SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JOSEPH LE POTIER

Fibrés vectoriels et cycles d’ordre fini sur une variété algébrique non compacte

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 473, p. 38-53
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__38_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L’accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FIBRÉS VECTORIELS ET CYCLES D'ORDRE FINI SUR UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE NON COMPACTE

[d'après M. CORNALBA et P. GRIFFITHS]

par Joseph LE POTIER

1. Introduction

Soit X une variété algébrique quasi-projective lisse sur $\mathbf{C}$. On désigne par $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{alg}}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques de rang r au-dessus de X, et par $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{an}}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes. On sait d'après [11] que lorsque X est projective, l'application naturelle

(1) $$\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{alg}}(X) \to \mathrm{Vect}^r_{\mathrm{an}}(X)$$

est un isomorphisme. Tel n'est plus le cas si X n'est pas compacte : dans les exemples ci-dessous, nous nous limitons au cas $r = 1$; l'espace $\mathrm{Vect}^1_{\mathrm{alg}}(X)$ (resp. $\mathrm{Vect}^1_{\mathrm{an}}(X)$), qu'on peut munir d'une structure de groupe abélien, sera encore noté $\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X)$ (resp. $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$). Nous prendrons X affine, de sorte que les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sont classés par leur classe de Chern :

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{\simeq} H^2(X, \mathbf{Z}) .$$

1.1 Soit $\bar{X}$ une courbe compacte de genre $g \geq 1$; prenons $X = \bar{X} - \{x_1, \dots, x_k\}$, avec $x_i \in \bar{X}$. Alors $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$, et donc $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) = 0$. Cependant

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(\bar{X}) / (x_1, \dots, x_k)$$

où $(x_1, \dots, x_k)$ est le sous-groupe engendré par les fibrés de rang 1 sur $\bar{X}$ définis par les points x_i ; $\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(\bar{X})$ est de dimension g, et le quotient par un sous-groupe dénombrable ne risque pas de s'annuler : $\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X) \neq 0$ et donc l'application (1) n'est pas injective.

1.2 Soit $X = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$. On a alors $\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X) = 0$, comme on le voit par un argument analogue à celui de 1.1, en plongeant par exemple X dans $\mathbb{P}_2$. Cependant $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \simeq H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, et donc (1) n'est pas surjective.

1.3 Soient Y une courbe non singulière de degré $d > 1$ dans $\bar{X} = \mathbb{P}_2$, et donc de genre $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, et $X = \bar{X} - Y$. Alors

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X) = \mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(\bar{X}) / (L_Y)$$

où (L_Y) désigne le sous-groupe engendré par le fibré sur $\bar{X}$ associé à Y ; ainsi $\mathrm{Pic}_{\mathrm{alg}}(X) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Or il découle de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} H^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_2 - Y ; \mathbb{Z}) & \to & H^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) & \to & H^2(X, \mathbb{Z}) & \to & H^3(\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_2 - Y ; \mathbb{Z}) & \to & 0 \\ \wr\| & & \wr\| & & & & \wr\| & & \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & & H^1(Y, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

où la première flèche est la multiplication par d, que

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} \quad .$$

Dans cette décomposition, le sous-groupe de torsion correspond exactement aux fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 qui sont isomorphes à un fibré algébrique.

L'article de Cornalba et Griffiths répond à une double préoccupation.

<u>Problème</u> 1.- <u>Soit</u> E <u>un fibré vectoriel holomorphe de rang</u> r <u>au-dessus de</u> X. <u>Quelles conditions de croissance doit-on imposer à</u> E <u>pour qu'il soit isomorphe à un fibré vectoriel algébrique</u> ?

Ce problème résolu, l'examen des conditions de croissance permet d'introduire un nouveau type de fibrés, intermédiaire entre algébrique et analytique : ce sont les fibrés d'ordre fini λ, avec λ réel ≥ 0. Ils définissent une filtration croissante de $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{an}}(X)$, notée

$$G_\lambda \mathrm{Vect}^r_{\mathrm{an}}(X) \; .$$

<u>Problème</u> 2.- <u>Décrire la filtration</u> G_λ. De manière plus précise, il s'agit de faire le lien entre cette filtration par la "grosseur" et la filtration de Hodge-Deligne sur la cohomologie $H^\cdot(X, \mathbb{C})$, via l'application

$$\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{an}}(X) \to H^\cdot(X, \mathbb{C})$$

qui à un fibré E associe son caractère de Chern $\mathrm{ch}\, E$.

Des résultats complets concernant ce problème ne sont obtenus que dans le cas où $r = 1$, et où X est affine. Naturellement, il existe une question analogue pour ce qui concerne les cycles analytiques de codimension r (filtrés par la croissance), l'application ci-dessus étant remplacée par l'application qui à un cycle associe sa classe fondamentale.

2. La métrique de Poincaré

Soient X une variété algébrique quasi-projective et lisse de dimension n, et $\bar{X}$ une complétion lisse de X, c'est-à-dire une variété projective lisse $\bar{X}$ contenant X et telle que $Y = \bar{X} - X$ soit réunion de diviseurs lisses se coupant transversalement (*) :

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} Y_i \ .$$

A chaque Y_i, on associe un fibré vectoriel de rang 1 L_i sur $\bar{X}$, et une section s_i transverse à la section nulle dont le lieu des zéros est exactement Y_i. Soit $|\ |^2$ une métrique hermitienne sur L_i, telle que $|s_i| < 1$. On considère la fonction

$$\tau = \operatorname{Log} \frac{1}{\prod_{i=1}^{N} |s_i|^2 (\operatorname{Log}|s_i|^2)^2} \ .$$

Soit θ une forme réelle de classe C^∞, de type $(1,1)$, définissant une métrique kählérienne sur $\bar{X}$. Si A est un nombre réel ≥ 0 assez grand, la forme

$$\omega = A\theta + dd^c\tau$$

définit une métrique kählérienne sur X, que l'on appelle métrique de Poincaré. Si l'on change θ et les métriques sur les fibrés L_i, la nouvelle métrique de Poincaré est équivalente à la précédente, ce qui les rendra interchangeables pour nos besoins. Si $(z_1,\ldots,z_n)$ sont des coordonnées sur $\bar{X}$ au voisinage U d'un point $x \in Y$ telles que, dans U, Y soit donné par l'équation

$$z_1 \ldots z_k = 0$$

une métrique de Poincaré est équivalente au voisinage de x à la métrique

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|dz_j|^2}{|z_j|^2 (\operatorname{Log}|z_j|^2)^2} + \sum_{k< j\leq n} |dz_j|^2$$

(*) Une telle complétion lisse existe d'après Hironaka.

qui n'est autre que la métrique de Poincaré usuelle sur le polydisque troué $\{0 < |z_j| \leq \frac{1}{2}$ pour $1 \leq j \leq k$, $|z_j| \leq 1$ pour $k < j \leq n\}$.

Soit une métrique de Poincaré sur X .

2.1 LEMME.- <u>La forme de courbure</u> $\varphi \in A^{1,1}(X)$ <u>du fibré hermitien</u> $\Lambda^n T(X)$ <u>vérifie</u> $|\varphi|_{\text{Poincaré}} \leq C^{te}$.

Dans cet énoncé, $|\ |_{\text{Poincaré}}$ désigne la norme relative à la métrique de Poincaré donnée. Ce lemme généralise le fait bien connu que sur le disque $\Delta = \{0 < |z| \leq \frac{1}{2}\}$ muni de la métrique associée à la forme

$$\omega = \frac{i\ dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2\ (\text{Log}|z|^2)^2}$$

le fibré tangent $T(\Delta)$ a pour forme réelle de courbure

$$i\varphi = i\ d''d'\ \text{Log}\ \frac{1}{|z|^2(\text{Log}|z|^2)^2} = -2\omega\ .$$

2.2 LEMME.- <u>Il existe une fonction</u> $\rho : X \to \mathbf{R}$ <u>de classe</u> C^∞ , <u>propre et qui vérifie</u> $|d\rho|_{\text{Poincaré}} \leq C^{te}$.

Il suffit de prendre par exemple $\rho = \text{Log} \prod_{i=1}^{n} (\text{Log}|s_i|^2)^2$. L'existence d'une telle fonction ρ est encore équivalente au fait que la métrique est complète, et ceci ne serait donc pas vrai par exemple pour la métrique induite sur X par θ .

Le lemme implique qu'il existe une suite de fonctions de classe C^∞ , u_n , à support compact dans X , qui tend vers 1 au sens C^1 , et telle que $|u_n|$ et $|du_n|_{\text{Poincaré}}$ soient uniformément bornées, ce qui servira au n° 4.2 à obtenir certains résultats de densité.

3. <u>Fibrés à croissance modérée</u>

On suppose désormais que X est muni d'une métrique de Poincaré associée à une complétion lisse $\bar{X}$ de X .

3.1 Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au-dessus de X , muni d'une métrique hermitienne, et soit $\Theta(E) \in A^{1,1}(X, \text{Hom}(E,E))$ sa forme de courbure.

On pose, pour $x \in X$,

$$|\Theta_x(E)|_{\text{Poincaré}} = \sup_{\substack{e \in E_x\,,\ |e| = 1 \\ t \in T_x(X)\,,\ |t| = 1}} |\langle \Theta(t \wedge it)e\,,\, e\rangle| \;.$$

On dira que E est à <u>croissance modérée</u> le long de $Y = \bar{X} - X$, s'il existe une constante C telle que pour tout $x \in X$

$$|\Theta_x(E)|_{\text{Poincaré}} \leq C \;.$$

Soient E un fibré vectoriel algébrique sur X . Alors il existe une complétion lisse $\bar{X}$ de X et une métrique hermitienne h sur E telle que le fibré hermitien (E,h) soit à croissance modérée le long de $\bar{X} - X$. En effet, on peut trouver $\bar{X}$ de façon que E se prolonge en un fibré algébrique $\bar{E}$ sur $\bar{X}$; n'importe quelle structure hermitienne sur $\bar{E}$ induit sur E une structure hermitienne qui convient.

C'est surtout la réciproque qui nous intéresse ici.

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> E <u>un fibré vectoriel holomorphe de rang</u> r <u>au-dessus de</u> X . <u>S'il existe sur</u> E <u>une métrique hermitienne</u> h <u>telle que</u> (E,h) <u>soit à croissance modérée le long de</u> $\bar{X} - X$, E <u>est isomorphe à un fibré vectoriel algébrique</u>.

En fait, la démonstration permettra d'associer au fibré hermitien (E,h) un fibré vectoriel algébrique bien déterminé E_{alg} analytiquement isomorphe à E .

3.2 On pose

$$t = e^{-\frac{\tau}{2}} = \prod_{i=1}^{N} |s_i|\ |\mathrm{Log}|s_i|^2| \;.$$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X , à croissance modérée le long de $\bar{X} - X$. On désigne par $A^{p,q}_{\text{mod}}(X,E)$ l'espace des formes différentielles α de classe C^∞ , de type (p,q) , à valeurs dans E , et qui vérifient pour k assez grand

$$\int_X |\alpha|^2\, t^k\, \Omega < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_X |d''\alpha|^2\, t^k\, \Omega < \infty$$

où Ω est la forme volume. Ces formes différentielles seront dites à croissance modérée le long de $\bar{X} - X$. On obtient ainsi un complexe $A^{p,\cdot}_{\text{mod}}(X,E)$.

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> E <u>un fibré vectoriel holomorphe hermitien à croissance modérée le long de</u> $\bar{X}-X$. <u>Alors, pour la structure algébrique</u> E_{alg} <u>associée à</u> E <u>par le théorème 1</u>

$$H^q(X, \mathcal{O}_{alg}(E_{alg})) \xrightarrow{\sim} H^q(A_{mod}^{0,\cdot}(X,E)) .$$

En particulier, les sections de E_{alg} sont données par les sections holomorphes α de E qui vérifient pour k assez grand

$$\int_X |\alpha|^2 t^k \Omega < \infty .$$

3.3 Soient $X = \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i$ un recouvrement de X par des ouverts de Zariski tels que $\bar{X} - \cap X_i$ soit réunion de diviseurs lisses qui se coupent transversalement, et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X . On a les propriétés suivantes :

a) le fibré hermitien E est à croissance modérée le long de $\bar{X}-X$ si et seulement si $E|X_i$ est à croissance modérée le long de $\bar{X} - X_i$ pour tout $i = 1,\dots,\ell$.

b) Soit α une forme différentielle de classe C^∞ , de type (p,q) , à valeurs dans E . Alors $\alpha \in A_{mod}^{p,q}(X,E)$ si et seulement si pour tout $i = 1,\dots,\ell$ $\alpha|X_i \in A_{mod}^{p,q}(X_i, E)$. De plus, le complexe de Čech associé au recouvrement $(X_i)_{i=1,\dots,\ell}$:

$$0 \to A_{mod}^{p,q}(X,E) \to \prod_i A_{mod}^{p,q}(X_i, E) \to \prod_{i,j} A_{mod}^{p,q}(X_i \cap X_j, E) \to \dots$$

est exact.

Il en résulte facilement que si l'on sait démontrer les théorèmes 1 et 2 dans le cas où $Y = \bar{X}-X$ est ample, on saura les démontrer dans le cas général : il suffira en effet de choisir les X_i de façon que les diviseurs $\bar{X}-X_i$, $\bar{X}-X_i \cap X_j$,..., soient amples, ce qui est toujours possible. Nous indiquons au § 4 comment démontrer, sous cette hypothèse supplémentaire, le théorème 2 ; nous obtiendrons le théorème 1 au § 5 en appliquant la théorie de Nevanlinna.

4. Théorèmes A et B à croissance

On suppose maintenant que $Y = \bar{X}-X$ est ample, et donc que X est affine. On peut alors choisir les métriques hermitiennes sur les fibrés L_i (cf. § 2) de façon que $\omega = dd^c\tau$ soit une métrique sur X , que l'on prendra pour métrique de Poincaré.

Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X , à croissance modérée le long de $\bar{X}-X$.

THÉORÈME A.- Soient $x_1,\dots,x_\ell$ des points de X , et $e_1,\dots,e_\ell$ des vecteurs de E , avec $e_i \in E_{x_i}$. Il existe sur X une section holomorphe f de E à croissance modérée telle que $f(x_i) = e_i$ pour tout i .

THÉORÈME B.- On a, pour tout $q > 0$

$$H^q(A^{0,\cdot}_{mod}(X,E)) = 0 .$$

Démonstration. Nous démontrons seulement le théorème B : il est en effet facile de voir que comme dans le cadre des théorèmes classiques, il implique le théorème A. D'après le lemme 2.1, le fibré $\Lambda^n T(X)$ (muni de la structure hermitienne déduite de la métrique de Poincaré) est à croissance modérée, et donc aussi $\Lambda^n T \otimes E$; de plus

$$A^{0,q}_{mod}(X,E) \xrightarrow{\sim} A^{n,q}_{mod}(X, \Lambda^n T \otimes E) .$$

Ainsi, quitte à remplacer E par $\Lambda^n T \otimes E$, il revient au même de montrer que pour $q > 0$

$$H^q(A^{n,\cdot}_{mod}(X,E)) = 0 .$$

4.1 L'inégalité de Kodaíra et Nakano

Soit k un entier > 0 . L'espace $A^{p,q}_o(X,E)$ des formes différentielles de classe C^∞ , de type (p,q) , à valeurs dans E , à support compact sera muni du produit scalaire

$$(\alpha,\beta) = \int_X \langle\alpha,\beta\rangle\, t^k\, \Omega .$$

Soit $\partial'' : A^{p,q}_o(X,E) \to A^{p,q-1}_o(X,E)$ l'opérateur différentiel adjoint formel de $d'' : A^{p,q-1}_o(X,E) \to A^{p,q}_o(X,E)$. Si $\|\ \|$ désigne la norme associée au produit scalaire ci-dessus, on a l'inégalité suivante, due à Kodaira et Nakano [1] : pour $\alpha \in A^{p,q}_o(X,E)$

$$\|d''\alpha\|^2 + \|\partial''\alpha\|^2 \geq - R_e\ ([\Lambda\, ,\, i\Theta_k]\alpha,\alpha)$$

où Λ est l'opérateur adjoint de l'opérateur L de multiplication par $\omega = dd^c\tau$, Θ_k la forme de courbure de E , muni de la structure hermitienne $|\ |^2\, t^k$:

$$i\Theta_k = i\Theta + \frac{k}{4}\, dd^c\tau \cdot 1_E$$

et où $[\Lambda, i\Theta_k]$ est le crochet de Λ et de l'opérateur de multiplication par $i\Theta_k : A_o^{p,q}(X,E) \to A_o^{p+1,q+1}(X,E)$. De la relation $[\Lambda, L]\alpha = -(p+q-n)\alpha$ (cf. A. Weil [12]), on tire

$$\|d''\alpha\|^2 + \|\partial''\alpha\|^2 \geq -R_e([\Lambda, i\Theta]\alpha,\alpha) + \frac{1}{4}(p+q-n)k\|\alpha\|^2 ,$$

E étant à croissance modérée, on voit que si l'on choisit k assez grand, on aura en particulier pour $\alpha \in A_o^{n,q}(X,E)$ et $q > 0$

$$\|d''\alpha\|^2 + \|\partial''\alpha\|^2 \geq \|\alpha\|^2 .$$

4.2 La méthode de Hörmander [7]

Soit ${}^2L^{n,q}(X,E)$ le complété de $A_o^{n,q}(X,E)$ pour la norme $\|\ \|$ ci-dessus. C'est un espace de Hilbert que l'on peut plonger dans l'espace ${}'\mathcal{D}^{n,q}(X,E)$ des courants de type (n,q) à "valeurs" dans E , ce qui permet de parler de $d''\beta$ et $\partial''\beta$ pour $\beta \in {}^2L^{n,q}(X,E)$.

Soit $\beta \in {}^2L^{n,q}(X,E)$ tel que $d''\beta = 0$ et $\partial''\beta \in {}^2L^{n,q-1}(X,E)$. Le lemme 2.2 permet de construire une suite $\beta_n \in A_o^{n,q}(X,E)$ telle que

$$\beta_n \to \beta \ , \quad d''\beta_n \to 0 \ , \quad \partial''\beta_n \to \partial''\beta$$

au sens ${}^2L$ [1]. Par passage à la limite, on obtient donc pour $q > 0$

$$\|\partial''\beta\| \geq \|\beta\| .$$

Soit $\alpha \in A_{mod}^{n,q}(X,E)$ telle que $d''\alpha = 0$. Le lemme suivant montre qu'il existe $\gamma \in {}^2L^{n,q-1}(X,E)$ tel que $d''\gamma = \alpha$.

LEMME.- Soient A et B deux espaces de Hilbert, u un opérateur à domaine dense de A dans B et de graphe fermé, u^* l'opérateur adjoint. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est surjectif ;

b) il existe une constante C telle que pour tout $\beta \in B$ dans le domaine de u^* , $\|\beta\| \leq C\|u^*\beta\|$.

On applique le lemme en prenant $A = {}^2L^{n,q-1}(X,E)$, $B = \operatorname{Ker} d'' \cap {}^2L^{n,q}(X,E)$ et pour u l'opérateur d'' dont le domaine est l'espace des $\beta \in A$ tels que

$d''\beta \in B$. Si β est dans le domaine de u^* , $u^*\beta = \partial''\beta$, et la condition b) est donc bien satisfaite, ce qui donne l'existence de γ .

De plus, on peut choisir la solution γ dans l'orthogonal de $\mathrm{Ker}\, d'' \cap {}^2L^{n,q-1}(X,E)$. Dans ce cas, $\square''\gamma = (d''\partial'' + \partial''d'')\gamma = \partial''\alpha$ est une forme de classe C^∞, et donc, puisque $\square''$ est un opérateur elliptique, γ l'est aussi. Ceci termine la démonstration du théorème B.

5. La théorie de Nevanlinna

On garde les notations et hypothèses du § 4. Le diviseur $Y = \bar{X} - X$ étant ample, on peut regarder $\bar{X}$ comme revêtement ramifié de $P_n(\mathbf{C})$, l'image réciproque de l'hyperplan de l'infini étant Y . En se restreignant à $\mathbf{C}^n$, on obtient un revêtement ramifié $\pi : X \to \mathbf{C}^n$ qui sera utile pour mesurer la croissance d'objets analytiques donnés sur X .

5.1 Soit $\psi : X \to [-\infty, +\infty[$ la fonction définie par $\psi(x) = \mathrm{Log}|\pi(x)|^2$; on vérifie aisément les propriétés suivantes

a) ψ est de classe C^∞ en dehors des points $x \in \pi^{-1}(0)$; de plus, ψ n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques. On posera

$$X(r) = \{x \in X \ , \ \psi(x) \leq \mathrm{Log}\, r\} \ .$$

Pour r assez grand le bord $\partial X(r)$ de $X(r)$ est une hypersurface réelle sans singularités ; $d\psi$ définit une section non nulle du fibré conormal, ce qui donne une orientation sur $\partial X(r)$.

b) En dehors d'un compact de X , on a $C'\tau \leq \psi \leq C\tau$, où C et C' sont des constantes > 0 .

c) Sur $X - \pi^{-1}(0)$, on a $dd^c\psi \geq 0$ et $(dd^c\psi)^n = 0$. En effet, $dd^c\psi$ est l'image réciproque de la forme fondamentale de $P_{n-1}(\mathbf{C})$ par la projection $X - \pi^{-1}(0) \to \mathbf{C}^n - \{0\} \to P_{n-1}(\mathbf{C})$.

d) $|d\psi|_{\text{Poincaré}} \leq C^{te}.\psi$ et $|dd^c\psi|_{\text{Poincaré}} \leq C^{te}$ pour $\psi > 0$.

e) $\int_{\partial X(r)} d^c\psi \wedge (dd^c\psi)^{n-1}$ ne dépend pas de r , car $d^c\psi \wedge (dd^c\psi)^{n-1}$ est l'image réciproque d'une forme sur $\mathbf{C}^n - \{0\}$ invariante par homothétie.

Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé de codimension 1 qui ne rencontre pas $\pi^{-1}(0)$. On utilise, pour mesurer la croissance de Z , la fonction

$$N(Z,r) = \int_0^r \{\int_{Z\cap X(\rho)} (dd^c\psi)^{n-1}\} \frac{d\rho}{\rho} .$$

Ceci a un sens d'après Lelong [8]. On utilisera le résultat de Bishop et Stoll [5,10], qui permet de caractériser les diviseurs algébriques :

$$Z \text{ algébrique } \Leftrightarrow N(Z,r) \leq C \operatorname{Log} r .$$

5.2 Soit F un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang 1 sur X , de forme de Chern $c_1(F) = \frac{i}{2\pi}\Theta(F)$. On pose

$$T(F,r) = \int_0^r \{\int_{X(\rho)} c_1(F) \wedge (dd^c\psi)^{n-1}\} \frac{d\rho}{\rho} .$$

PROPOSITION [5].- <u>Soit</u> f <u>une section holomorphe de</u> F , <u>non nulle sur</u> $\pi^{-1}(0)$, <u>et soit</u> $Z = f^{-1}(0)$. <u>Alors, pour</u> $r > r_0$

$$N(Z,r) - T(F,r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial X(r)} \operatorname{Log}|f|^2 \, d^c\psi \wedge (dd^c\psi)^{n-1} + C^{te}$$

<u>où la constante ne dépend pas de</u> r (<u>mais de</u> r_0).

<u>Démonstration</u>. Le sous-ensemble analytique Z définit un courant de bidegré $(1,1)$ sur X noté encore Z ; la fonction localement intégrable $\operatorname{Log}|f|^2$ définit elle aussi un courant (de degré 0), et l'on a, au sens des courants

$$Z - c_1(F) = \frac{1}{4\pi} dd^c \operatorname{Log}|f|^2 .$$

On peut supposer qu'en dehors de $X(r_0)$, ψ n'a pas de point critique ; de l'égalité ci-dessus on tire

$$N(Z,r) - T(F,r) = \frac{1}{4\pi}\int_{r_0\leq\rho\leq r} \{\int_{\partial X(\rho)} d^c \operatorname{Log}|f|^2 \wedge (dd^c\psi)^{n-1}\} \frac{d\rho}{\rho} + C^{te}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\operatorname{Log} r_0\leq\psi\leq\operatorname{Log} r} d\psi\wedge d^c \operatorname{Log}|f|^2 \wedge (dd^c\psi)^{n-1} + C^{te}$$

par le théorème de Fubini. En observant le degré, et en utilisant $(dd^c\psi)^n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} d\psi\wedge d^c \operatorname{Log}|f|^2 \wedge (dd^c\psi)^{n-1} &= - d^c\psi\wedge d \operatorname{Log}|f|^2 \wedge (dd^c\psi)^{n-1} \\ &= d(\operatorname{Log}|f|^2 \, d^c\psi\wedge(dd^c\psi)^{n-1}) \end{aligned}$$

et la formule de Stokes donne alors le résultat voulu.

5.3 LEMME.- Supposons F à croissance modérée ; soit f une section holomorphe de F. Alors f est à croissance modérée si et seulement si il existe des constantes A et $\lambda \geq 0$ telles que pour tout $r > 0$

$$\operatorname*{Max}_{x \in \bar{X}(r)} |f(x)| \leq A\, r^{\lambda} .$$

Démonstration. Que la condition soit suffisante résulte de ce que pour $x \in \partial X(r)$, on a $t(x) \leq \frac{1}{r^{\mu}}$, avec μ réel > 0, pour r assez grand, d'après la propriété 5.1 b). Pour voir qu'elle est nécessaire, on utilise fait que, F étant à croissance modérée, on peut, quitte à changer la métrique $|\ |^2$ en $|\ |^2\, t^{-k}$ $(k \geq 0)$, supposer que la courbure est négative. Alors $dd^c|f|^2 \geq 0$ et $|f|^2$ est plurisousharmonique. En adaptant le théorème de la sous-valeur moyenne, on voit que si l'on pose

$$V(r) = \int_{\partial X(r)} |f|^2\, d^c\psi \wedge (dd^c\psi)^{n-1} ,$$

on a pour $x \in X(r)$ et $\rho \geq 2r$, $|f(x)|^2 \leq C^{te}\, V(\rho)$, d'où il résulte par intégration $|f(x)|^2 \leq C^{te} \int_{2r \leq \rho \leq 4r} V(\rho)\, \frac{d\rho}{\rho}$. Par Fubini, il vient

$$|f(x)|^2 \leq C^{te} \int_{\mathrm{Log}\ 2r \leq \psi \leq \mathrm{Log}\ 4r} |f|^2\, d\psi \wedge d^c\psi \wedge (dd^c\psi)^{n-1} .$$

La croissance modérée de f et les propriétés 5.1 d) et b) impliquent alors que le membre de droite est majoré par $C^{te}.r^{\lambda}$. Cette démonstration est aussi valable quand F est de rang quelconque.

5.4 PROPOSITION.- Soient F un fibré hermitien de rang 1 sur X, à croissance modérée, et f une section holomorphe de F à croissance modérée, non identiquement nulle. Alors $Z = Z(f) = f^{-1}(0)$ est un diviseur algébrique.

Démonstration. On peut supposer que Z ne rencontre pas $\pi^{-1}(0)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 5.2, le lemme 5.3, la définition de la croissance modérée de F, et la propriété 5.1 e) pour voir que

$$N(Z,r) \leq C^{te}\ \mathrm{Log}\ r .$$

5.5 Fin de la démonstration des théorèmes 1 et 2

Supposons d'abord E de rang 1. Chaque section f à croissance modérée et non identiquement nulle définit une trivialisation de E sur l'ouvert de Zariski $X_f = X - Z(f)$; d'après le théorème A, les ouverts X_f recouvrent X. On va montrer que si f et f' sont deux sections non identiquement nulles à croissance modérée, le changement de cartes

$$x \longmapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$$

défini sur X_f, est rationnel. Son graphe est la trace sur $X_f \times \mathbf{C}$ de

$$G = \{(x,\mu) \in X \times \mathbf{C} \ , \ f'(x) - \mu\, f(x) = 0\} \ .$$

Sur $X \times \mathbf{C}$, le fibré $pr_1^* E$ est à croissance modérée, ainsi que sa section $(x,\mu) \longmapsto f'(x) - \mu\, f(x)$; d'après la proposition 5.4, G est algébrique, et, par suite, le changement de cartes rationnel. Ceci donne une structure algébrique sur E ; par définition, les sections rationnelles sont données par les sections holomorphes à croissance modérée.

Supposons maintenant E de rang $r > 1$. On pose, si $f_1,\dots,f_r$ sont des sections de E à croissance modérée indépendantes en au moins un point, $Z(f_1,\dots,f_r) = \{x \in X \ , \ f_1(x)\wedge\dots\wedge f_r(x) = 0\}$ et $X_{f_1,\dots,f_r} = X - Z(f_1,\dots,f_r)$. D'après la proposition 5.4 appliquée à $\Lambda^r E$, on voit que $X_{f_1,\dots,f_r}$ est un ouvert de Zariski ; d'après le théorème A, ces ouverts recouvrent X. Si $(f'_1,\dots,f'_r)$ est un autre tel système de sections, on pose, sur $X_{f_1,\dots,f_r}$

$$f'_i = \sum_j \varphi_{i,j}\, f_j$$

et il s'agit de démontrer que les $\varphi_{i,j}$ sont rationnelles. Or on a

$$f'_i \wedge f_1 \wedge \dots \wedge \widehat{f_j} \wedge \dots \wedge f_r = (-1)^{j-1} \varphi_{i,j}\, f_1 \wedge \dots \wedge f_r$$

et $\varphi_{i,j}$ est le rapport de deux sections à croissance modérée du fibré $\Lambda^r E$, qui est rationnel d'après ce qui vient d'être fait.

6. Fibrés d'ordre fini

Pour simplifier, on conserve l'hypothèse $Y = \bar{X} - X$ ample, et les notations des § 4 et 5.

6.1 Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X , muni d'une métrique hermitienne. On dira que E est d'ordre fini s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que

$$|\Theta(E)|_{\text{Poincaré}} \leq \frac{C^{te}}{t^\lambda} .$$

Si E est d'ordre fini, l'ordre de E est défini par la borne inférieure des λ qui satisfont cette condition. Une section holomorphe f de E sera dite d'ordre fini s'il existe un réel $\mu \geq 0$ tel que

$$\int_X |f|^2 e^{-\frac{1}{t^\mu}} \Omega < \infty .$$

Soient E et F deux fibrés hermitiens d'ordre fini ; un isomorphisme $f : E \to F$ sera dit d'ordre fini si f et f^{-1} sont d'ordre fini comme sections de $\mathrm{Hom}(E,F)$ et $\mathrm{Hom}(F,E)$ respectivement. L'ensemble des classes d'isomorphisme d'ordre fini de fibrés hermitiens d'ordre fini et de rang 1 sera noté $\mathrm{Pic}_{o.f}(X)$.

Soit Z un sous-ensemble analytique de X de codimension 1 , qui ne rencontre pas $\pi^{-1}(0)$. On dira que Z est d'ordre fini s'il existe un entier λ tel que

$$N(Z,r) \leq C^{te} r^\lambda .$$

Si Z est d'ordre fini, l'ordre de Z est la borne inférieure des λ qui vérifient cette condition. C'est un nombre qui en fait ne dépend pas du choix du revêtement π .

THÉORÈME 3.- On suppose que $Y = \bar{X} - X$ est ample.

(1) On a $\mathrm{Pic}_{o.f}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{an}(X)$.

(2) Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X ; E a une métrique hermitienne d'ordre fini λ si et seulement si il a une section holomorphe non identiquement nulle dont le diviseur soit d'ordre fini λ .

La partie (2) se démontre par les méthodes utilisées aux § 4 et 5. La partie (1) utilise le théorème de comparaison de Grothendieck permettant de décrire la cohomologie $H^k(X,\mathbf{C})$ à l'aide des formes différentielles rationnelles sur $\bar{X}$ ayant leurs pôles sur Y . A titre d'exemple, montrons que si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X , il existe une métrique hermitienne d'ordre fini sur E .

Soit $c_1(E) \in H^2(X,\mathbf{C})$ la classe de Chern de E ; nous allons voir qu'on peut représenter $c_1(E)$ par une forme fermée α de type $(1,1)$ telle que

$$|\alpha|_{\text{Poincaré}} \leq \frac{C^{te}}{t^{\lambda}}$$

avec λ réel ≥ 0 : il existera alors une métrique h sur E telle que $c_1(E,h)$ soit la partie réelle de α, et donc cette métrique sera d'ordre fini.

D'après le théorème de Grothendieck [6], on peut représenter $c_1(E)$ par une forme rationnelle fermée β de degré 2 sur $\bar{X}$ ayant ses pôles le long de Y. Soit $s = s_1 \otimes \ldots \otimes s_N$ la section de $L_Y = L_1 \otimes \ldots \otimes L_N$ (cf. § 2) définissant Y. Pour μ entier assez grand, la forme de type $(0,2)$ $\bar{\beta}\, s^{\mu}$ à valeurs dans L_Y^{μ} est de classe C^1 sur $\bar{X}$ et d"-fermée. Puisque Y est ample, $H^{0,2}(\bar{X}, L_Y^{\mu}) = 0$ pour μ assez grand, et on peut écrire $\bar{\beta}\, s^{\mu} = d''\gamma$ avec γ de type $(0,1)$ à valeurs dans L_Y^{μ}, de classe C^{∞} sur X et de classe C^1 sur $\bar{X}$. La forme

$$\alpha = \beta - d\overline{\left(\frac{\gamma}{s^{\mu}}\right)} = -d''\overline{\left(\frac{\gamma}{s^{\mu}}\right)}$$

est une forme de classe C^{∞} sur X, de type $(1,1)$, représentant $c_1(E)$, et l'on a $|\alpha|_{\text{Poincaré}} \leq \dfrac{C^{te}}{t^{\mu+1}}$.

6.2 Soient $\Omega^p_{\bar{X}}\langle Y\rangle$ le faisceau sur $\bar{X}$ des p-formes différentielles à pôles logarithmiques le long de Y, et $\Omega^{\cdot}_{\bar{X}}\langle Y\rangle$ le complexe de de Rham logarithmique de $\bar{X}$ le long de Y [2]. L'hypercohomologie $H^k(\bar{X}, \Omega^{\cdot}_{\bar{X}}\langle Y\rangle)$ s'identifie à $H^k(X,\mathbf{C})$; la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H^q(\bar{X}, \Omega^p_{\bar{X}}\langle Y\rangle) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbf{C})$$

donne sur l'aboutissement une filtration décroissante F appelée filtration de Hodge-Deligne. On a en particulier $F^0\, H^k(X,\mathbf{C}) = H^k(X,\mathbf{C})$, et $F^1\, H^k(X,\mathbf{C})$ est le noyau du morphisme $H^k(X,\mathbf{C}) \to H^k(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ induit par le morphisme de complexes $\Omega^{\cdot}_{\bar{X}}\langle Y\rangle \to \mathcal{O}_{\bar{X}}$.

Soient λ un réel ≥ 0, et $G_{\lambda}\,\mathrm{Pic}_{an}(X) \subset \mathrm{Pic}_{an}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés de rang 1 sur lesquels existe une métrique hermitienne d'ordre fini λ. Considérons l'application

$$c_1 : \mathrm{Pic}_{an}(X) \to H^2(X,\mathbf{C})$$

qui à un fibré E associe sa classe de Chern $c_1(E)$.

THÉORÈME 4.- <u>On suppose que</u> $Y = \bar{X} - X$ <u>est lisse et suffisamment ample. Alors</u> :

(1) <u>Pour tout réel</u> $0 \leq \lambda < 1$, $c_1(G_\lambda) \subset F^1 H^2(X,\mathbf{C})$.

(2) <u>Réciproquement, soit</u> E <u>un fibré vectoriel holomorphe de rang</u> 1 <u>sur</u> X ; <u>il existe sur</u> E <u>une métrique hermitienne d'ordre</u> 1 . <u>Si de plus</u> $c_1(E) \in F^1 H^2(X,\mathbf{C})$, <u>il existe sur</u> E <u>une métrique hermitienne d'ordre</u> 0 .

(3) <u>Le fibré</u> E <u>est algébrique si et seulement si il existe sur</u> E <u>une métrique d'ordre</u> 0 , <u>et si le résidu de</u> $c_1(E)$ <u>dans</u> $H^1(Y,\mathbf{C})$ <u>est nul (c'est-à-dire que</u> $c_1(E)$ <u>se prolonge à</u> $\bar{X}$).

Ce théorème signifie en particulier que pour $0 \leq \lambda < 1$, $G_\lambda = G_o$ et que $G_\lambda = G_1$ pour $\lambda \geq 1$. L'énoncé de [3] est un peu moins précis et se limite à l'étude des fibrés qui se prolongent topologiquement à $\bar{X}$ (c'est-à-dire dont le résidu dans $H^1(Y,\mathbf{C})$ est nul). La démonstration est un raffinement de celle qui a été donnée au § 6.1. Suffisamment ample signifie ici $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y)) = 0$ et $H^1(\bar{X}, \Omega^1_{\bar{X}}(L_Y)) = 0$. Ainsi, dans l'exemple 1.3, tous les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 ont une métrique d'ordre 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI, E. VESENTINI - Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, Publ. Math. I.H.E.S, 25, 313-362, 1965.

[2] P. DELIGNE - Théorie de Hodge, II, Publ. Math. I.H.E.S., 40, 5-57, 1972.

[3] M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS - Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties, Inventiones Math., 28, 1-106, 1975.

[4] P. A. GRIFFITHS - Function theory of finite order on algebraic varieties, J. Differential Geometry 6, 285-306, et 7, 45-66, 1972.

[5] P. A. GRIFFITHS, J. KING - Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta Math., 130, 145-220, 1973.

[6] A. GROTHENDIECK - On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. I.H.E.S., 29, 93-103, 1966.

[7] L. HÖRMANDER - An introduction to complex analysis in several variables, Princeton, N. J., Van Nostrand, 1966.

[8] P. LELONG - Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n , J. analyse Math. 12, 365-407, 1964.

[9] G. MALTSINIOTIS - G.A.G.A. affine (d'après P. Deligne), Astérisque 17, 1974.

[10] G. STOLZENBERG - Volums, limits, and analytic sets, Berlin-Heidelberg-New York,

[11] J.-P. SERRE - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, 6, 1-42, 1956.

[12] A. WEIL - Variétés kähleriennes, Paris, Hermann 1958.