i$ et $Y'_j$, il existe $k' \in I_1$ et $z' \in \overset{\circ}{Y}'_{k'}$, tels que $d(k') = (i,j)$, $f_{k'}^i(z') = x$ et $f_{k'}^j(z') = y$.

Les données $\{Y_i , f_j^i\}$ vérifiant la condition $P_1$ forment un espace analytique banachique, et, dans cet espace, les conditions $P_2$ et $P_3$ sont ouvertes. On note $\underline{Z}'$ l'espace analytique ainsi obtenu ; il est horrible car défini par des équations dont les applications linéaires tangentes ne sont pas directes.

Soit $\{Y_i , f_j^i\}$ un puzzle, et pour $(i,j) \in I_o \times I_o$ soit $Y_{ij}$ l'ouvert des $x \in \overset{\circ}{Y}'_i$ vérifiant la condition suivante : il existe $k \in I_1$ tel que $d(k) = (i,j)$ et $z \in \overset{\circ}{Y}'_k$ tel que $f_k^i(z) = x$ et $f_k^j(z) \in \overset{\circ}{Y}'_j$. On voit immédiatement que les morphismes $f_k^j(f_k^i)^{-1}$ se recollent en un morphisme

$$g_i^j \ : \ Y_{ij} \rightarrow \overset{\circ}{Y}'_j$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

($R_1$) $g_i^i = 1$ ;

($R_2$) $g_i^j(Y_{ij}) = Y_{ji}$ ;

($R_3$) pour $(i,j,k) \in I_o \times I_o \times I_o$, posons $Y_{ijk} = (g_i^j)^{-1}(Y_{jk})$ ; alors

$$Y_{ijk} \subset Y_{ik} \quad \text{et} \quad g_j^k \circ (g_i^j | Y_{ijk}) = g_i^k | Y_{ijk} .$$

Ces conditions permettent de recoller les $\overset{\circ}{Y}{}'_i$ suivant les morphismes $g_i^j$ et on obtient ainsi au-dessus de $\underline{Z}'$ un espace analytique $\underline{X}'$ relativement de présentation finie et anaplat. De plus, la condition $P_3$ implique que $\underline{X}'$ est séparé ; l'ensemble $\underline{Z} \subset \underline{Z}'$ des points $\zeta$ , tels que $\underline{X}(\zeta)$ soit compact, est ouvert et $\underline{X} = \underline{X}' | \underline{Z}$ est propre au-dessus de $\underline{Z}$ .

Soit $X \to S$ un espace analytique banachique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de $S$ , muni d'une 2-cuirasse relative de type $\underline{I}$ , $q = \{Y_i , f_i\}$ . A $q$ on associe

(1) un morphisme $\varphi_q : S \to \underline{Z}$ ayant pour application sous-jacente l'application qui associe à $s \in S$ le puzzle de type $\underline{I}$

$$\varphi_q(s) = \{Y_j(s) , f_j^i(s) = (f_i(s))^{-1} f_j(s)\} \quad ;$$

(2) un isomorphisme $\alpha_q : X \xrightarrow{\sim} \varphi_q^* \underline{X}$ .

## 5. L'espace des modules

L'espace $\underline{Z}$ étant pathologique, on se propose de lui faire subir une "cure d'amaigrissement". Soient $\underline{Q} = Q_{\underline{Z}}(\underline{I},\underline{X})$ et $\pi : \underline{Q} \to \underline{Z}$ la projection canonique. Au-dessus de $\underline{Z}$ , l'espace $\pi^*\underline{X}$ est muni d'une cuirasse relative canonique $q_o$ de type $\underline{I}$ , ce qui définit un morphisme $\varphi_o : \underline{Q} \to \underline{Z}$ .

Soient $Z$ le noyau de la double flèche $\underline{Q} \overset{\varphi_o}{\underset{\pi}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$ et $\Xi = \pi^*\underline{X} | Z$ .

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> $X \to S$ <u>un espace analytique relativement de présentation finie, propre et anaplat au-dessus de</u> $S$ . <u>A toute</u> $\underline{I}$<u>-cuirasse relative</u> $q$ <u>sur</u> $X$ , <u>on peut associer naturellement un morphisme</u> $\psi_q : S \to Z$ <u>tel que</u> $\psi_q^* \Xi \simeq X$ <u>et</u> $\psi_q^*(q_o) = q$ .

Démonstration. L'isomorphisme $\alpha_q : X \to \varphi_q^* \underline{X}$ permet de transporter la cuirasse $q$, ce qui donne un morphisme $\psi_q : S \to \underline{Q}$ tel que $\pi \circ \psi_q = \varphi_q$ et $\psi_q^*(q_o) = q$ ; par fonctorialité, $\varphi_q = \varphi_o \circ \psi_q$ d'où il résulte que $\psi_q$ se factorise par $Z$.

Nous énonçons maintenant le principal résultat.

THÉORÈME.- Soit $X_o$ un espace analytique compact. Il existe sur $X_o$ une 2-cuirasse $p_o$ de type $\underline{I}$ telle que, si $z_o$ désigne le point correspondant de $Z$,

(1) il existe un sous-espace $H$ de dimension finie de $Z$ tel que, au voisinage de $z_o$, $Z$ soit isomorphe à un produit $H \times V_o$ de $H$ par une variété banachique $V_o$, et tel que

(2) $X_H = \Xi | H$ soit une déformation verselle de $X_o$.

Si $\underline{I} = (I., K!, \widetilde{K}., K.)$ et $\hat{\underline{I}} = (I., \hat{K}!, \hat{\widetilde{K}}., \hat{K}.)$ sont deux types de 2-cuirasses de même ensemble simplicial sous-jacent et tels que, pour tout $i \in I.$, $K_i \subset\subset \hat{K}_i$, $\widetilde{K}_i \subset\subset \hat{\widetilde{K}}_i$, $K_i^! \subset\subset \hat{K}_i^!$, nous écrirons $\underline{I} \subset\subset \hat{\underline{I}}$.

On choisira la cuirasse $p_o$ de type $\underline{I}$ sur $X_o$ de manière qu'elle provienne d'une cuirasse $\hat{p}_o = (\hat{Y}_i, \hat{f}_i)$ de type $\hat{\underline{I}}$, avec $\underline{I} \subset\subset \hat{\underline{I}}$, et telle que les $\hat{Y}_i$ soient continûment privilégiés dans $\hat{K}_i$ au sens du n° 2.5. Au voisinage du point $\hat{z}_o$ correspondant à $\hat{p}_o$, $Q_{\underline{Z}}(\hat{\underline{I}}, \underline{X})$ est lisse au-dessus de $\underline{Z}$ ; on peut donc trouver au voisinage de $\zeta_o = \pi(z_o)$ une cuirasse relative $\hat{\sigma}$ de type $\hat{\underline{I}}$ et passant par $\hat{z}_o$ sur $\underline{X}$ ; soit $\sigma$ la cuirasse relative de type $\underline{I}$ induite au voisinage de $\zeta_o$.

Le théorème sera la conséquence de deux lemmes.

LEMME 1.- Avec les notations ci-dessus, $\Sigma = \sigma^{-1}(Z)$ est de dimension finie au voisinage de $\zeta_o$.

<u>Démonstration</u>. Le morphisme $\varphi_\sigma : \underline{Z} \to \underline{Z}$ associé à $\sigma$ vérifie $\varphi_\sigma = \varphi_0 \circ \sigma$ et donc $\Sigma$ est le noyau de la double flèche $\underline{Z} \overset{\varphi_\sigma}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \underline{Z}$. Or $\varphi_\sigma$, qui se factorise à travers l'espace $\hat{\underline{Z}}$ des puzzles de type $\hat{\underline{I}}$, est compact ; il suffit donc d'appliquer le critère de finitude de ([2], § 3, proposition 3).

LEMME 2.- <u>Soient</u> $Q_0 = Q(\underline{I}, X_0)$, <u>et, sur le</u> $Q_0$<u>-espace</u> $Q_0 \times X_0$, $c_0$ <u>la cuirasse relative de type</u> $\underline{I}$ <u>induite par</u> $1_{Q_0}$. <u>Il existe un morphisme</u> $\rho : (Z, z_0) \to (Q_0, p_0)$ <u>tel que</u> $\rho^{-1}(p_0) = \sigma(\Sigma)$ <u>et tel que l'application linéaire tangente de</u> $\rho \circ \psi_{c_0}$ <u>en</u> $p_0$ <u>soit de la forme</u> $1 + v$ <u>où</u> $v$ <u>est compacte</u>.

<u>Démonstration</u>. $\underline{Q}$ étant $\underline{Z}$-lisse au voisinage de $z_0$, on peut trouver, au voisinage de $z_0$, une trivialisation $\chi : \underline{Q} \to \underline{Z} \times Q_0$ qui coïncide avec l'identité au-dessus de $\zeta_0 = \pi(z_0)$, et telle que $\sigma$ soit une section horizontale ; soit $\rho = pr_2 \circ \chi$. L'espace des cuirasses sur $\psi^*_{c_0} \Xi = Q_0 \times X_0$ s'identifie à $Q_0 \times Q_0$ considéré comme $Q_0$-espace par $pr_1$. Soit $\dot{\rho} : Q_0 \times Q_0 \to Q_0$ la rétraction $\varphi^*_{c_0}(\rho)$ ; du fait que $\psi^*_{c_0}(q_0) = c_0$, il résulte que $\rho \circ \psi_{c_0}$ n'est autre que $u \mapsto \dot{\rho}(u,u)$. Soit $u \mapsto (u, \dot{\sigma}(u))$ la cuirasse $\varphi^*_{c_0}(\sigma)$ ; de l'identité $\dot{\rho}(u, \dot{\sigma}(u)) = p_0$, on tire

$$T_{p_0}(\rho \circ \psi_{c_0}) = 1 - T_{p_0}\dot{\sigma} .$$

Le lemme vient alors du fait que $\dot{\sigma}$ se factorise au voisinage de $p_0$ par $Q(\hat{\underline{I}}, X_0)$.

<u>Démonstration du théorème</u>. Elle est identique à celle du théorème de Kuranishi [3]. Avec les notations du lemme 2, $\rho : Z \to Q_0$ est relativement de dimension finie au-dessus de $p_0$ ; il résulte de l'appendice ci-dessous qu'il existe une $Q_0$-variété $W$ relativement de dimension finie telle qu'au

voisinage de $z_o$ , $Z \subset W$ . D'autre part, $T_{p_o}(\rho \circ \psi_{c_o})$ a noyau et conoyau de dimension finie ; il existe donc une sous-variété $V_o$ de $Q_o$ passant par $p_o$ et telle que $T_{p_o}V_o$ soit supplémentaire du noyau ; alors $V = \psi_{c_o}(V_o)$ est une sous-variété de codimension finie dans $W$ et l'on a au voisinage de $z_o$

$$V \subset Z \subset W .$$

Soit, au voisinage de $z_o$ , $r : W \to V$ une rétraction, et posons $H = r^{-1}(z_o) \cap Z$ et $\mathfrak{X}_H = \Xi|H$ . Considérons, au-dessus de $Q_H = Q_H(\underline{I},\mathfrak{X}_H) = H \times_{\underline{Z}} \underline{Q}$ , l'espace $pr_1^* \mathfrak{X}_H = pr_2^*(\pi^*\underline{\mathfrak{X}})$ muni de la cuirasse relative $pr_2^*(q_o) = \bar{q}_o$ ; ceci définit un morphisme $\bar{\psi}_o : Q_H \to Z$ tel que $\bar{\psi}_o^*\Xi = pr_1^* \mathfrak{X}_H$ , $\bar{\psi}_o|Q_o = \psi_{c_o}$ et tel que $\tau$ désigne la section de $Q_H \to H$ définie par la cuirasse $q_o|H$ sur $\mathfrak{X}_H$ , $\bar{\psi}_o \circ \tau$ soit l'injection $H \to Z$ .

Soit $\underline{V} \subset Q_H$ un sous-espace H-lisse contenant $\tau$ et coïncidant au-dessus de $z_o$ avec $V_o$ ; le théorème des fonctions implicites montre que $\bar{\psi}_o|\underline{V} : \underline{V} \to W$ est un plongement au voisinage de $p_o$ . Considérons les inclusions d'espaces analytiques :

$$H \subset \bar{\psi}_o(\underline{V}) \subset Z \subset W .$$

L'intersection des trois premiers avec $r^{-1}(z_o)$ est $H$ ; il résulte du lemme de semi-continuité ([3], lemme 1) que $\bar{\psi}_o(\underline{V}) = Z$ , ce qui donne (1) en trivialisant $\underline{V}$ .

Soit $X \to S$ une déformation de $X_o$ paramétrée par $(S,s)$ ; une cuirasse relative $q$ sur $X$ passant par $p_o$ détermine un morphisme $\psi_q : (S,s) \to (Z,z_o)$ tel que $\psi_q^*\Xi \cong \mathfrak{X}$ . Posons, au voisinage de $s$ , $f = pr_1 \circ \bar{\psi}_o^{-1} \circ \psi_q$ ; alors $f^*\mathfrak{X}_H \cong \mathfrak{X}$ , ce qui démontre (2). Bien entendu, $f$ n'a aucune raison d'être unique.

APPENDICE.- *Soient* $X \to S$ *un espace analytique banachique au-dessus de* $S$ , $s \in S$ *et* $x \in X(s)$ . *Si* $X(s)$ *est de dimension finie au voisinage de* $x$ , $X$ *est relativement de dimension finie au voisinage de* $x$ .

*Démonstration*. Soit $\Omega$ un ouvert d'un espace de Banach $E$ tel que, au voisinage de $x$ , $X$ se réalise comme sous-espace $S \times \Omega$ . Au voisinage de $x$, on peut construire un morphisme $f : S \times \Omega \to S \times \Omega$ qui coïncide avec l'identité sur $X$ , et dont l'application linéaire tangente verticale en $x$ se factorise à travers un espace vectoriel de dimension finie. $X$ est donc un sous-espace du noyau de la double flèche $S \times \Omega \underset{1}{\overset{f}{\rightrightarrows}} S \times \Omega$ , noyau qui est déjà relativement de dimension finie au-dessus de $S$ au voisinage de $x$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY et J. HUBBARD - Le problème des modules locaux pour les espaces C-analytiques compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, 277, série A (1973), p. 901.

[2] A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16, 1 (1966), p. 1-98.

[3] A. DOUADY - Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, (d'après M. Kuranishi), Sém. Bourbaki n° 277, W. A. Benjamin, N.Y., 1965.

[4] G. POURCIN - Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre et déformation des singularités isolées, thèse, Orsay, 1974.