

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-MICHEL LEMAIRE

## **Anneaux locaux et espaces de lacets à séries de Poincaré irrationnelles**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1981, exp. n° 570, p. 149-156

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1980-1981\\_\\_23\\_\\_149\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__149_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX LOCAUX ET ESPACES DE LACETS  
À SÉRIES DE POINCARÉ IRRATIONNELLES  
[ d'après Anick, Roos, etc... ]

par Jean-Michel LEMAIRE

Le but de cet exposé est d'expliquer pourquoi deux questions, posées par J.-P. Serre dans les années 50 (et publiées semble-t-il pour la première fois dans [7], p. IV-52) admettent des réponses négatives.

Ces questions sont les suivantes :

Q1 : Soit  $R$  un anneau local noethérien, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $\underline{k} = R/\mathfrak{m}$ . La série "de Poincaré" de  $R$  :

$$P_R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\underline{k}} \operatorname{Tor}_i^R(\underline{k}, \underline{k}) \cdot t^i$$

est-elle rationnelle (i.e. le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle) ?

Q2 : Soit  $X$  un CW-complexe fini,  $l$ -connexe. La série formelle :

$$P(\Omega X; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}} H_i(\Omega X; \mathbb{Q}) \cdot t^i$$

est-elle rationnelle ?

§ 1. Premières observations

On sait que les premiers calculs complets de l'homologie d'un espace de lacets ont été rendus possibles grâce à la suite spectrale de la fibration  $\Omega X \rightarrow * \rightarrow X$ , établie par Serre. Sous les hypothèses de Q2, cette suite spectrale s'écrit :

$$E_{p,q}^2 = H_p(X; \mathbb{Q}) \otimes H_q(\Omega X; \mathbb{Q}) \Rightarrow E_{p,q}^{\infty} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas des anneaux locaux, on a quelque chose d'assez analogue :

$$E_{-p,q}^1 = \mathfrak{m}^p / \mathfrak{m}^{p+1} \otimes_{\underline{k}} \operatorname{Tor}_{q-p}^R(\underline{k}, \underline{k}) \Rightarrow E_{p,q}^{\infty} = \begin{cases} \underline{k} & \text{si } p = q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qu'on obtient en filtrant une résolution  $R$ -projective  $\mathcal{P}_*$  de  $\underline{k}$  par  $F^p \mathcal{P}_* = \mathfrak{m}^p \otimes_R \mathcal{P}_*$  ; mais la suite spectrale obtenue est située dans le 3e octant. Dans le premier cas la série de Poincaré de la base  $X$  est un polynôme, et dans le second la "base" est le gradué associé à  $R$ , dont la série des dimensions

$\sum_{p=0}^{\infty} \dim_{\underline{k}} \mathfrak{m}^p / \mathfrak{m}^{p+1} \cdot t^p$  est rationnelle : le théorème des syzygies de Hilbert permet d'établir que cette série est de la forme  $P(t)(1-t)^{-n}$ , où  $P(t)$  est un polynôme et  $n = \dim_{\underline{k}} \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$  est la "dimension de plongement" de  $R$ . On aperçoit donc une première analogie entre Q1 et Q2...

Concluons ce paragraphe par quelques exemples classiques où Q1 et Q2 sont vraies :

Exemple 1.1.— Si  $R$  est régulier, il est bien connu que  $P_R(t) = (1+t)^n$ . Plus généralement un résultat de Tate et Assmus caractérise les intersections complètes par  $P_R(t) = (1+t)^n(1-t^2)^{d-n}$ ,  $d = \dim R$  (au sens de Krull).

Exemple 1.2.— Si  $R$  est une  $\underline{k}$ -algèbre triviale ( $R = \underline{k} \oplus \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}^2 = 0$ ), il est facile d'établir

$$P_R(t) = (1 - nt)^{-1}$$

Passons maintenant à Q2. Rappelons d'abord le théorème de Milnor et Moore [10] : l'algèbre de Pontryagin  $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$  est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie graduée  $\Pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ , munie du produit de Samelson. Si l'on pose  $c_i = \dim \Pi_i(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ , on a donc, d'après Poincaré-Birkhoff-Witt :

$$(1.2.1) \quad P(\Omega X; t) = \prod_{i \geq 1}^{\infty} \frac{(1 + t^{2i-1})^{c_{2i-1}}}{(1 - t^{2i})^{c_{2i}}}$$

Par suite :

Exemple 1.3.— Si  $X$  ne possède qu'un nombre fini de groupes d'homologie et d'homotopie d'ordre infini (par exemple si  $X$  est un espace homogène de groupe de Lie), la série  $P(\Omega X; t)$  est rationnelle. On a d'autre part :

Exemple 1.4.— Si  $X$  est une suspension  $\Sigma Y$ , on a

$$P(\Omega \Sigma Y; t) = (1 - \sum_{i=1}^{\dim Y} \text{rg } \tilde{H}_i(Y) \cdot t^i)^{-1}$$

En effet,  $H_*(\Omega \Sigma Y; \mathbb{Q})$  est l'algèbre tensorielle sur  $\tilde{H}_*(Y; \mathbb{Q})$  d'après Bott-Samelson.

On notera l'analogie entre 1.2 et 1.4 ...

## § 2. Le contre-exemple de Serre : $\Omega^2(S^3 \vee S^3)$

Vu l'analogie suggérée plus haut entre Q1 et Q2, on peut se poser la question suivante : étant donné une suite spectrale dont la base a une série de Poincaré rationnelle et l'aboutissement est acyclique, est-ce que la fibre a une série de Poincaré rationnelle ? Ceci impliquerait en particulier que  $\Omega^p X$  a une série de Poincaré rationnelle pour tout  $X$  fini  $r$ -connexe et  $p \leq r$ . Malheureusement ceci est faux : Serre a montré il y a longtemps (et publié récemment [8]) que  $P(\Omega^2(S^3 \vee S^3); t) \notin \mathbb{Q}(t)$ .

Rappelons brièvement pourquoi : l'algèbre de Lie  $\Pi_*(\Omega(S^3 \vee S^3)) \otimes \mathbb{Q}$  est l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs  $a$  et  $b$  de degré 2 : par suite

$$c_{2n-1}(\Omega^2(S^3 \vee S^3)) = w(2,n) , \quad c_{2n} = 0$$

où  $w(2,n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) 2^d$  est le nombre de crochets basiques de longueur  $n$  dans l'algèbre de Lie libre à deux générateurs. D'après (1.2.1),

$$f(t) = P(\Omega^2(S^3 \vee S^3); t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^{2n-1})^{w(2,n)}$$

Serre remarque alors que les coefficients  $b_i$  de la série

$$g(t) = \frac{t \cdot f'(t)}{f(t)} - \frac{2t}{1+t} = \sum b_i \cdot t^i$$

sont nuls ssi  $i$  est une puissance de 2. Ceci contredit le théorème de Skolem, suivant lequel l'ensemble des indices des coefficients nuls d'une série rationnelle est périodique.

§ 3. Discussion de Q2 pour les CW-complexes "à deux étages"

On peut essayer d'attaquer Q2 par récurrence sur la structure de CW-complexe de  $X$ , vu que Q2 est vraie pour les bouquets finis de sphères.

L'étape suivante consiste à regarder les espaces  $X$  de la forme

$$X = \left( \bigvee_{i=1}^r S^{m_i+1} \right) \cup_f \left( \bigvee_{j=1}^s e^{n_j+2} \right), \quad m_i, n_j \geq 1$$

où 
$$f : \Sigma B = \bigvee_j S^{n_j+1} \longrightarrow \bigvee_i S^{m_i+1} = \Sigma A$$

est l'application d'attachement des cellules  $e^{n_j+2}$ .

Dans [3], on trouve une étude assez complète de la structure d'algèbre de  $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$  pour de tels espaces  $X$ , et l'on devrait trouver la formule que nous allons maintenant établir. L'algèbre  $H_*(\Omega \Sigma A)$  (resp.  $H_*(\Omega \Sigma B)$ ) est l'algèbre tensorielle engendrée par des éléments  $a_i$ ,  $\deg a_i = m_i$ ,  $i = 1$  à  $r$  (resp.  $b_j$ ,  $\deg b_j = n_j$ ,  $j = 1$  à  $s$ ). Soit  $K_*$  le conoyau du morphisme  $\Omega f_* : H_*(\Omega \Sigma B) \rightarrow H_*(\Omega \Sigma A) : c'$ est le quotient de l'algèbre libre sur les  $a_i$  par l'idéal engendré par l'image des  $b_i$ . Soit  $K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i \cdot t^i$  la série des dimensions de  $K_*$ . On a

PROPOSITION 3.1.-

$$P(\Omega X; t)^{-1} = (1+t)K(t)^{-1} - t \left( 1 - \sum_{i=1}^r t^{m_i} + \sum_{j=1}^s t^{n_j} \right)$$

Pour démontrer cette formule, on peut considérer la "petite" suite spectrale de la fibration  $\Omega X \rightarrow * \rightarrow X$  obtenue en filtrant  $X$  par  $F_0 X = *$ ,  $F_1 X = \Sigma A$ ,  $F_2 X = X$ . On a évidemment  $E_{p,*}^r = 0$  si  $p \neq 0, 1, 2$ , et par conséquent  $E^3 = E^\infty = \mathbb{Q}$  en bidegré  $(0,0)$ ,  $E_{1,*}^2 = E_{1,*}^3 = 0$ , et l'on a les suites exactes :

$$(3.1.1) \quad 0 \rightarrow E_{2,*}^2 \rightarrow E_{2,*}^1 \rightarrow E_{1,*}^1 \rightarrow E_{0,*}^1 \rightarrow E_{0,*}^2 \rightarrow 0$$

$$(1.2) \quad \forall q \geq 0, \quad 0 \rightarrow E_{2,q-1}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,q}^2 \rightarrow E_{0,q}^3 \rightarrow 0$$

avec  $E_{0,q}^3 = 0$  si  $q \neq 0$ ,  $E_{0,0}^3 = \mathbb{Q}$ .

On montre :

$$\begin{aligned} E_{0,*}^1 &= H_*(\Omega X) \\ E_{1,*}^1 &= H_*(\Omega X) \otimes \tilde{H}_*(A) \\ E_{2,*}^1 &= H_*(\Omega X) \otimes \tilde{H}_*(B) \\ E_{0,*}^2 &= H_*(\Omega X) \otimes_{K_*} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

On montre en outre que  $H_*(\Omega X)$  est  $K_*$ -libre, de sorte que, notant  $V(t)$  la série des dimensions de l'espace vectoriel gradué  $V_*$ , on a

$$E_{0,*}^2(t) = P(\Omega X; t) \times K(t)^{-1}$$

et les suites exactes (3.1.1) et (3.1.2) donnent

$$\begin{aligned} E_{0,*}^2(t) &= P(\Omega X; t) \times (1 - \sum t^{mi} + \sum t^{nj}) - E_{2,*}^2(t) \\ E_{0,*}^2(t) &= 1 + t \cdot E_{2,*}^2(t) \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée par un calcul immédiat.

On voit donc que  $P(\Omega X; t)$  est rationnelle ssi  $K(t)$  l'est. Réciproquement, à toute présentation d'une  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Hopf cocommutative, connexe,  $K$ , on peut associer un CW-complexe à deux étages, fini ssi la présentation est finie. Par suite, Q2 pour les CW-complexes à deux étages équivaut à :

Q3 : Soit  $K$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Hopf cocommutative, connexe, de présentation finie. La série formelle :

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i \cdot t^i$$

est-elle rationnelle ?

Si l'on oublie "de Hopf cocommutative", la question a résisté jusqu'en 1978 : J.-B. Shearer [9] a alors réussi à fabriquer un contre-exemple comportant 11 générateurs et 77 relations ! Un an plus tard, D. Anick produisait le contre-exemple décisif à Q3 que nous décrirons plus loin. Mais auparavant, revenons aux anneaux locaux.

#### § 4. Retour aux anneaux locaux

En 1978, J.-E. Roos [4] a observé une relation remarquable entre Q1 et Q2 :

Soit  $X$  un CW-complexe 1-connexe, fini, vérifiant  $H_i(X; \mathbb{Q}) = 0$  si  $i \neq 0, 2, 4$ . On posera  $b_i = \dim H_i(X; \mathbb{Q})$ . Si l'on oublie la graduation, la cohomologie  $H_*(X; \mathbb{Q})$  est un anneau local, avec  $\mathfrak{m} = \tilde{H}^*(X; \mathbb{Q})$  et  $\mathfrak{m}^3 = 0$ . L'idée de Roos consiste à expliciter la relation qui existe entre  $P_{H^*(X)}(t)$  et  $P(\Omega X; t)$ .

Voici comment : en utilisant les techniques contemporaines de modèles minimaux, il n'est pas difficile de voir qu'un espace  $X$  vérifiant les conditions ci-dessus a le type d'homotopie rationnelle d'un CW-complexe à deux étages :

$$X \sim_{\mathbb{Q}} \left( \bigvee_{i=1}^{b_2} S_i^2 \right) \cup_f \bigvee_{j=1}^{b_4} e_j^4$$

et l'application  $f$  est "quadratique", c'est-à-dire est une combinaison linéaire de crochets de Whitehead de longueur 2 sur les identités des sphères  $S_1^2$ . En particulier un tel  $X$  est "formel", ce qui entraîne en particulier que la suite spectrale d'Eilenberg et Moore

$$(4.1) \quad E_{p,q}^2 = \text{Cotor}_{p,q}^{H^*(X)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \Rightarrow H_{p+q}(\Omega X)$$

vérifie  $E^2 = E^\infty$ . Comment calcule-t-on Cotor ? C'est l'homologie de la cobar-construction, qui est ici l'algèbre tensorielle bigraduée, engendrée par des générateurs  $a^i$ ,  $i = 1, \dots, b_2$  de bidegré  $(-1, 2)$  et  $b^j$ ,  $j = 1, \dots, b_4$  de bidegré  $(-1, 4)$ , en bijection avec les cellules de dimension positive de  $X$ , et munie de la différentielle  $d$ , de bidegré  $(-1, 0)$ , telle que  $da^i = 0$  et  $db^j$  est la combinaison linéaire de crochets sur les  $a^i$  donnée par  $f$ . Cette algèbre est donc bigraduée, concentrée dans le 2e quadrant ( $p \leq 0, q \geq 0$ ), et la série des dimensions d'une telle algèbre est un élément de  $\mathbb{Z}[[s^{-1}, t]]$ . En effectuant un raisonnement analogue à celui de 3.1 sur la cobar-construction acyclique, filtrée "à deux étages" de manière évidente, on obtient la formule

$$(4.2) \quad C(s, t)^{-1} = (1 + s).K(s, t)^{-1} - s(1 - b_2 s^{-1} t^2 + b_4 s^{-1} t^4)$$

où  $C(s, t)$  est la série double de  $\text{Cotor}_{*,*}^{H^*(X)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  et  $K(s, t)$  celle de  $T((a^i)/(db^j)) = K$ .

Comme la suite spectrale (4.1) est triviale, on a  $C(t, t) = P(\Omega X; t)$  et l'on retrouve la formule (3.1) en faisant  $s = t$  dans (4.2).

En revanche, vu la dualité entre  $\text{Cotor}_{H^*(X)}$  et  $\text{Tor}_{H^*(X)}$ , on voit que

$$C(t^{-1}, 1) = \sum \dim \text{Tor}_{i,*}^{H^*(X)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cdot t^i = P_{H^*(X)}(t).$$

Or comme l'algèbre bigraduée  $K$  est engendrée en bidegré  $(-1, 2)$ , elle est concentrée en bidegrés  $(-k, 2k)$ ,  $k \geq 0$ , et l'on a donc

$$K(t^{-1}, 1) = K(t, t) = K(t).$$

En éliminant  $K(t)^{-1}$  entre  $C(t, t)$  et  $C(t^{-1}, 1)$ , on obtient la formule de Roos ([4], th. B)

$$(4.3) \quad P(\Omega X; t)^{-1} - t.P_{H^*(X)}(t)^{-1} = (1 - t)(1 - b_2 t + b_4 t^2)$$

Il résulte des formules (3.1) et (4.3) que si l'on peut trouver une algèbre  $K$  qui est un contre-exemple à Q3, et admet une présentation avec des générateurs en degré 1 et des relations en degré 2 *seulement*, le CW-complexe à deux étages associé à cette présentation est un contre-exemple à Q2 et sa cohomologie est un contre-exemple à Q1 !

Il ne reste plus qu'à trouver une telle algèbre ; c'est ce qu'a fait D. Anick dans sa thèse [1], [2].

§ 5. L'exemple de D. Anick

Anick obtient son exemple par des manipulations combinatoires sur les "produits semi-tensoriels" d'algèbres graduées. Nous exposerons ici la méthode de construction proposée par J.-E. Roos et C. Löfwall [5], qui n'utilise que de l'algèbre homologique "classique".

On rappelle d'abord que si  $K$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre de Hopf cocommutative, graduée, connexe, ses primitifs forment une sous-algèbre de Lie  $PK$  et  $K = UPK$  (cf. [10]). D'autre part, pour que  $K$  soit de présentation finie, engendrée en degré 1 et "relatée" en degré 2, il faut et il suffit que  $\text{Tor}_{1,*}^K(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  et  $\text{Tor}_{2,*}^K(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  soient de dimension finie et concentrés respectivement en degrés 1 et 2.

Considérons l'algèbre graduée abélienne  $A$  engendrée par la suite des générateurs  $a_i$ ,  $\deg a_i = i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$A = E(a_1, a_3, a_5, \dots) \otimes P(a_2, a_4, a_6, \dots)$$

et

$$A(t) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 + t^{2i-1}}{1 - t^{2i}}.$$

Il est clair que  $A(t) \notin \mathbb{Q}(t)$ , mais  $A$  n'est pas de présentation finie. L'idée consiste à construire l'algèbre  $K$  cherchée comme extension

$$(5.1) \quad \mathbb{Q} \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow \mathbb{Q}$$

avec  $B(t)$  rationnelle. On aura alors

$$K(t) = A(t) \cdot B(t) \notin \mathbb{Q}(t).$$

Une telle extension équivaut à la donnée de l'extension d'algèbres de Lie (graduées)

$$0 \rightarrow PA \rightarrow PK \rightarrow PB \rightarrow 0,$$

où  $PA = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Q} \cdot a_i$  a un crochet nul : une telle extension, pour  $B$  fixé et une action  $\tau$  de  $B$  sur  $PA$  fixée, est donc classée par un élément de  $H_0^2(PB; \tau PA)$ .

Il se trouve qu'en choisissant

$$B = T(b, c) \otimes T(b', c')$$

où  $b, c, b', c'$  sont de degré 1 (et donc primitifs) et la structure de  $B$ -module sur  $PA$  définie par

$$(5.3) \quad \forall i \geq 1, \begin{cases} b \cdot a_i = b' \cdot a_i = 0 \\ c \cdot a_i = a_{i+1} \\ c' \cdot a_i = (-1)^{i+1} \cdot a_{i+1} \end{cases}$$

l'espace vectoriel  $H_0^2(PB; PA)$  est de dimension 1, engendré par la classe du cocycle  $\gamma$  défini par

$$\gamma(b, b') = a_2 = \gamma(b', b)$$

et  $\gamma = 0$  sur tous les autres couples de générateurs de  $B$ . Soit  $K$  l'extension

de A par B associée à  $\gamma$ . Il résulte de la définition que l'on a dans K les générateurs  $a = a_1, b, b', c, c'$  de degré 1 et les relations :

$$(5.4) \quad \begin{cases} [b, c'] = [b', c] = [c, c'] = 0 \\ [b, b'] = [c, a] = [c', a] \\ [b, a] = [b', a] = 0 \\ [a, a] = 0 \end{cases}$$

On calcule ensuite  $\text{Tor}_{1,*}^K(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  et  $\text{Tor}_{2,*}^K(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  au moyen de la suite spectrale de l'extension 5.1, qui s'écrit

$$(5.5) \quad E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^B(\text{Tor}_q^A(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \Rightarrow \text{Tor}_{p+q}^K(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

et l'on vérifie que ces espaces vectoriels sont de dimensions respectives 5 et 8, de sorte que les générateurs  $a, b, c, b', c'$  et les relations (5.4) constituent une présentation de K.

Il n'y a plus qu'à appliquer les résultats du § 4 : le contre-exemple à Q2 est

$$X = \left( \bigvee_{i=1}^5 S_i^2 \right) \cup_f \bigvee_{j=1}^8 e^4$$

où f annule les crochets de Whitehead correspondant à (5.4). L'anneau local qui contredit Q1 est la cohomologie rationnelle de X, que l'on peut décrire comme suit

$$R = H^*(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]/I$$

où I est l'idéal engendré par :

$$(5.6) \quad \begin{cases} x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2 \\ x_2x_3, x_4x_5, x_2x_4 + (x_3 + x_5)x_1 \\ \text{tous les polynômes de degré } \geq 3 \end{cases}$$

### § 6. En guise de conclusion

Maintenant que nous savons ce que ces séries de Poincaré ne sont pas, il est naturel de se demander ce qu'elles peuvent être ! David Anick conclut sa thèse par deux remarques, concernant Q2, mais qui valent tout aussi bien pour Q1.

La première est que (si X n'est pas contractile), la série  $P(\Omega X; t)$  admet un rayon de convergence  $r$  vérifiant  $0 < r \leq 1$  : en regardant la suite spectrale de Serre, on voit sans peine que  $P(\Omega X; t)$  ne converge pas pour  $t = 1$ , mais qu'elle converge sur tout disque de centre 0 qui ne contient aucun zéro du polynôme  $1 - t^{-1}(P(X; t) - 1)$ .

La deuxième est que  $P(\Omega X; t)$  peut être néanmoins "fortement" transcendante : soit E (comme exponentielle, ou enveloppante) l'application des séries formelles dans elles-mêmes définie par

$$E(\sum a_i t^i) = \prod_{i \geq 1} \frac{(1 + t^{2i-1})^{a_{2i-1}}}{(1 - t^{2i})^{a_{2i}}}$$

Les séries de Poincaré des exemples construits au § 6 sont du type : fonction



rationnelle de  $E$  (fraction rationnelle). On peut en fait itérer  $E$  autant de fois qu'on veut, car on peut généraliser la construction de l'algèbre  $K$  de façon à pouvoir l'itérer : de façon précise, on peut prendre pour algèbre de Lie abélienne  $PA$  l'idéal d'augmentation de *n'importe quelle algèbre associative* présentée par un nombre fini de générateurs de degré 1 et de relations de degré 2, en particulier l'algèbre  $K$ , et ainsi de suite ! cf. [1] et [5] pour les détails.

On trouvera dans l'excellent rapport de Roos [6] un survol de nombreuses autres questions voisines, ainsi qu'une bibliographie complète.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ANICK - Ph. D. thesis, M.I.T., 1980, Stockholm U. Reports, n° 8, 1980
- [2] D. ANICK - C. Rend. Acad. Sci. Paris, 290 A(1980), 729-732.
- [3] J.-M. LEMAIRE - *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets*, Springer Lect. Notes, n° 422(1974).
- [4] J.-E. ROOS - Springer Lect. Notes n° 740(1979), 285-322.
- [5] J.-E. ROOS and C. LÖFWALL - C. R. A. S. Paris, 290 A(1980), 733-736.
- [6] J.-E. ROOS - *Homology of loop spaces and local rings*, Stockholm U. Reports, n° 15(1980).
- [7] J.-P. SERRE - *Algèbre locale et multiplicités*, Springer Lect. Notes, n° 11, 2e éd., 1965.
- [8] J.-P. SERRE - Proc. Kon. Ned. Akad., A 82(1979), 469-471. (= Indag Math. 41, 469-471).
- [9] J.-B. SHEARER - J. Algebra, 62(1980), 228-231.
- [10] J. MILNOR and J.-C. MOORE - Annals of Math., 81(1965), 211-264.

Jean-Michel LEMAIRE  
 Université de Nice  
 Département de Mathématiques  
 Parc Valrose  
 06034 NICE CEDEX