JACQUES CHAZARAIN

Spectre des opérateurs elliptiques et flots hamiltoniens

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 460, p. 111-123

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__111_0>

Séminaire BOURBAKI 460-01
27e année, 1974/75, n° 460 Février 1975

SPECTRE DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET FLOTS HAMILTONIENS

par Jacques CHAZARAIN

0. Introduction

Pour situer le sujet, rappelons le problème classique suivant :

Problème.- On considère une variété riemannienne compacte et soit Δ son laplacien. Que peut-on dire de la géométrie de cette variété connaissant les valeurs propres de Δ ? et réciproquement quelle est l'influence de la géométrie sur le spectre ?

On sait que le spectre ne caractérise pas la variété riemannienne, néanmoins, il permet de connaître certaines grandeurs géométriques (cf. pour ces questions : Berger, Gauduchon, Mazet [4]). Dans cet exposé, on étudie un aspect de ce problème en montrant le lien entre le spectre et le flot géodésique.

Voici un exemple très simple : interprétons la formule de Poisson, sur le tore $T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, en oubliant la structure de groupe :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta(t - 2k\pi) .$$

Le membre de gauche s'identifie à la distribution $\frac{1}{2}\sum_{j\geq 1} e^{\pm i\sqrt{\lambda_j}\, t}$, où $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ désigne la suite des valeurs propres du laplacien $\Delta = -d^2/dx^2$ sur le tore. Le membre de droite nous montre que les singularités de cette distribution sont situées aux points de la forme $\pm\, 2k\pi$ qui est précisément l'ensemble des longueurs, et leurs opposées, des géodésiques périodiques du tore. De plus, la singularité au voisinage du point $\ell = 2k\pi$ est donnée par $2\pi\,\delta_\ell$ qui est une distribution de Fourier sur $\mathbf{R}$.

Le but de cet exposé est de montrer comment ceci se généralise au cas d'une variété riemannienne compacte et plus généralement, à la donnée d'un opérateur elliptique sur une variété compacte.

Un lien entre le spectre et les géodésiques périodiques était déjà apparu dans des cas particuliers, par exemple dans les travaux de Huber sur certains espaces hyperboliques (cf. exposé de Bérard-Bergery [3]). A la suite des travaux de Balian et Bloch [2], Colin de Verdière [7] a mis en évidence ce lien dans le cas riemannien, puis Chazarain [6] et Duistermaat et Guillemin [9] indépendamment, ont donné une nouvelle interprétation de ce lien. Enfin, Duistermaat et Guillemin viennent d'écrire un long papier [11] où sont synthétisés et complétés les résultats de [6] et [9]. On expose, ici, les principaux résultats de [11] mais en utilisant parfois la méthode de démonstration développée dans [6].

1. Présentation des deux personnages : le spectre et le flot hamiltonien

a) L'opérateur elliptique P et l'analyse

Soit X une variété C^∞ compacte connexe de dimension n, soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel de degré m (et même pseudo-différentiel classique) opérant sur l'espace $C^\infty(X,\Omega_{\frac{1}{2}})$ des $\frac{1}{2}$-densités sur X (on note Ω_α le fibré des densités d'ordre α). Un des avantages des $\frac{1}{2}$-densités est que l'espace $L^2(X,\Omega_{\frac{1}{2}})$ est défini naturellement grâce à l'accouplement

$u\,,v \in C^\infty(X,\Omega_{\frac{1}{2}}) \to u\,.\,\bar{v} \in C^\infty(X,\Omega_1)$.

On suppose que $P(x,D)$ définit un opérateur auto-adjoint strictement positif, soit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ la suite de ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité. On pose $\mu_j = (\lambda_j)^{1/m}$, alors la connaissance du spectre équivaut à la donnée de la distribution spectrale $\sum_{k\geq 1} \delta(\tau - \mu_k)$; on démontre facilement que cette distribution est tempérée et soit S sa transformée de Fourier, c'est-à-dire

$$S(t) = \sum_{k\geq 1} e^{-i\mu_k t} . \tag{1}$$

Les μ_k sont les valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint positif $Q = P^{1/m}$ et soit $U(t) = e^{-itQ}$ le groupe unitaire dans $L^2(X,\Omega_{\frac{1}{2}})$ engendré par iQ . La théorie spectrale élémentaire montre que le noyau distribution de $U(t)$ s'exprime par $U(t,x,y) = \sum_{k\geq 1} e^{-i\mu_k t}\, e_k(x) \otimes \overline{e_k(y)}$ où les $e_k(x) \in C^\infty(X,\Omega_{\frac{1}{2}})$

constituent une base orthonormée de fonctions propres de Q . Par intégration sur X des densités $|e_k(x)|^2$, on en déduit formellement (mais la justification rigoureuse est facile) l'égalité au sens des distributions sur $\mathbb{R}$:

$$\int_X U(t,x,x) = S(t) \,, \tag{2}$$

égalité qui sera à la base du lien entre le spectre et la géométrie.

b) <u>L'opérateur</u> P <u>et la géométrie</u>

Un théorème de Seeley indique que l'opérateur Q est encore un opérateur elliptique pseudo-différentiel classique et que son symbole principal q est donné par $q(x,\xi) = (p(x,\xi))^{1/m}$, pour $(x,\xi) \in T^*X$, où p est celui de P .

Soit H_q le champ hamiltonien associé à q , c'est-à-dire dans une carte : $H_q(x,\xi) = (\partial_\xi q(x,\xi) \,, -\partial_x q(x,\xi)) \in T_{x,\xi}(T^*X)$. On appelle flot hamiltonien Φ^t le flot sur T^*X associé à ce champ et on appelle bicaractéristique les courbes intégrales $t \to \Phi^t(x,\xi) \in T^*X$. Comme q est invariant par Φ^t , la sous-variété compacte $S^*X = \{(x,\xi) \mid q(x,\xi) = 1\} \subset T^*X$ est invariante par le flot. Posons la

DÉFINITION 1.- <u>On dit que</u> $\ell \in \mathbb{R}$ <u>est une période de bicaractéristique périodique, si l'ensemble des points fixes de</u> Φ^ℓ <u>dans</u> S^*X :

$$W = \{(x,\xi) \in S^*X \mid \Phi^\ell(x,\xi) = (x,\xi)\} \tag{3}$$

<u>est non vide</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ <u>l'ensemble de ces périodes.</u>

Notons que l'application $(x,\xi) \in W \to$ (la courbe $t \in [0,\ell] \to \Phi^t(x,\xi)$) met W en bijection avec l'ensemble des bicaractéristiques périodiques de période ℓ .

Dans le cas particulier riemannien, on prend $P = \Delta + 1$, alors le flot Φ^t sur S^*X est précisément le flot géodésique, les projections sur X des courbes intégrales sont les géodésiques de X et $|\mathcal{L}|$ est l'ensemble de leurs longueurs.

c) <u>Programme</u>

On montrera que les singularités de la distribution $S = \Sigma \exp(-i\lambda_k^{1/m} t)$ sont situées aux points t qui sont des périodes de bicaractéristiques périodiques. Ensuite, on précisera, sous certaines hypothèses, la nature de la singularité en un tel point $t = \ell$; elle est du type distributions de Fourier et les symboles principaux de ces distributions de Fourier nous indiquerons la dimension et le "volume" de l'ensemble des bicaractéristiques de périodes ℓ . Le dernier paragraphe est consacré à l'étude de cas particuliers importants.

2. Lien entre le spectre de P et les périodes des bicaractéristiques périodiques

Ainsi que l'exemple de la formule de Poisson le suggérait, on a le

THÉORÈME 1 ([6], [9]).- *La distribution* $S(t) = \Sigma \exp(-i\lambda_k^{1/m} t)$ *est* C^∞ *en dehors de l'ensemble* $\mathcal{L}$ *des périodes des bicaractéristiques périodiques :*

$$\text{support singulier } S \subset \mathcal{L} .$$

Esquissons la démonstration. L'égalité (2) ramène l'étude des singularités de S à celles de la distribution $U(t,x,y) \in \mathcal{D}'(R \times X \times X ; \Omega_{\frac{1}{2}})$. Or, cette dernière distribution est le noyau de l'opérateur qui, à une donnée $g \in C^\infty(X , \Omega_{\frac{1}{2}})$, fait correspondre la solution $f = e^{-itQ} g \in C^\infty(R \times X , \Omega_{\frac{1}{2}})$ du problème de Cauchy hyperbolique $(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + Q(x,D)).f = 0$, $f(0,x) = g(x)$.

Dans ces conditions, la théorie des opérateurs intégraux de Fourier développée par Hörmander [13] et Duistermaat, Hörmander [7], permet de démontrer le

THÉORÈME 2.- *La distribution* U *est une distribution de Fourier appartenant à l'espace* $I^{-1/4}(R \times X \times X ; C')$ *défini par la relation canonique*

(4) $\quad C = \{(t,\tau ; x,\xi ; y,\eta) \mid \tau + q(x,\xi) = 0 , (x,\xi) = \Phi^t(y,\eta) , (y,\eta) \in T^*X \setminus \{0\} \}$

et C' *s'obtient en changeant* η *en* $-\eta$ *dans* C .

De ce théorème, il découle, en particulier, que le support spectral de U (wave front set en anglais) vérifie $WF(U) \subset C'$. A l'aide des théorèmes de [13] sur le support spectral, on en déduit que l'on peut prendre la restriction de la distribution U à la sous-variété

$$D = R \times \text{diagonale}(X \times X) \subset R \times X \times X ,$$

il vient $U|_D \in \mathcal{D}'(R \times X ; \Omega_{\frac{1}{2}} \boxtimes \Omega_1)$ avec

$$WF(U|_D) \subset \{(t,\tau\,;\,x,\xi-\eta) \mid (x,\xi) = \Phi^t(x,\eta)\,,\ \tau + q(x,\xi) = 0\}\ .$$

Enfin, l'égalité (2) signifie que S est l'image directe de $U|_D$ sur R par la projection $j : R \times X \to R$, d'où $S = j_*(U|_D) \in \mathcal{D}'(R\,,\Omega_{\frac{1}{2}}) \simeq \mathcal{D}'(R)$ et

(5) $WF(S) \subset \{(t,\tau) \mid \text{il existe } (x,\xi) \in T^*X \setminus \{0\} \text{ tel que } (x,\xi) = \Phi^t(x,\xi) \text{ et } \tau < 0\} = \mathcal{L} \times R^-$,

d'où par projection sur R, l'inclusion annoncée dans le théorème 1.

On est alors conduit à se poser la question : a-t-on supp sing $S = \mathcal{L}$? pour répondre à cette question, on va préciser la nature de la singularité de S en un point $\ell \in \mathcal{L}$. Pour étudier cette singularité, on suppose que ℓ est isolé dans $\mathcal{L}$ et on localise S en la multipliant par une fonction $\rho \in C_0^\infty(R)$ vérifiant $\rho(\ell) = 1$ et $\operatorname{supp} \rho \cap \mathcal{L} = \{\ell\}$. L'étude de ρS, modulo C^∞, se ramène à l'étude de sa transformée de Fourier modulo une fonction à décroissance rapide. On est donc amené à déterminer le comportement asymptotique, quand $\tau \to +\infty$, de l'expression

(6) $$\mathcal{F}^{-1}(\rho S)(\tau) = \text{"} \int_R e^{i\tau t}\, \rho(t) S(t)\, \frac{dt}{2\pi} \text{"}\ .$$

Il est plus agréable ici de travailler avec la transformée de Fourier inverse car on a aussi, d'après (1), l'expression

(7) $$\mathcal{F}^{-1}(\rho S)(\tau) = \sum_{j \geq 1} \tilde{\rho}(\tau - \mu_j) \qquad \text{où } \tilde{\rho} = \mathcal{F}^{-1}\rho$$

Notons déjà, que $\mathcal{F}^{-1}(\rho S)(\tau)$ est à décroissance rapide pour $\tau \to -\infty$ à cause de l'inclusion (5).

Un outil de base dans l'étude du comportement, pour $\tau \to +\infty$, sera le théorème de la phase stationnaire.

3. Une extension du théorème de la phase stationnaire

En fait, on a besoin d'une extension au cas où les points critiques ne sont pas isolés, cette extension a été indiquée par Colin de Verdière [7] dans un cadre riemannien, en voici une formulation valable sur une variété quelconque.

THÉORÈME 3.- Soit Z une variété C^∞ de dimension N et soit une phase $\psi \in C^\infty(Z\,,R)$. On suppose que l'ensemble $V = \{z \mid \psi'(z) = 0\}$ des points critiques de ψ est une sous-variété connexe de Z et de plus, on suppose que, pour tout $z \in V$, la forme quadratique Hess $\psi(z)$ est non dégénérée sur l'espace normal $T_z Z/T_z V$. Dans ces conditions, on dit que V est une variété critique non dégénérée pour ψ .

Alors à toute densité $a \in C_0^\infty(Z,\Omega_1)$ on peut associer naturellement une densité $a_\psi \in C_0^\infty(V,\Omega_1)$ telle que

(8) $$\int_Z e^{i\tau\psi(z)}\, a(z) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{(N-d)/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma}\, e^{i\tau\psi(w)}\, p(\tau)$$

où $d = \dim V$, $\sigma =$ signature de Hess ψ sur V et $p(\tau) \sim \sum_{k\geq 0} b_k \tau^{-k}$ $(\tau\ \infty)$ dont le terme principal est

(9) $$b_o = \int_V a_\psi(z) \ .$$

La densité $a_\psi(z)$ sur $T_z V$ est obtenue en "divisant" la densité $a(z)$ sur $T_z Z$ par la densité canonique, sur $T_z Z/T_z V$, associée à la forme quadratique non dégénérée Hess $\psi(z)$.

La démonstration de ce théorème se fait en remarquant que l'on a une généralisation du lemme de Morse à cette situation, ce qui permet de se ramener, après une intégration partielle, au théorème de la phase stationnaire usuel.

Remarque 2.- Les coefficients du développement asymptotique de cette intégrale ne dépendent que des jets de a et ψ sur V . Par conséquent, si V n'est plus connexe, on a une contribution de ce type associée à chaque composante connexe.

4. Spectre de P et flot hamiltonien

Pour étudier le comportement asymptotique de $\mathcal{F}^{-1}(\rho S)$, l'égalité (2) nous conduit, pour commencer, à expliciter la distribution de Fourier $\rho(t)U(t,x,y)$. Par définition, c'est une somme finie d'intégrales oscillantes :

$$(\rho U)(t,x,y) =$$
$$\sum_\alpha (2\pi)^{-n}\left[\int_{R^n} e^{i(\varphi_\alpha(t,x,\eta) - y.\eta)}\rho(t)a_\alpha(t,x,\eta)d\eta\right]\sqrt{dt}\sqrt{dx}\sqrt{dy}$$

où • $\varphi_\alpha(t,x,\eta)$ est une phase définie, dans un ouvert conique $\Gamma_\alpha \subset R^{n+1} \times R^n$, telle que l'application c_α

(10) $\quad \Gamma_\alpha \ni (t,x,\eta) \xrightarrow{c_\alpha} (t,\partial_t\varphi_\alpha\,;\,x,\partial_x\varphi_\alpha\,;\,\partial_\eta\varphi_\alpha\,,\eta) \in C$

définit une carte locale de la variété lagrangienne C ; ces cartes recouvrant C (pour $t \in \operatorname{supp}\rho$) quand α varie.

• $a_\alpha(t,x,\eta)$ est une amplitude à support "conique-compact" et appartenant à l'espace de symbole $S^o(\Gamma_\alpha)$ (cf. [10] pour tout ceci).

En portant cette expression de ρU dans (2), il vient pour (6) :

(11) $\quad \mathfrak{F}^{-1}(\rho S) = \sum_\alpha I_\alpha(\tau)$

avec

(12) $\quad I_\alpha(\tau) = (2\pi)^{-n-1}\,\tau^n \iiint_{\Gamma_\alpha} e^{i\tau\psi_\alpha(t,x,\eta)}\,\rho(t)a_\alpha(t,x,\tau\eta)\,d\eta\,dx\,dt$

et $\quad \psi_\alpha(t,x,\eta) = \varphi_\alpha(t,x,\eta) - x.\eta + t$.

Pour déterminer le comportement asymptotique en τ d'un terme $I_\alpha(\tau)$, on utilise le théorème 3 (ou plutôt son extension aux intégrales oscillantes). Pour alléger, omettons provisoirement l'indice α dans φ_α , ψ_α , a_α . L'ensemble critique V_α de ψ est défini par

$$V_\alpha = \{(t,x,\eta) \in \Gamma_\alpha \mid \partial_t\varphi + 1 = 0\,,\, \partial_x\varphi = \eta\,,\, \partial_\eta\varphi = x\}\ ,$$

son image, par la carte c_α , est formée des points de la forme

$$(t\,,-1\,;\,x\,,\partial_x\varphi\,;\,x\,,\partial_x\varphi) \in C\ ,$$

ce qui montre, d'après (3), (4), (10), que $t \in \operatorname{supp}\rho \cap \mathfrak{L}$, par conséquent

$$t = \ell \quad \text{et} \quad V_\alpha = \{\ell\} \times \{(x,\eta) \mid (x\,,\partial_x\varphi(\ell,x,\eta)) \in W\}\ .$$

Notons, au passage, que ceci redonne une démonstration du théorème 1.

Pour que V_α soit une variété critique non dégénérée pour la phase ψ_α , on est conduit à faire une hypothèse sur l'ensemble W :

<u>Hypothèse</u>.- <u>On suppose que l'ensemble</u> W <u>des points fixes de</u> Φ^ℓ <u>dans</u> S^*X <u>est une sous-variété</u> (<u>non nécessairement connexe</u>) <u>et que de plus</u>, <u>son espace tangent est donné par</u>

$$T_{(x,\xi)}W = \operatorname{Ker}(T_{x,\xi}\,\Phi^\ell - I) \cap \operatorname{Ker} dq(x,\xi)\ .$$

<u>Dans ces conditions</u>, <u>on dit que</u> W <u>est régulier</u> (clean fixed point dans [11]).

Sous cette hypothèse, on peut définir sur W une densité canonique $dv_W \in C^\infty(W,\Omega_1)$ en appliquant le

<u>Lemme</u> 1 [11].- <u>Soit</u> (E,ω) <u>un espace vectoriel symplectique et soit</u> L <u>un automorphisme symplectique de</u> E . <u>Alors, le sous-espace des points fixes</u> $\mathrm{Ker}(L - I)$ <u>possède une densité canonique.</u>

On vérifie ensuite que si W est régulier, alors V_α est bien une variété critique non dégénérée pour ψ_α . L'application du théorème 3 à l'intégrale $I_\alpha(\tau)$ donne l'expression asymptotique suivante (on a supposé Γ_α assez petit pour ne rencontrer qu'une seule composante connexe W_j de W et soit $d_j = \dim W_j$) :

$$(13) \qquad I_\alpha(\tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{(d_j - 1)/2} e^{i\tau\ell}\, e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_\alpha}\, b_\alpha(\tau) \quad \text{avec} \quad b_\alpha(\tau) \sim \sum_{k\geq 0} b_{\alpha,k}\, \tau^{-k}$$

et pour terme principal (14) $\qquad b_{\alpha,0} = \int_{V_\alpha} a_{\alpha,0}(\ell,x,\eta)_{\psi_\alpha}$,

où $a_{\alpha,0}$ est le terme principal du développement du symbole a_α .

Ensuite, on regroupe les contributions des intégrales $I_\alpha(\tau)$ associées à la même composante connexe W_j de W en utilisant le lemme technique suivant

<u>Lemme</u> 2.- <u>Soit</u> $(x,\xi) \in W_j$ <u>et soit</u> (x,η_α) <u>son antécédent (s'il existe) par le monomorphisme</u> $V_\alpha \ni (x,\eta) \to (x,\partial_x\varphi_\alpha(\ell,x,\eta)) \in W$. <u>Alors il existe un entier</u> $\sigma_j \in \mathbb{Z}$, <u>tel que l'on ait l'égalité</u>

$$(15) \qquad \sum_\alpha e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_\alpha}\, a_{\alpha,0}(\ell,x,\eta)_{\psi_\alpha} = e^{-i\ell\bar{c}(x,\xi)}\, e^{i\frac{\pi}{4}(d_j - 1)}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_j}\, dv_{W_j}(x,\xi) \quad ,$$

<u>où</u> $\bar{c}(x,\xi)$ = <u>moyenne du symbole sous-principal de</u> Q <u>sur la bicaractéristique associée à</u> $(x,\xi) \in W_j$.

Enfin, compte tenu de (11), (12), (13), (14), (15), on montre le

THÉORÈME 4 ([6] et [11]).- <u>Soit</u> $\ell \in \mathcal{L}$ <u>et soient</u> $W_1,\dots,W_r$ <u>les composantes connexes de l'ensemble des points fixes de</u> Φ^ℓ . <u>On suppose que les</u> W_j <u>sont réguliers et on pose</u> $d_j = \dim W_j$. <u>Alors, à chaque</u> W_j <u>correspond une distribution de Fourier</u> $B_j \in I^{d_j/2 - 1/4}(\mathbb{R}\,;\{\ell\}\times \mathbb{R}^-)$, <u>de symbole principal non nul, et telle que la singularité de</u> S <u>en</u> $t = \ell$ <u>est donnée par</u>

$$(16) \qquad S(t) \equiv B_1(t) + \dots + B_r(t) \qquad \text{modulo } C^\infty \text{ au voisinage de } \ell \ .$$

Ce théorème montre, en particulier, que si W est régulier et connexe pour tout ℓ alors : supp sing $S = \mathcal{L}$.

Comme annoncé à la fin du paragraphe 1, il reste à préciser l'information géométrique contenue dans les symboles principaux des distributions de Fourier B_j . Dans le cas des distributions B_j , le symbole principal est caractérisé par la partie principale du développement pour $\tau \to +\infty$ de

$$\langle B_j(t) , \rho(t)e^{i\tau t}\rangle = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(\rho B_j)(\tau) .$$

On est donc ramené à calculer le nombre complexe b_j défini par

$$(17) \qquad \mathcal{F}^{-1}(\rho B_j)(\tau) \sim \left(\frac{\tau}{2i\pi}\right)^{(d_j - 1)/2} e^{i\tau\ell}\, b_j .$$

C'est le

THÉORÈME 5 [11].- <u>Sous les hypothèses du théorème 4, on a</u> $b_j = |b_j| e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_j}$ <u>avec</u> $|b_j| = \frac{1}{2\pi}\int_{W_j} e^{-i\ell\bar{c}(x,\xi)}\, dv_{W_j}(x,\xi)$ <u>où</u> :

$\bar{c}(x,\xi)$ = <u>moyenne du symbole sous-principal de</u> Q <u>sur la bicaractéristique périodique passant par</u> (x,ξ) ,

dv_{W_j} = <u>la densité canonique sur la composante connexe</u> W_j <u>de</u> W ,

<u>et</u> σ_j = n - 1 + <u>indexe</u> (au sens de Duistermaat [10]) <u>de la courbe de plans lagrangiens</u> $t \in [0,\ell] \to (T_{x,\xi}\,\Phi^t)^{-1}\, V_t \subset T_{x,\xi}(T^*X)$ <u>où</u> V_t <u>est l'espace vertical de</u> $T_{\Phi^t(x,\xi)}(T^*X)$ <u>et</u> $(x,\xi) \in W_j$.

L'expression de $|b_j|$ se démontre à partir de (14) et (15). Pour ce qui est de l'entier σ_j , c'est beaucoup plus compliqué et il me semble difficile de l'expliquer en quelques lignes. Indiquons seulement que Duistermaat [10] a démontré dans le cas riemannien (et plus généralement, quand on peut associer à l'hamiltonien $p(x,\xi)$ un problème régulier de calcul des variations) que σ_j est égal à l'indice de Morse des géodésiques périodiques associées à W_j . Dans le cas riemannien, Klingenberg [14] a également obtenu une expression de l'indice de Morse en terme d'intersections de fibrés lagrangiens.

5. Cas particuliers et applications

a) Cas particuliers où les trajectoires des bicaractéristiques périodiques sont isolées

Tout d'abord, rappelons la définition de l'application de Poincaré $\mathcal{P}_\gamma$ associée à une bicaractéristique périodique γ issue de $(x,\xi) \in W_j$. Après avoir remarqué que $H_q(x,\xi)$ est invariant par l'application linéaire $T_{x,\xi}\Phi^\ell$, on définit $\mathcal{P}_\gamma$ comme l'application linéaire induite par $T_{x,\xi}\Phi^\ell$ sur l'espace quotient $T_{x,\xi}(S^*X)$ / modulo $H_q(x,\xi)$. On dit qu'une bicaractéristique périodique γ est non dégénérée si $\det(I - \mathcal{P}_\gamma) \neq 0$, ce qui entraîne que W_j est régulier et coïncide avec la trajectoire de γ, sa dimension est donc $d_j = 1$. Des théorèmes 4 et 5, on déduit le

THÉORÈME 6 [8].- On suppose que les bicaractéristiques périodiques de période ℓ sont toutes non dégénérées. Alors W est réunion disjointe des trajectoires $W_1,\dots,W_r$ de ces bicaractéristiques périodiques et on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\rho S) \sim \frac{1}{2\pi} e^{i\tau\ell} \sum_{j=1}^{r} e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_j} e^{-i\ell\bar{c}_j} \frac{\ell}{N_j} |\det(I - \mathcal{P}_j)|^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

où $\frac{\ell}{N_j}$ est la période primitive des bicaractéristiques de W_j et σ_j défini comme dans le théorème 5.

En effet, on montre que dans ce cas particulier, la densité canonique sur la variété $W_j = \{\Phi^t(x,\xi) \mid t \in [0,\ell]\}$ est donnée par $dv_{W_j} = |\det(I - \mathcal{P}_j)|^{-\frac{1}{2}} dt$.

Application au cas riemannien. Supposons que toutes les géodésiques périodiques soient non dégénérées et de longueurs deux à deux distinctes (cas générique pour les structures riemanniennes). Alors, la formule (18) permet de retrouver un résultat de Colin de Verdière [6], à savoir : la connaissance du spectre du Laplacien détermine les longueurs des géodésiques périodiques, leurs indices de Morse modulo 4 et les longueurs des géodésiques primitives. Mais il y a plus, en effet, l'application de Poincaré associée à la k-ième itérée, $k\gamma$, de la géodésique périodique γ est donnée par $\mathcal{P}_{k\gamma} = (\mathcal{P}_\gamma)^k$. Et grâce à un théorème de H. Stark (cf. [11]), cela permet de déduire du spectre, les valeurs propres de modules $\neq 1$ de $\mathcal{P}_\gamma$ et celles de module 1 à une racine de l'unité près ; en particulier, on peut savoir si le flot, le long de γ., est elliptique ou hyperbolique.

b) Cas particulier de la singularité de S en $t = 0$

Pour $\ell = 0$, on a $W = S^*X$, alors les théorèmes 4 et 5 donnent le

THÉORÈME 7 [11].- Soit $\rho \in C_0^\infty(R)$, à support voisin de 0, et $\rho(0) = 1$. Alors on a l'équivalent

$$(19) \qquad \mathfrak{F}^{-1}(\rho S)(\tau) \sim (2\pi)^{-n}\, \tau^{n-1}\, \mathrm{vol}(S^*X)\ .$$

Dans ce cas particulier, il est plus simple d'utiliser directement le théorème 3 ; on peut aussi obtenir des renseignements sur les termes suivants du développement asymptotique (cf. [11]).

Ce théorème admet une application importante à l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres (λ_j) de P. En effet, en jouant sur les fonctions ρ dans la formule (7), l'équivalent (19) permet de redémontrer simplement un résultat de Hörmander [12] :

THÉORÈME 8 [11].- Le nombre de valeurs propres de P inférieures à λ admet le comportement suivant :

$$(20) \qquad \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\} = (2\pi)^{-n}\, \mathrm{vol}(B^*X)\, \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m})$$

où $B^*X = \{(x,\xi) \mid p(x,\xi) \leq 1\}$.

c) Cas particulier où le flot Φ^t est périodique de période T

Dans le cas où $\Phi^T = I$, on prend $\ell = T$, alors on a $W = S^*X$. Il découle des théorèmes 4 et 5 le

THÉORÈME 9 [11].- Supposons $\Phi^T = I$ et que la moyenne $\bar{c}(x,\xi)$ du symbole sous principal de Q soit une constante $\bar{c}$. Soit $\rho \in C_0^\infty(R)$ à support voisin de T, alors on a l'équivalent

$$(21) \qquad \mathfrak{F}^{-1}(\rho S) \sim (2\pi)^{-n}\, \tau^{n-1}\, e^{i\tau T}\, e^{-i\beta T}\, \mathrm{vol}(S^*X)\ ,$$

où $\beta = \bar{c} + \frac{\pi}{2T}\sigma$ et σ désigne ici la valeur, sur une bicaractéristique de période T, de la classe de cohomologie d'Arnold-Maslov [1] associée à la projection $\widetilde{C}$ de C dans $T^*(\mathbb{R} \bmod T \times X \times X)$.

Comme application de ce théorème, Duistermaat et Guillemin démontrent un résultat remarquable sur la concentration des valeurs propres (μ_j) au voisinage des points $\nu_k = \beta + \frac{2\pi}{T} k$ $(k = 1,2,\dots)$. Cette application est basée sur l'estimation

(22) $\mathfrak{F}^{-1}[\rho(t)S(t) - e^{i\beta T} S(t + T)](\tau) = O(\tau^{n-2})$ (ρ est à support voisin de 0)

qui découle immédiatement de (19) et (21). Pour énoncer le résultat, on associe à tout réel $C > 0$ un voisinage $I_C = \bigcup_{k\geq 1} [\nu_k - Ck^{-\frac{1}{2}}, \nu_k + Ck^{-\frac{1}{2}}]$ de la suite (ν_k) .

THÉORÈME 10 [11].- Sous les hypothèses du théorème 8, il existe des constantes positives A , B , τ_0 , telles que :

(23) $$\frac{\#\{j \mid \mu_j \in I_C \cap [\tau - A, \tau + A]\}}{\#\{j \mid \mu_j \in [\tau - A, \tau + A]\}} \geq \left(1 - \frac{B}{C^2}\right)$$

pour tous $C > 0$ et $\tau \geq \tau_0$. Et réciproquement, si on a une telle concentration du spectre (μ_j) au voisinage d'une progression arithmétique (ν_k) alors le flot Φ^t est périodique de période T .

Pour terminer cet exposé, indiquons qu'un important problème reste ouvert dans ce domaine. C'est l'étude du cas où la variété X a un bord. Par exemple, si X est un ouvert borné strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ et $P = -\Delta$, on pense d'après [2], que le théorème 1 reste vrai à condition de prendre pour $\mathcal{L}$ l'ensemble des longueurs des trajectoires de billard fermées et des géodésiques périodiques du bord ∂X . Malheureusement, la généralisation du théorème 2, que nous avons donnée dans [5], au cas du problème mixte hyperbolique, n'est pas suffisante pour démontrer cette conjecture car il reste à analyser le rôle des "rayons rasants" (lié au phénomène de la diffraction).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD - On a characteristic class with enters in quantization conditions, English transl. Funct. anal. appl., 1 (1967), 1-13.

[2] R. BALIAN, C. BLOCH - Distributions of eigenfrequenties for the wave equation in a finite domain III, Ann. of Physics, 69, vol. 1 (1972), 76-160.

[3] L. BÉRARD-BERGERY - Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espaces hyperboliques compactes, Sém. Bourbaki, exposé 406, février 1972, Lecture Notes in Math. 317, Springer 1973, p. 107-122.

[4] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET - Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer 1971.

[5] J. CHAZARAIN - Le problème mixte hyperbolique, Sém. Bourbaki, exposé 432, juin 1973, Lecture Notes in Math. 383, Springer 1974, p. 265-285.

[6] J. CHAZARAIN - Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Inv. Math. 24 (1974), 65-82, Voir aussi Séminaire Goulaouic-Schwartz (1974), exposé n° 16.

[7] Y. COLIN DE VERDIÈRE - Spectre du laplacien et longueur des géodésiques périodiques II, Composition Math., vol. 27, Fasc. 2, (1973), 159-184. Voir aussi Sém. Goulaouic-Schwartz (1974), exposé n° 14.

[8] J. J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER - Fourier integral operators II, acta Math., 128 (1972), 184-269.

[9] J. J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN - The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, Proc. A. M. S. Stanford (1973), à paraître.

[10] J. J. DUISTERMAAT - On the Morse index in variational calculus, preprint 1974, 33 pages, [Voir aussi Sém. Goulaouic-Schwartz (1974), exposé n° 25].

[11] J. J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN - The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, preprint (1974), 89 pages.

[12] L. HÖRMANDER - The spectral function of an elliptic operator, Acta. Math., 121 (1968), 193-218.

[13] L. HÖRMANDER - Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.

[14] W. KLINGENBERG - Le théorème de l'indice pour les géodésiques fermées, C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), 1005-1008, et preprint (1974).