

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MIREILLE DESCHAMPS

Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. n° 519, p. 233-247

http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__233_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COURBES DE GENRE GÉOMÉTRIQUE BORNÉ SUR UNE SURFACE DE TYPE GÉNÉRAL

[d'après F. A. BOGOMOLOV]

par Mireille DESCHAMPS

0. Introduction

La notion de stabilité d'un point dans un espace de représentation linéaire d'un groupe réductif, due à Mumford [10], a conduit à celle de stabilité d'un fibré vectoriel sur une courbe, dont les propriétés ont été amplement étudiées [13], [19] :

0.1. Définition.- Sur une courbe lisse, propre et intègre, un fibré vectoriel E de rang $r(E)$ et de degré $d(E)$ est stable (resp. semi-stable) si pour tout sous-fibré non nul F de E , on a :

$$\frac{d(F)}{r(F)} < \frac{d(E)}{r(E)} \quad \left(\text{resp. } \frac{d(F)}{r(F)} \leq \frac{d(E)}{r(E)} \right) .$$

Un fibré vectoriel est instable s'il n'est pas semi-stable.

Récemment, F. A. Bogomolov [2] a donné une extension satisfaisante de l'instabilité aux fibrés sur des variétés de dimension quelconque, et un critère d'instabilité qui utilise ses résultats sur des "modèles de points instables" pour l'action d'un groupe réductif. Notre propos ici n'est pas d'envisager cette théorie dans son cadre le plus général, mais de parler de son application à l'étude des fibrés de rang 2 sur les surfaces.

Soit donc X une surface propre et lisse sur un corps k , E un fibré de rang 2 sur X . A toute représentation linéaire $\rho : GL_2 \rightarrow GL(V)$, on associe un fibré tordu $E^{(\rho)}$ de la manière suivante : il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que le fibré E (resp. $E^{(\rho)}$) soit obtenu en recollant des faisceaux $\mathcal{O}_{U_i}^2$ (resp. $\mathcal{O}_{U_i} \otimes_k V$) par les isomorphismes $g_{ij} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^2$ (resp. $\rho(g_{ij}) : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \otimes_k V \rightarrow \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \otimes_k V$). On se propose d'obtenir des informations sur E en étudiant les sections des fibrés tordus $E^{(\rho)}$.

0.2. Définition (Bogomolov).- Un fibré E de rang 2 est dit instable s'il existe une représentation ρ de GL_2 , de déterminant 1, telle que le fibré tordu

$E^{(\rho)}$ ait une section non nulle, nulle en un point de X .

Si la caractéristique du corps est nulle, ce à quoi nous nous limiterons dans toute la suite, le critère d'instabilité de Bogomolov s'exprime simplement en termes de dévissage des fibrés de rang 2. Il est intéressant de noter qu'on peut ici court-circuiter la théorie et le démontrer directement par des méthodes plus simples (cf. 1.3).

Les applications sont multiples. Citons pour mémoire une preuve algébrique élégante du vanishing-theorem de Kodaira-Ramanujan. D'autre part, nous démontrons dans ce qui suit le :

0.3. Théorème. - Sur une surface propre et lisse de type général X le faisceau des 1-formes différentielles Ω_X^1 n'est pas instable.

Comme conséquence, on obtient l'inégalité $c_1^2 \leq 4c_2 - c_1$ et c_2 étant les classes de Chern du faisceau Ω_X^1 — améliorée depuis par Miyaoka [9] qui en a donné la meilleure forme possible $c_1^2 \leq 3c_2$, — et un résultat géométrique que nous allons développer ici.

Le problème est le suivant : peut-on "limiter" la famille des courbes de genre géométrique borné sur une surface X propre et lisse ? On construit aisément des exemples pour lesquels la réponse est négative. Bogomolov apporte une solution partielle dans le cas où X est une surface de type général. Résumons brièvement sa méthode :

Soit $\pi : P = \mathbb{P}(\Omega_X^1) \rightarrow X$ la projection canonique du fibré projectif cotangent. On construit sur P un bon système linéaire de diviseurs permettant de l'envoyer dans un espace projectif \mathbb{P}^N . Si C est une courbe propre et lisse, un morphisme non constant $f : C \rightarrow X$ se relève en un morphisme $t_f : C \rightarrow P$ défini aux points α de C où f n'est pas ramifié par $t_f(\alpha) = (f(\alpha), f(v_\alpha))$ où v_α est un vecteur non nul tangent à C en α . On applique ceci aux normalisées des courbes tracées sur X et on étudie leurs images dans \mathbb{P}^N .

On démontre ainsi les résultats suivants :

0.4. Théorème. - Soit X une surface propre et lisse de type général minimale.

(i) Si $c_1^2 > c_2$, les courbes de genre géométrique borné tracées sur X forment une famille limitée.

(ii) Si $c_1^2 \leq c_2$ et $\text{rang NS}(X) \geq 2$, il existe un cône ouvert non vide \mathcal{C} dans $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$, contenant le cône $\{z \mid z \in \text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}, z^2 \leq 0\}$ tel que pour tout cône \mathcal{C}' fermé contenu dans \mathcal{C} , l'ensemble des courbes de genre géométrique borné

tracées sur X dont l'image dans $NS(X) \otimes \mathbb{R}$ est contenue dans \mathcal{C}' est une famille limitée. De plus, tout translaté de \mathcal{C} parallèlement à l'image de K (diviseur canonique) possède la même propriété.

Comme corollaire, on obtient dans tous les cas la finitude des courbes de self-intersection négative et de genre géométrique borné sur une surface de type général, et en particulier une solution au problème de Mordell.

Signalons enfin que Bogomolov utilise en cours de démonstration un résultat puissant de Seidenberg sur les équations différentielles [18] et qu'un papier récent de Jouanolou [5] permet d'éviter l'usage de ce marteau-pilon.

Dans toute la suite, k désignera un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les schémas considérés, sauf si l'on précise le contraire, seront propres lisses et intègres sur k . Pour tout fibré E sur un schéma X , on notera $h^i(X, E) = \dim_k H^i(X, E)$.

1. Critère d'instabilité des fibrés de rang 2 sur une surface

Compte tenu de la forme des représentations irréductibles de PGL_2 , on peut donner une définition équivalente à 0.1.

1.1. Définition. - Un fibré E de rang 2 sur une surface X est instable si et seulement si il existe un entier $n > 0$ tel que $S^{2n} E \otimes (\det E)^{-n}$ possède une section non nulle, nulle en un point de X .

1.2. Remarque. Dévissage des fibrés de rang 2

Soient E un fibré de rang 2, L un faisceau inversible, et $s : L \rightarrow E$ un homomorphisme non nul. Le bidual M du quotient E/L est inversible, et le noyau L_1 de l'homomorphisme $E \rightarrow M$ est le plus grand sous-faisceau inversible de E contenant L . On dit que c'est une droite saturée de E . Le conoyau E/L_1 est sans torsion de rang 1, donc de la forme $I_Z \otimes M$ où M est un faisceau inversible et I_Z un faisceau d'idéaux de O_X qui définit un fermé Z de dimension 0 en dehors duquel L' est un sous-fibré de E . On a donc un diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & E & \rightarrow & E/L & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & L_1 & \rightarrow & E & \rightarrow & I_Z \otimes M & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Nous dirons que la deuxième ligne est un dévissage de E . On peut en déduire les classes de Chern de E :

$$\begin{aligned} c_1(E) &= L_1 \otimes M \\ c_2(E) &= L_1 \cdot M + \deg Z. \end{aligned}$$

1.3. Critère d'instabilité (Bogomolov-Mumford). - Un fibré E de rang 2 sur une surface X est instable si et seulement si il existe un dévissage

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow I_Z \otimes M \rightarrow 0$$

tel que si $L' = L \otimes M^{-1} = L^2 \otimes (\det E)^{-1}$

— ou bien L' est dans le cône \mathcal{C}_+ engendré dans $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ par les diviseurs positifs

— ou bien $L' = \mathcal{O}_X$ et Z n'est pas vide.

De plus, ce dévissage est alors unique.

Nous allons le démontrer en utilisant uniquement la théorie de l'instabilité due à Mumford.

Soient $P = \mathbb{P}(E)$, $p : P \rightarrow X$ la projection, $\mathcal{O}_P(1)$ le fibré canonique ample pour p . Une section s non nulle de $S^{2n}E \otimes (\det E)^{-n}$ correspond à une section t non nulle sur P de $\mathcal{O}_P(2n) \otimes p^*(\det E)^{-n}$. Soient ξ le point générique de X et $K = k(\xi)$. Si on choisit une base de E_K , $s(\xi)$ correspond à un polynôme homogène F de degré $2n$ en deux variables. Puisque s s'annule en un point de X , $s(\xi)$ est instable pour l'action de PGL_2 sur $S^{2n}E_K \otimes (\det E_K)^{-n}$. On déduit du critère d'instabilité par les sous-groupes à un paramètre [11] que F a une racine d'ordre supérieur à n dans une clôture algébrique de K , donc aussi dans K , c'est-à-dire qu'il existe un entier $r \geq 1$ et deux polynômes G et H homogènes de degrés respectifs 1 et $n-r$ tels que $F = G^{n+r}H$. Soient D le diviseur de t et Δ l'adhérence du diviseur défini sur la fibre générique par G . On peut écrire $D = (n+r)\Delta + \Delta'$ où Δ (resp. Δ') est de degré 1 (resp. $n-r$) sur P .

Alors, il existe des inversibles L et L' sur X tels que

$$\mathcal{O}_P(\Delta) = \mathcal{O}_P(1) \otimes p^*L$$

$$\mathcal{O}_P(\Delta') = \mathcal{O}_P(n-r) \otimes p^*L'$$

d'où $(\det E)^{-n} = L^{n+r} \otimes L'$.

Le diviseur Δ correspond à une section de $E \otimes L$, donc à une injection $L^{-1} \rightarrow E$ qui par construction est une droite saturée de E . On vérifie qu'elle fournit le dévissage cherché.

1.4. Opérations sur les fibrés instables

1.4.1. L'instabilité est conservée par passage au dual et tensorisation par un inversible.

1.4.2. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme surjectif de surfaces, E un fibré de rang 2 sur X . Alors E est instable si et seulement si f^*E l'est.

1.4.3. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini fidèlement plat de surfaces, F un fibré de rang 2 sur Y . Alors si F est instable, f_*F l'est aussi.

2. Démonstration du Théorème 0.3

Si Ω_X^1 est instable, il existe un dévissage :

$$0 \rightarrow L \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow I_Z \otimes M \rightarrow 0,$$

un entier $n > 0$ et une injection $\mathcal{O}_X \hookrightarrow (L \otimes M^{-1})^{\otimes n}$.

Alors, pour $m \gg 0$,

$$h^0(L^{2m}) = h^0((L \otimes M^{-1})^{\otimes m} \otimes \Omega_X^2)^{\otimes m} \geq h^0(\Omega_X^2)^{\otimes m} = \mathcal{O}(m^2).$$

Le théorème est donc une conséquence du suivant :

2.1. Théorème (Bogomolov). - Soient X une surface propre et lisse et L un sous-faisceau inversible de Ω_X^1 . Alors $h^0(L^n) \leq \mathcal{O}(n)$ si $n \gg 0$.

Rappelons d'abord un joli résultat dû à Castelnuovo et de Franchis dont nous aurons besoin pour la démonstration :

2.2. Lemme ([4], [12]). - Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles holomorphes sur X , linéairement indépendantes sur k , telles que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Alors il existe une courbe C propre et lisse sur k , de genre au moins égal à 2, deux formes différentielles holomorphes θ_1 et θ_2 sur C , et un morphisme $u : X \rightarrow C$ tels que $\omega_i = u^*(\theta_i)$ pour $i = 1, 2$.

Il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $\omega_2 = f\omega_1$. Elle définit un morphisme d'un éclaté X' de X dans \mathbb{P}^1 . Soit $u : X' \rightarrow C$ sa factorisation de Stein.

On a une suite exacte de modules de différentielles :

$$0 \rightarrow u^*\Omega_C^1 \rightarrow \Omega_{X'}^1 \rightarrow \Omega_{X'/C}^1 \rightarrow 0.$$

D'autre part, $\omega_2 = f\omega_1$ et $0 = d\omega_2 = df \wedge \omega_1$. Donc au-dessus d'un ouvert U de C , ω_1 et ω_2 sont dans l'image de l'homomorphisme

$$H^0(u^{-1}(U), u^*\Omega_C^1) = H^0(U, \Omega_C^1) \rightarrow H^0(u^{-1}(U), \Omega_{X'}^1),$$

c'est-à-dire proviennent de différentielles θ_1 et θ_2 holomorphes sur U , qu'on prolonge en des différentielles holomorphes sur C . La courbe C est alors de genre au moins 2, et l'application rationnelle $X \dots \rightarrow C$ induite par u est un morphisme.

2.3. Fin de la démonstration du Théorème

— ou bien, pour tout $n > 0$, $h^0(X, L^n) \leq 1$;

— ou bien, il existe $n > 0$, $h^0(X, L^n) \geq 2$. Par un procédé standard d'extraction de racine n -ième, on se ramène au cas suivant :

— ou bien, $h^0(X, L) \geq 2$. D'après le lemme 2.2, il existe une courbe lisse C et un morphisme $u : X \rightarrow C$, un faisceau inversible L_0 sur C tel que $L \subset u^*(L_0)$. D'où $h^0(X, L^n) \leq h^0(C, L_0^n) \leq O(n)$.

2.4. Corollaire.— Si c_1 et c_2 sont les classes de Chern du faisceau Ω_X^1 , $c_1^2 \leq 4c_2$. [Pour la démonstration, voir Bogomolov.]

3. Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général minimale

3.1. Quelques exemples montreront que le fait que X soit de type général joue évidemment un rôle essentiel, et que dans le cas contraire, il peut y avoir une famille illimitée de courbes de genre géométrique fixé.

3.1.1. $X = \mathbb{P}^2$, $NS(X) = \mathbb{Z}$. Il existe dans le plan projectif des courbes de genre géométrique borné et de degrés arbitrairement grands.

3.1.2. Soient E une courbe elliptique sans multiplication complexe et $X = E \times E$; $NS(X) = \mathbb{Z}f_1 \oplus \mathbb{Z}f_2 \oplus \mathbb{Z}\Delta$ où f_i est une fibre de la i -ième projection et Δ la diagonale. Pour tout couple d'entiers (m, n) premiers entre eux, l'image dans X du morphisme $f_{m,n} : E \rightarrow X$, $f_{m,n}(\alpha) = (m\alpha, n\alpha)$ est une courbe de classe $m^2 f_1 + n^2 f_2 + (m - n)^2 \Delta$.

3.1.3. Soient B une courbe propre et lisse et $\pi : X \rightarrow B$ une fibration elliptique minimale et non isotriviale (c'est-à-dire ne devenant pas triviale après un changement de base fini $B' \rightarrow B$) admettant une section $\sigma : B \rightarrow X$ d'ordre infini. Soit ω le faisceau conormal de $\sigma(B)$. Alors, il existe une section globale g_2 (resp. g_3) du faisceau ω^4 (resp. ω^6) telles que X soit la résolution minimale de la surface $Y \subset \mathbb{P}_B(\omega^2 \oplus \omega^3 \oplus \sigma_B)$ définie par la "forme de Weierstrass"

$$y^2 z = x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3 \quad [6], [7].$$

De plus, ω est indépendant de la section σ et son degré est égal à $-\sigma(B) \cdot \sigma(B)$. Si ce degré est nul, g_2 et g_3 sont des constantes, et la fibration π est isotriviale. Il existe donc une infinité de sections de self-intersection négative et de classes algébriques distinctes.

3.2. Notations. On note K un diviseur canonique sur X , T_X le fibré tangent, $\pi : \mathbb{P}(\Omega_X^1) \rightarrow X$ la projection canonique, $L = \mathcal{O}_P(1)$ le faisceau ample pour π .

Soit F un fibré inversible sur X . On note aussi F un diviseur du même système linéaire. De plus, pour tout nombre rationnel ℓ , on se permet des calculs formels faisant intervenir le faisceau ℓF , étant entendu qu'on ne considère des puissances tensorielles $(\ell F)^{\otimes m}$ que pour des entiers m tels que $m\ell$ soit entier.

3.3. Construction d'un bon système linéaire de diviseurs sur P

3.3.1. Proposition. - Soient F un faisceau inversible sur X , ℓ un rationnel positif tels que

- (i) $K.F \geq 0$;
- (ii) $(K + 2\ell F)^2 > 0$;
- (iii) $c_1^2(\Omega_X^1 \otimes \ell F) - c_2(\Omega_X^1 \otimes \ell F) > 0$.

Alors pour $m \gg 0$, le système linéaire $(L \otimes \pi^*(\ell F))^m$ définit une application rationnelle $u_F : \mathbb{P}(\Omega_X^1) \dots \rightarrow \mathbb{P}_N$ birationnelle sur son image.

D'après le théorème d'Itaka [20], il suffit de montrer que, pour $m \gg 0$,

$$h^0(P, (L \otimes \pi^* \ell F)^m) = h^0(X, S^m(\Omega_X^1 \otimes \ell F)) \geq \mathcal{O}(m^3).$$

La formule de Riemann-Roch pour un fibré E :

$$\chi(S^m E) = \frac{m(m+1)(m+2)}{24} (c_1^2(E) - 4c_2(E)) + \frac{m+1}{2} \left[\frac{m^2}{4} c_1^2(E) - \frac{m}{2} K.c_1(E) \right] + (m+1)\chi(\mathcal{O}_X)$$

donne pour $m \gg 0$:

$$h^0(S^m(\Omega_X^1 \otimes \ell F)) + h^2(S^m(\Omega_X^1 \otimes \ell F)) \sim h^1(S^m(\Omega_X^1 \otimes \ell F)) + \frac{m^3}{6} [c_1^2(\Omega_X^1 \otimes \ell F) - c_2(\Omega_X^1 \otimes \ell F)] \geq \mathcal{O}(m^3).$$

Par dualité

$$h^2(S^m(\Omega_X^1 \otimes \ell F)) = h^0(K \otimes S^m(T_X \otimes -\ell F)).$$

Choisissant des diviseurs D et D' amples et lisses tels que

$$\mathcal{O}_X(-D') \subset K \subset \mathcal{O}_X(D),$$

on montre que

$$|h^0(K \otimes S^m(T_X \otimes -\ell F)) - h^0(S^m(T_X \otimes -\ell F))| \leq \mathcal{O}(m^2).$$

On termine la démonstration à l'aide du lemme suivant :

3.3.2. Lemme. - Pour tout $m > 0$, $H^0(S^m(T_X \otimes -\ell F)) = 0$.

On sait (Théorème 0.3 et propriété 1.4.1) que le fibré $T_X \otimes -\ell F$ n'est pas instable. Si nous montrons que pour $m \gg 0$, $h^0(\det(T_X \otimes -\ell F)^m)$ n'est pas nul,

le résultat se déduira aisément de la définition

$$\det(T_X \otimes - \ell F)^{-m} = m(K + 2\ell F) .$$

D'après Riemann-Roch, et (ii)

$$\chi(m(K + 2\ell F)) \sim \frac{m^2}{2} (K + 2\ell F)^2 = \mathcal{O}(m^2)$$

$$h^0(m(K + 2\ell F)) + h^2(m(K + 2\ell F)) \geq \mathcal{O}(m^2)$$

par dualité :

$$h^2(m(K + 2\ell F)) = h^0(K - m(K + 2\ell F)) .$$

Puisque $K \cdot (K - m(K + 2\ell F)) = K^2 - mK(K + 2\ell F)$ est négatif, et K numériquement positif, $h^0(K - m(K + 2\ell F))$ est nul pour $m \gg 0$. D'où le résultat.

Pour tout fibré F vérifiant les conditions de la proposition, fixons une fois pour toutes m et ℓ , et soit Z_F le fermé de $\mathbb{P}(\Omega_X^1)$ en dehors duquel u_F est défini et est un prolongement.

3.3.3. Définition.- Soient C une courbe tracée sur X , \tilde{C} sa normalisée, $f : \tilde{C} \rightarrow C$ le morphisme ainsi défini. Si $t_f(\tilde{C})$ n'est pas contenu (resp. est contenu) dans Z_F , on dit que C est F -régulière (resp. F -irrégulière).

3.4. Démonstration du théorème 0.4

3.4.1. Proposition.- Soient F un fibré inversible, et ℓ un rationnel vérifiant les conditions de 3.3.1. Pour tout réel positif A , les courbes C de genre géométrique g sur X , et telles que $F \cdot C \leq A$ forment une famille limitée.

Soient C une courbe F -régulière, \tilde{C} sa normalisée. L'application rationnelle

$$\tilde{C} \xrightarrow{t_f} \mathbb{P}(\Omega_X^1) \dots \xrightarrow{u_F} \mathbb{P}^N$$

se prolonge en un morphisme défini par un système linéaire contenu dans

$t_f^*(L \otimes \pi^* \ell F)^m$ dont l'image est une courbe C' .

Par construction, $t_f^* L$ est l'image de l'homomorphisme tangent

$$df : f^* \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{\tilde{C}}^1$$

donc

$$\deg C' \leq \deg t_f^*(L \otimes \pi^* \ell F)^m \leq m \deg(\Omega_{\tilde{C}}^1 \otimes \ell F|_{\tilde{C}}) = m(2g - 2) + m\ell F \cdot \tilde{C} \leq m(2g - 2) + m\ell A .$$

Le théorème suivant que nous démontrerons plus loin

3.4.2. Théorème (Bogomolov).- L'ensemble des courbes F -irrégulières est une famille limitée.

joint à la proposition précédente, appliqués au cas $F = 0$, terminent la démonstration de la première assertion du Théorème.

3.4.3. Démonstration dans le cas $c_1^2 \leq c_2$, $\text{rang NS}(X) \geq 2$

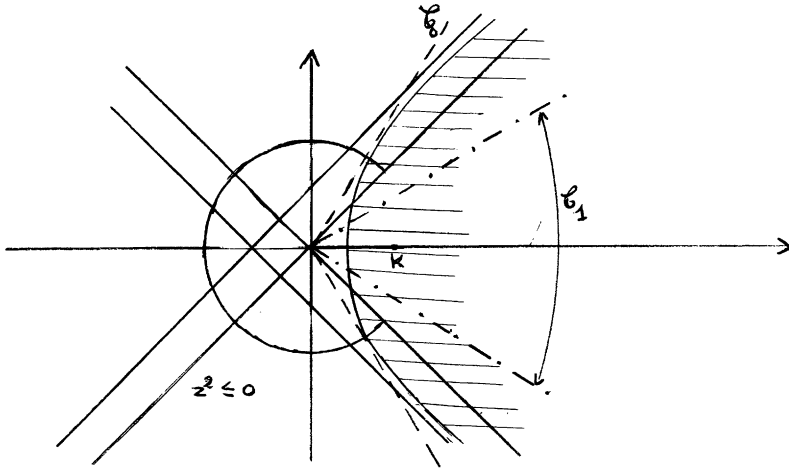
Compte tenu des égalités $c_1(\Omega_X^1 \otimes lF) = c_1 + 2lF$

$$c_2(\Omega_X^1 \otimes lF) = c_2 + lK.F + l^2F^2,$$

les conditions de 3.3.1 se réduisent à

$$(*) \quad \begin{cases} K.F \geq 0 \\ (K + 2lF)^2 > \frac{4c_2 - c_1^2}{3} \quad (\geq c_1^2 \text{ par hypothèse}). \end{cases}$$

Dans le plan de $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$ contenant les images de F et K , prenons une base orthonormée formée d'un vecteur colinéaire à K et d'un vecteur orthogonal, dans laquelle la forme intersection est définie par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le point image de $2lF$ qui vérifie $(*)$ est à l'intérieur de la zone hachurée



Soit \mathcal{C}_0 le cône ouvert tangent à l'origine à la partie d'abscisse positive de l'hyperbole. Les faisceaux F vérifiant les conditions $(*)$ sont ceux dont les images sont contenues dans \mathcal{C}_0 . Soient \mathcal{C}_1 le cône dual fermé, et \mathcal{C} son complémentaire, qui contient le cône $\{z \mid z \in \text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}, z^2 \leq 0\}$

$$\mathcal{C}_1 = \bigcap_{F \in \mathcal{C}_0} \{z; z.F \geq 0\}$$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{F \in \mathcal{C}_0} \{z; z.F < 0\}$$

On termine par un argument de compacité.

Les translatés de \mathcal{C} parallèlement à K s'obtiennent en faisant varier la constante A .

3.4.4. Remarque. - Supposons $c_1^2 \leq c_2$ et $\text{rang NS}(X) = 1$. Soit F un fibré inversible non nul sur X . Il est numériquement équivalent à λK , $\lambda \neq 0$. La condition $K.F \geq 0$ implique $\lambda > 0$. Or il est bien connu que les courbes C vérifiant $K.C \leq A$ forment une famille limitée.

3.4.5. Corollaire.- Soit X une surface de type général telle que $c_1^2 > c_2$. Il n'existe sur X qu'un nombre fini de courbes de genre géométrique 0 ou 1.

C'est une conséquence du fait qu'une surface de type général n'est ni réglée, ni elliptique [3], [17].

3.4.6. Corollaire.- Sur une surface de type général minimale, la famille des courbes de self-intersection bornée et de genre géométrique borné est finie.

3.4.7. Corollaire (Problème de Mordell).- Soient X une surface de type général minimale, C une courbe propre et lisse et $f : X \rightarrow C$ un morphisme à fibres réduites connexes. Alors si la fibration f n'est pas triviale, elle n'a qu'un nombre fini de sections.

Soient E une section et $L = \mathcal{O}_X(E) \otimes f^* \mathcal{O}_E(E)$.

Si $r = E^2 = \deg \mathcal{O}_E(E) > 0$, on vérifie que L est numériquement positif, donc d'après le vanishing-theorem de Kodaira-Ramanujam [15], $H^1(X, L^{-1}) = 0$.

A l'aide de la suite spectrale de Leray, on établit

$$H^1(X, L^{-1}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^1 f_* L^{-1}).$$

De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-E) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$, on déduit

$$R^1 f_* L^{-1} = \mathcal{O}_E(-E) \otimes R^1 f_* \mathcal{O}_X(-E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E(-E) \otimes R^1 f_* \mathcal{O}_X.$$

De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(E) \rightarrow 0$, on déduit la suite exacte :

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(E) \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X,$$

et puisque le genre des fibres n'est pas nul, la flèche $\mathcal{O}_E(E) \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X$ n'est pas nulle, ce qui contredit l'annulation de $H^1(X, L^{-1})$.

Les sections sont donc de self-intersection négative ou nulle (pour une autre démonstration, voir [1] et [14]). S'il y en a une infinité, elles sont contenues dans les fibres d'un pinceau sur X et on vérifie qu'alors f est une fibration triviale.

3.4.8. Remarque.- En caractéristique p , M. Raynaud [16] utilise ce procédé pour construire un contre-exemple au vanishing-theorem. Plus précisément, il construit une fibration $f : X \rightarrow C$ à fibres intègres de genre arithmétique non nul, possédant une section E telle que $E^2 > 0$.

3.4.9. Remarque.- Si l'on ne borne pas le genre, la famille des courbes de self-intersection négative sur une surface de type général peut être illimitée : soit $Y \rightarrow B$ une fibration elliptique non isotriviale ayant une infinité de sections de self-intersection négative (voir 3.1.3). Il existe un revêtement $X \rightarrow Y$ ramifié le long d'une section hyperplane lisse qui est une surface de

type général. L'image réciproque d'une section de $Y \rightarrow B$ est une courbe dont au moins une composante est de self-intersection négative, d'où une infinité de telles courbes sur X .

4. Etude des courbes F-irrégulières

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

4.1. Définition.- Un feuilletage algébrique sur X est la donnée d'un sous-faisceau inversible L du faisceau Ω_X^1 . Il est dit saturé si L est une droite saturée de Ω_X^1 .

4.2. Définition.- Soient C une courbe sur X , \tilde{C} sa normalisée, $L \subset \Omega_X^1$ un feuilletage algébrique. On dit que C est une courbe intégrale si l'homomorphisme composé

$$L|_{\tilde{C}} \rightarrow \Omega_X^1|_{\tilde{C}} \rightarrow \Omega_{\tilde{C}}^1$$

est nul. Les courbes intégrales d'un feuilletage sont celles du feuilletage saturé associé, plus celles sur lesquelles l'homomorphisme $L \rightarrow \Omega_X^1$ est nul.

4.3. Proposition.- Il existe un nombre fini de surfaces Z_i propres et lisses dominant X , possédant un feuilletage algébrique, et telles que les courbes F-irrégulières de X , sauf un nombre fini, soient les images dans X de courbes intégrales de ces feuilletages.

Les composantes irréductibles du fermé Z_F de $\mathbb{P}(\Omega_X^1)$ sont des courbes et des surfaces. Les courbes C telles que $t_f(\tilde{C})$ soit contenu dans une composante qui ne domine pas X sont en nombre fini.

Soient Z_i une désingularisée d'une composante qui domine X , $\alpha_i : Z_i \rightarrow X$ le morphisme obtenu, et C une courbe qui se relève dans Z_i .

$$\begin{array}{ccc} Z_i & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(\Omega_X^1) \\ \uparrow g & \searrow \alpha_i & \downarrow \pi \\ \tilde{C} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Sur $\mathbb{P}(\Omega_X^1)$, on a par construction une suite exacte :

$$0 \rightarrow L' \rightarrow \pi^* \Omega_X^1 \rightarrow L \rightarrow 0,$$

et L' est un faisceau inversible.

L'injection $L'|_{Z_i} \rightarrow \alpha_i^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{Z_i}^1$ définit un feuilletage algébrique et on vérifie aisément que $g(\tilde{C})$ en est une courbe intégrale.

Pour terminer la démonstration du Théorème 0.4, deux méthodes sont possibles :

— soit, comme le fait Bogomolov, utiliser le résultat analytique suivant :

4.4. Théorème (Seidenberg [18]). - Soient A et B deux éléments de l'anneau local complet $R = k[[X, Y]]$. Il existe un schéma S obtenu à partir de $\text{Spec } R$ pour un nombre fini d'éclatements de points fermés situés au-dessus du point fermé de $\text{Spec } R$ tel que les transformées strictes dans S des branches analytiques solutions de l'équation différentielle $\text{Adx} = \text{Bdy}$, sauf éventuellement un nombre fini, soient deux à deux disjointes.

puis montrer qu'une famille de courbes $(C_i)_{i \in I}$ deux à deux disjointes sur une surface est limitée.

— soit, utiliser l'énoncé plus précis - et moins puissant - suivant :

4.5. Théorème (Jouanolou [5]). - Soit $\mathcal{L} \rightarrow \Omega_X^1$ un feuilletage algébrique sur une variété X projective et lisse sur \mathbb{C} . S'il y a une infinité d'hypersurfaces intégrales, elles sont contenues dans les fibres d'un pinceau.

4.5.1. Nous nous contenterons de faire la démonstration dans le cas où X est une surface et où $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, c'est-à-dire où le feuilletage est défini par une 1-forme différentielle holomorphe ω , ceci afin d'alléger les notations. Nous allons montrer que s'il y a une infinité de courbes intégrales, il existe des fonctions méromorphes f et φ sur X telles que $\omega = f d\varphi$.

Soient m_X^* le faisceau des fonctions méromorphes sur X , $\text{Div } X$ (resp. $\text{Div}^\top X$) le groupe des diviseurs de X (resp. des diviseurs numériquement équivalents à 0), $\text{Pic } X$ (resp. $\text{Pic}^\top X$) le groupe de Picard des faisceaux inversibles sur X (resp. des faisceaux inversibles numériquement équivalents à 0).

Le morphisme de faisceaux (pour la topologie complexe)

$$d \log : \mathcal{O}_X^* \rightarrow \Omega_X^1$$

définit un homomorphisme de groupes

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic } X \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$$

et on montre que son noyau contient $\text{Pic}^\top X$.

4.5.2. On a un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^* & \longrightarrow & m_X^* & \longrightarrow & m_X^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d \log & & \downarrow d \log & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_X^1 & \longrightarrow & \Omega_X^1 \otimes m_X^* & \longrightarrow & \Omega_X^1 \otimes m_X^* / \Omega_X^1 \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

En prenant sa cohomologie, on construit un homomorphisme de groupes :

$$\psi : \text{Div}^\top X \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes m_X^*) / H^0(X, \Omega_X^1) ,$$

qui possède les propriétés suivantes :

- si D est un élément de $\text{Div}^\top X$, et μ un représentant de $\psi(D)$ dans $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes m_X^*)$, alors $d\mu = 0$;

- si D est défini sur un ouvert U par une fonction g , $\frac{dg}{g} - \mu$ est holomorphe sur U ;

- pour tout sous-groupe libre L de $\text{Div}^\top X$, le morphisme

$$\psi_L : L \otimes \mathbb{C} \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes m_X^*) / H^0(X, \Omega_X^1)$$

est injectif (pour plus de détails, voir [5]).

4.5.3. Soient M le sous-groupe de $\text{Div} X$ engendré par les courbes intégrales, et $M^\top = M \cap \text{Div}^\top X$. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M^\top \longrightarrow M \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{C}) .$$

D'autre part, avec les notations de 4.5.2, pour tout élément D de M^\top , la 2-forme méromorphe $\omega \wedge \mu$ peut s'écrire localement $\omega \wedge \frac{dg}{g} - \omega \wedge v$, où v est holomorphe, donc on définit ainsi un homomorphisme

$$h : \mathbb{C} \otimes M^\top \xrightarrow{\omega \wedge} H^0(X, \Omega_X^2) / \omega \wedge H^0(X, \Omega_X^1) .$$

Pour terminer, il suffit donc de démontrer

4.5.4. Lemme. - Si $\dim \text{Ker } h > 1$, il existe des fonctions méromorphes f et φ telles que $\omega = f d\varphi$.

Soient D_1 et D_2 deux diviseurs linéairement indépendants de $\text{Ker } h$, μ_1 et μ_2 les 2-formes méromorphes correspondantes. Il existe des 1-formes holomorphes θ_1 et θ_2 telles que $\omega \wedge \mu_i = \omega \wedge \theta_i$ pour $i = 1, 2$, donc des fonctions k_i méromorphes non nulles telles que $\mu_i - \theta_i = k_i \omega$. D'où

$$d(k_i \omega) = dk_i \wedge \omega + k_i d\omega = 0$$

et $d(k_2/k_1) \wedge \omega = 0$.

Soit $\varphi = k_2/k_1$. Si φ est une constante, on en déduit $\psi(D_2) = \varphi \cdot \psi(D_1)$, donc

$D_2 = \varphi \cdot D_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc une fonction méromorphe f telle que $\omega = f d\varphi$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Ju. ARAKELOV - Families of algebraic curves with fixed degeneracies, Math. U.S.S.R. Izvestija, vol. 5, 1971, n° 6, p. 1277-1302.
- [2] F. A. BOGOMOLOV - Notes distribuées au C.I.M.E., Juillet 1977.
- [3] E. BOMBIERI and D. HUSEMOLLER - Classification and embeddings of surfaces, Proc. of symposia in pure math., vol. 29, Algebraic geometry, Arcata 1974, p. 329-420.
- [4] M. de FRANCHIS - Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve, Rendic. Palermo, 20, 1905, p. 49 .
- [5] J.-P. JOUANOLOU - Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique, Mathematische Annalen, n° 232, 1978, p. 239-248.
- [6] A. KAS - Weierstrass normal forms and invariants of elliptic surfaces, Trans. of Amer. Math. Soc., vol. 225, 1977, p. 259-266.
- [7] K. KODAIRA - On compact analytic surfaces II, Annals of Math., n° 77, 1963, p. 563-626.
- [8] K. KODAIRA - Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, Proc. of the Nat. Amer. Soc., vol. 39, 1953,
- [9] Y. MIYAOKA - On the Chern numbers of surfaces of general type, Invent. Math., vol. 42, 1977, p. 225-237.
- [10] D. MUMFORD - Geometric invariant theory, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [11] D. MUMFORD - Projective invariants of projective structures and applications, Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm, 1962, p. 526-530.
- [12] Y. NAKAI - The existence of irrational pencils on algebraic varieties, Mem. of College of Sciences, Univ. of Kyoto, Series A, n° 29, 1955, p. 151-158.
- [13] N. S. NARASIMHAN and C. S. SESHADRI - Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Annals of Math., vol. 82, 1965, p. 540-562.
- [14] A. N. PARŠIN - Algebraic curves over function fields, Math. U.S.S.R. Izvestija, vol. 2, 1968, n° 5, p. 1145-1170.
- [15] C. P. RAMANUJAM - Supplement to the article "Remarks on the Kodaira Vanishing Theorem", Journ. of Indian Math. Soc., vol. 38, 1974, p. 121-124.
- [16] M. RAYNAUD - Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique p , à paraître.
- [17] I. R. SCHAFAREVITCH - Algebraic surfaces, Proc. of the Steklov Institute of math., n° 75, 1965.
- [18] A. SEIDENBERG - Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$, Amer. Journ. of Math., n° 90, 1968, p. 248-269.

- [19] C.S. SESHADRI - Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface,
Annals of Math., n° 85, 1967, p. 303-336.
- [20] K. UENO - Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math., vol. 439, Springer-Verlag.