

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUC ILLUSIE

## **Cohomologie cristalline**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1976, exp. n° 456, p. 53-60

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1974-1975\\_\\_17\\_\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__53_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE CRISTALLINE

[d'après P. BERTHELOT]

par Luc ILLUSIE

Les paragraphes 1 et 2 de cet exposé sont un résumé très succinct de la thèse de Berthelot [2]. Pour un compte-rendu un peu plus complet, mais tout aussi dépourvu de démonstrations, le lecteur pourra se reporter à [10]. Aux paragraphes 3 et 4, nous indiquons brièvement quelques applications et prolongements de la théorie.

1. Définition de la cohomologie cristalline

1.0 Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $W = W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt sur  $k$ . La théorie de Berthelot associe fonctoriellement à chaque variété (= schéma de type fini)  $X/k$  des "groupes de cohomologie cristalline"  $H^i(X/W)$  qui sont des modules sur  $W$ . Pourvu qu'on se limite aux variétés propres et lisses sur  $k$ , la cohomologie cristalline remplit le vide laissé en  $p$  par les cohomologies  $\ell$ -adiques de Grothendieck : elle permet, par exemple, pour  $X$  projective et  $k$  fini, une étude  $p$ -adique des zéros et des pôles de la fonction zêta de  $X$ , voir § 3. L'idée de la construction est due à Grothendieck (cf. [7], [8]).

1.1 Soient  $A$  un anneau (commutatif, unitaire),  $I$  un idéal de  $A$ . Rappelons [26] qu'une structure de puissances divisées (en abrégé, PD-structure) sur  $I$  est la donnée d'une famille d'applications  $(\gamma_n : I \rightarrow A)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les propriétés formelles de  $x \mapsto x^n/n!$ . Un idéal muni d'une PD-structure s'appelle un PD-idéal. Si  $A$  est de caractéristique nulle, tout idéal est muni naturellement d'une unique PD-structure. Si  $A$  est de torsion, tout PD-idéal est un nil-idéal. L'idéal maximal  $pW$  de  $W$  est muni d'une unique PD-structure, dite canonique. Elle induit une PD-structure canonique sur l'idéal maximal de chaque quotient  $W_n = W/p^{n+1}W$ . Désignons par  $R$  l'anneau  $W$  ou un quotient  $W_n$ . Soit  $(A, I)$  une paire formée d'une  $R$ -algèbre et d'un idéal, le foncteur associant

à chaque paire  $(B, J)$  formée d'une  $R$ -algèbre  $B$  et d'un idéal  $J$  muni d'une PD-structure compatible avec la PD-structure canonique de  $pR$  l'ensemble des homomorphismes de  $R$ -algèbres  $A \rightarrow B$  envoyant  $I$  dans  $J$  est représenté par une paire  $(D_{A/R}(I), \bar{I})$  appelée PD-enveloppe de  $I$  relativement à  $R$ . On a  $D_{A/R}(I)/\bar{I} = A$ . Si  $I = pA$ , on a  $(D_{A/R}(I), \bar{I}) = (A, I)$ . Cette construction se faisceautise.

1.2 Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  une variété sur  $k$ . Une  $W_n$ -immersion fermée  $i : U \hookrightarrow \bar{U}$ , où  $U$  est un ouvert de Zariski de  $X$  et l'Idéal de  $i$  est muni d'une PD-structure compatible avec la structure canonique de  $pW_n$ , s'appelle un PD- $W_n$ -épaississement de  $X$ . Les PD- $W_n$ -épaississements de  $X$  forment de manière évidente une catégorie, sur laquelle on définit une topologie de Grothendieck en prenant pour familles couvrantes les familles  $((U_\alpha \hookrightarrow \bar{U}_\alpha) \rightarrow (V \hookrightarrow \bar{V}))$  telles que  $(\bar{U}_\alpha \rightarrow \bar{V})$  soit un recouvrement ouvert de  $\bar{V}$ . Le site ainsi obtenu s'appelle site cristallin de  $X$  relativement à  $W_n$  et se note  $X/W_n$ . Les  $\mathcal{O}_{\bar{U}}$  définissent un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_{X/W_n}$  sur  $X/W_n$ . Les groupes de cohomologie  $H^i(X/W_n) \stackrel{\text{dfn}}{=} H^i(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$  sont des  $W_n$ -modules, ils forment une algèbre graduée anti-commutative.

Supposons qu'on dispose d'une  $W_n$ -immersion fermée  $i : X \hookrightarrow Y$ , avec  $Y$  lisse sur  $W_n$ . Alors on peut calculer les  $H^i(X/W_n)$  par le procédé suivant. Notons  $(\mathfrak{D}_X(Y), \bar{I})$  la PD-enveloppe de l'Idéal  $I$  de  $i$ .  $\mathfrak{D}_X(Y)$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente, qui est munie naturellement d'une connexion intégrable par rapport à  $W_n$ , de sorte qu'on peut former le complexe de De Rham de  $Y/W_n$  à coefficients dans  $\mathfrak{D}_X(Y)$ , soit  $\Omega_{Y/W_n}^* \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{D}_X(Y)$ . Comme  $\bar{I}$  est un nil-Idéal et que  $\mathfrak{D}_X(Y)/\bar{I} = \mathcal{O}_X$ , ce complexe est à support dans  $X$ . Un des résultats principaux de Berthelot est qu'on a alors un isomorphisme canonique

$$1.2.1 \quad H^*(X/W_n) \simeq H^*(X, \Omega_{Y/W_n}^* \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{D}_X(Y)) .$$

En particulier, si  $X$  est la réduction sur  $k$  d'un schéma lisse  $X'/W_n$ , on a

$$1.2.2 \quad H^*(X/W_n) \simeq H_{\text{DR}}^*(X'/W_n) ,$$

vu que  $\mathcal{D}_X(X') = \mathcal{O}_{X'}$ , (si  $Y \rightarrow Z$  est un morphisme de schémas, on note  $H_{DR}^*(Y/Z) \stackrel{\text{dfn}}{=} H^*(Y, \Omega_{Y/Z}^*)$  la cohomologie de De Rham de  $Y/Z$ ).

1.3 Pour  $i$  fixé et  $n$  variable, les  $H^i(X/W_n)$  forment un système projectif dont la limite, notée  $H^i(X/W)$ , est par définition le  $i$ -ième groupe de cohomologie cristalline de  $X$  par rapport à  $W$ .  $H^*(X/W) = \bigoplus H^i(X/W)$  est une  $W$ -algèbre graduée anti-commutative, qui dépend fonctoriellement de  $X/k$  : tout carré commutatif  $X'/k' \rightarrow X/k$  induit un homomorphisme  $H^*(X/W) \otimes_W W' \rightarrow H^*(X'/W')$  ( $W' = W(k')$ ). En dehors du cas  $X/k$  propre et lisse,  $H^*(X/W)$  est plutôt pathologique (e.g., si  $X$  est la droite affine (resp. la réunion de deux droites projectives se coupant en un point),  $H^1(X/W)$  n'est pas de type fini).

## 2. Cohomologie cristalline des variétés propres et lisses

2.1 Soient  $k$  et  $W$  comme dans 1.0. Soit  $X$  une variété propre et lisse sur  $k$ , de dimension  $d$ . Les  $H^i(X/W)$  sont alors de type fini sur  $W$ , nuls pour  $i > 2d$ . Si  $X/k$  est projective ou relevable sur  $W$ , le rang de  $H^i(X/W)$  est égal au  $i$ -ième nombre de Betti  $\ell$ -adique de  $X$ ,  $b_\ell^i(X)$ , pour tout  $\ell \neq p$  (rappelons que  $b_\ell^i(X) = \dim H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ , où  $\bar{X}$  est déduit par extension des scalaires à une clôture algébrique de  $k$ ) (\*). On le note  $b^i(X)$ .

La formation de  $H^*(X/W)$  commute à toute extension de corps parfaits  $k'/k$  : si  $X'/k'$  se déduit par extension des scalaires de  $X/k$ , on a  $H^*(X/W) \otimes_W W' \simeq H^*(X'/W')$ .

2.2 Pour tout entier  $i$ , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^i(X/W) \otimes_W k \rightarrow H_{DR}^i(X/k) \rightarrow \text{Tor}_1^W(H^{i+1}(X/W), k) \rightarrow 0.$$

Donc  $\dim_k H_{DR}^i(X/k) \geq b^i(X)$ , avec égalité si et seulement si  $H^i(X/W)$  et  $H^{i+1}(X/W)$  n'ont pas de torsion.

2.3 Si  $X/k$  est la réduction d'un schéma propre et lisse  $X'/W$ , on a un isomorphisme canonique

$$H^*(X/W) \simeq H_{DR}^*(X'/W)$$

---

(\*) Les conjectures de Weil ([6], [13]) sont en filigrane dans cette assertion.

(dédduit de 1.2.2 par passage à la limite). C'est un analogue du théorème d'invariance de Washnitzer et Monsky dans le cas affine [24].

2.4 Pour les variétés propres et lisses sur  $k$ , la cohomologie cristalline vérifie un formulaire (Künneth, dualité de Poincaré, morphisme de Gysin) analogue à celui dont on dispose en cohomologie  $\ell$ -adique. La seule différence notable est qu'on ne sait pour l'instant définir la classe de cohomologie  $c(Y/W) \in H^{2d}(X/W)$  d'un cycle  $Y$  de codimension  $d$  sur  $X$  que si  $Y$  est non singulier.

2.5 Supposons que  $k$  soit le corps fini  $\mathbb{F}_q$ , notons  $K$  le corps des fractions de  $W$ . Soit  $X$  une variété propre et lisse sur  $k$ . L'endomorphisme de Frobenius  $F$  de  $X$  ( $x \mapsto x^q$  sur  $\mathcal{O}_X$ ) induit un automorphisme, noté encore  $F$ , de  $H^*(X/W)_K \stackrel{\text{dfn}}{=} H^*(X/W) \otimes_W K$ . Berthelot montre que la fonction zêta de  $X/k$  est donnée par la formule

$$2.5.1 \quad Z(X/k) = \prod P_{2i-1}(t) / \prod P_{2i}(t),$$

où  $P_n(t) = \det(\text{Id} - Ft, H^n(X/W)_K)$ . A priori, on a  $P_n(t) \in K[t]$ , mais Katz et Messing [13] ont déduit des conjectures de Weil [6] que si  $X/k$  est projective  $P_n(t)$  est à coefficients entiers et coïncide, pour tout nombre premier  $\ell \neq p$ , avec le polynôme caractéristique analogue en cohomologie  $\ell$ -adique.

2.6 Le corps  $k$  étant à nouveau un corps parfait quelconque de car.  $p > 0$ , soit  $S$  une variété affine et lisse sur  $k$ , et soit  $S'$  un schéma formel lisse sur  $W$  relevant  $S$  et tel que  $S' = \varinjlim S'_n$ , où  $S'_n = S' \otimes W_n$ ,  $W_n = W/p^{n+1}W$ . Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et lisse. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  définit un morphisme de sites cristallins  $f_n : X/W_n \rightarrow S'_n/W_n$ . Pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ , la limite des  $R^i f_{n*} \mathcal{O}_{X/W_n}$  est un F-cristal cohérent sur  $S'$  au sens de Katz [12], qui exprime la variation des  $i$ -ièmes groupes de cohomologie cristalline des fibres de  $f$ . Pour la comparaison de ce point de vue avec ceux de Dwork et de Washnitzer-Monsky, le lecteur pourra consulter [23] et l'introduction de [2].

### 3. Polygones de Newton cristallins, d'après Mazur [16], [17], [18]

3.1 Soient  $k, W, K$  comme en 2.5, notons  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $v$  la valuation sur  $\bar{K}$  telle que  $v(q) = 1$ . Rappelons qu'on appelle polygone de Newton ( $p$ -adique) d'un polynôme  $f = \sum a_i t^i \in \bar{K}[t]$  l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  des points  $(i, v(a_i))$ . Si  $f = \prod_{i=1}^N (1 - \alpha_i t)$ , avec  $\alpha_i \neq 0$  pour  $1 \leq i \leq N$ , les points extrémaux du polygone de Newton de  $f$  forment une ligne polygonale convexe  $(A_0 = (0,0), A_1, \dots, A_r)$  dont les pentes des côtés sont les valuations des  $\alpha_j$ ; si  $m_i$  est la pente de  $A_{i-1}A_i$  et  $s_i$  le nombre de  $\alpha_j$  tels que  $v(\alpha_j) = m_i$ , on a  $A_i = (s_1 + \dots + s_i, m_1 s_1 + \dots + m_i s_i = v(a_{s_1 + \dots + s_i}))$  (et  $s_1 + \dots + s_r = N$ ).

3.2 Soient  $n$  un entier,  $X$  une variété projective et lisse sur  $k = \mathbb{F}_q$ ,  $b_n$  le rang de  $H^n(X/W)$ ,  $F$  et  $P_n(t)$  comme en 2.5. Le  $n$ -ième polygone de Newton cristallin de  $X$  est par définition le polygone de Newton  $Cr_n(X/W)$  de  $P_n(t)$ . D'après un lemme d'algèbre  $p$ -linéaire de Dieudonné-Manin [15], les points extrémaux  $(0, A_1, \dots, A_{b_n})$  de  $Cr_n(X/W)$  ont des coordonnées entières<sup>1</sup>. De plus, la dualité de Poincaré (2.4) et le théorème de Lefschetz "fort" en cohomologie cristalline [13] impliquent que  $A_{b_n} = (b_n, nb_n/2)$ .

Supposons que  $X$  soit la réduction sur  $k$  d'un schéma projectif et lisse  $X'/W$  tel que les  $W$ -modules  $H^i(X', \Omega_{X'/W}^j)$  soient libres, de rangs notés  $h^{ji}$ . On a  $b_n = \sum_{i+j=n} h^{ij}$ , et  $h^{ij} = h^{ji}$ . On appelle  $n$ -ième polygone de Hodge de  $X'$  le polygone de Newton  $Hdg_n(X'/W)$  du polynôme (de degré  $b_n$ )  $\prod_{i=0}^n (1 - q^i t)^{h^{i, n-i}}$ . Il a pour points extrémaux les  $B_i = (h^{0, n} + \dots + h^{i, n-i}, 0 \cdot h^{0, n} + \dots + i h^{i, n-i})$ , et  $B_{b_n} = A_{b_n}$ . Mazur [17]

a démontré le beau résultat suivant, conjecturé par Katz [11] pour les intersections complètes (et prouvé par Dwork pour les hypersurfaces) :

<sup>1</sup>  $Cr_n(X/W)$  est aussi le polygone de Newton associé par la théorie de [15] à  $H^n(X/W)$  muni de l'endomorphisme semi-linéaire induit par l'élévation à la puissance  $p$ -ième sur  $X$ ; cela permet d'étendre la définition de  $Cr_n(X/W)$  au cas où  $k$  est un corps parfait quelconque de car.  $p > 0$  (voir [3], [16]).

THÉORÈME 3.3.  $Cr_n(X/W)$  est au-dessus de  $Hdg_n(X'/W)$  .

En particulier, si  $c$  est le plus petit entier tel que  $h^{c,n-c}$  soit non nul, toutes les "racines inverses" de  $P_n(t)$  sont divisibles par  $q^c$ . Ce résultat de divisibilité - qui généralise le théorème classique de Chevalley-Waring [28] ainsi qu'il est montré dans [11] - avait été obtenu par Katz dans le cas des intersections complètes à l'aide de la théorie de Dwork. Pour des applications de 3.3, ainsi qu'un exposé de diverses variantes et conjectures, nous renvoyons le lecteur à [16], [18]. Signalons que le polygone de Newton cristallin croît par spécialisation (résultat non publié de Grothendieck), d'où l'on déduit, pour une famille propre et lisse paramétrée par une variété  $T/k$ , une stratification de  $T$  par des strates à polygone cristallin constant : voir [1], [14] pour une analyse de ces stratifications pour certaines familles modulaires.

#### 4. Compléments

4.1 A la suite de Grothendieck [9], Mazur et Messing [19], [20], [21] ont étudié en détail le  $H^1$  cristallin en relation avec la "théorie de Dieudonné" des groupes  $p$ -divisibles (= Barsotti-Tate) sur des bases générales  $S$ . Toutefois, en dehors du cas où  $S$  est le spectre d'un corps parfait, on ne sait pas faire le lien entre cette théorie et la théorie de Cartier des groupes formels [5], [25].

4.2 A l'aide de la cohomologie cristalline (et aussi de la cohomologie fppf), Milne [22] a démontré les analogues pour  $l = p$  des théorèmes de Tate ([27], 5.1 et 5.2) sur le groupe de Brauer des surfaces projectives lisses sur des corps finis.

4.3 Bloch [4] sait définir, pour  $X$  propre et lisse sur un corps  $k$  parfait, un complexe de faisceaux zariskiens sur  $X$ , formé à l'aide de  $K_1$  à la Quillen, dont l'hypercohomologie est  $H^*(X/W)$ , et qui permet, si  $\dim(X) < p$ , une interprétation remarquable des "pentes" de  $H^*(X/W)$ , voir l'exposé de Berthelot [3].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN - Supersingular  $K3$  surfaces, Ann. Sc. ENS, t. 8, 1975, à paraître
- [2] P. BERTHELOT - Cohomologie cristalline, Lecture Notes in Math. 407, Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [3] P. BERTHELOT - The slope filtration on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.
- [4] S. BLOCH - Article en préparation.
- [5] P. CARTIER - Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967), 50-52, et Modules associés à un groupe formel commutatif, courbes typiques, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967) 129-132.
- [6] P. DELIGNE - La conjecture de Weil I, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 43, 1974.
- [7] A. GROTHENDIECK - Lettre à J. Tate, mai 1966.
- [8] A. GROTHENDIECK - Crystals and the De Rham cohomology of schemes, Notes by I. Coates and O. Jussila, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.
- [9] A. GROTHENDIECK - Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes Congrès Intern. Math. 1970, I, 431-436.
- [10] L. ILLUSIE - Report on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.
- [11] N. KATZ - On a theorem of Ax, Amer. J. Math., 93 (1971), 485-499.
- [12] N. KATZ - Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki, exposé 409 (février 1972), Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag, 1974.
- [13] N. KATZ and W. MESSING - Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields, Inv. Math., 23 (1974), 73-77.
- [14] N. KOBLITZ - p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields, Thesis, Princeton, 1974.
- [15] I. MANIN - The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristics, Russian Math. Surveys, 18 (1963).
- [16] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 78, n° 5, 1972.



- [17] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, estimates, Ann. of Maths., 98 (1973), 58-95.
- [18] B. MAZUR - Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.
- [19] B. MAZUR and W. MESSING - Universal Extensions and One Dimensional Crystal-line Cohomology, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag, 1974.
- [20] W. MESSING - The Crystals associated to Barsotti-Tate Groups, Lecture Notes in Math. 264, Springer Verlag, 1972.
- [21] W. MESSING - The Universal Extension of an Abelian Variety by a Vector Group, Ist. Nazion. di Alta Mat., Sumposia Math., Vol. XI, 1973.
- [22] J. S. MILNE - preprint.
- [23] P. MONSKY - p-adic analysis and Zeta functions, 1969
- [24] P. MONSKY and G. WASHNITZER - Formal Cohomology I, Ann. of Maths., 88 (1968), 181-217.
- [25] D. MUMFORD - Bi-extensions of formal groups, Algebraic Geometry, Bombay Colloquium 1968, p. 307-322, Oxford Univ. Press 1969.
- [26] N. ROBY - Les algèbres à puissances divisées, Bull. Soc. Math. France, 89 (1965), 75-91.
- [27] J. TATE - On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.
- [28] E. WARNING - Bemerkung zur Vorstehenden Arbeit von Herr Chevalley, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 11 (1936), 76-83.