BERNARD TEISSIER

Variétés toriques et polytopes

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 565, p. 71-84

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__71_0>

VARIETES TORIQUES ET POLYTOPES

par Bernard TEISSIER

Introduction

La construction des variétés de Demazure permet de choisir, pour chaque famille finie $K_1,\dots,K_p$ de polytopes entiers dans $\mathbb{R}^d$, une variété algébrique X sur $\mathbb{C}$, de dimension d, et sur laquelle à chaque K_i correspond un faisceau inversible (i.e. fibré en droites) L_i. La donnée de (X,L_i) détermine K_i, et l'on peut établir un dictionnaire entre les propriétés combinatoires des polytopes K_i et les propriétés algébro-géométriques des faisceaux L_i sur X. Nous nous concentrons ici sur les propriétés de X et des L_i qui relèvent de la Théorie de Hodge (bien que X ait des singularités, celles-ci ne gênent pas trop). Soit f_i le nombre des faces de dimension i d'un polytope P dont toutes les faces sont des simplexes. R.P. Stanley a montré ([20]) que le théorème de Lefschetz vache sur X, joint à un résultat combinatoire élégant (d'un type inauguré par Macaulay), fournit des inégalités entre les f_i, qui avaient été conjecturées par Mc Mullen, mais dont on ne connait aucune autre démonstration, et que la dualité de Poincaré sur X fournit des relations linéaires déjà connues entre les f_i (équations de Dehn - Somerville) ; un peu avant, L.J. Billera et C.W. Lee ([2]) avaient montré que ces équations et inéquations étaient aussi une condition suffisante pour qu'une suite d'entiers $(f_o,\dots,f_{d-1})$ provienne d'un polytope simplicial. D'autre part, étant données deux polytopes K_1 et K_2 dans $\mathbb{R}^d$, on sait que $\mathrm{Vol}(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)$ prend les mêmes valeurs, pour $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$ qu'un polynome homogène de degré d en λ_1 et λ_2 à coefficients positifs, que l'on peut écrire $\sum_{i=o}^{d}\binom{d}{i} v_i\lambda_1^i\lambda_2^{d-i}$.

Grâce au dictionnaire mentionné ci-dessus, on peut déduire du théorème de l'index de Hodge sur X les inégalités "de Fenchel - Aleksandrov" $v_{i-1}^2\geq v_iv_{i-2}$ pour $2\leq i\leq d$ (cf. [1], [27], [25], [26], [11]). Par une approximation évidente on en déduit les mêmes inégalités pour deux convexes compacts quelconques de $\mathbb{R}^d$, et donc en particulier les inégalités isopérimétriques.

§ 1. Complexes simpliciaux de multi-ensembles et idéaux engendrés par des monomes

Définition 1.- Un multi-ensemble est un couple (V,e), où V est un ensemble et e une application de V dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une partie d'un multi-ensemble est un couple (V',e') où $V' \subseteq V$ et $e' \leq e|V'$. Le rang d'un multi-ensemble est $r(V,e) = \sum_{v \in V} e(v)$, ou $+\infty$, avec les conventions usuelles.
On note ∂ l'application qui à un multi-ensemble de rang fini ℓ associe l'ensemble de ses parties de rang $\ell-1$; On dit qu'un ensemble Δ de parties de rang fini de (V,e) est un complexe simplicial si, pour toute partie $(V',e') \in \Delta$, on a $\partial(V',e') \subset \Delta$, ce que l'on notera $\partial\Delta \subseteq \Delta$.

Soient maintenant k un corps, et d un entier, ou $+\infty$.

Définition 2.- Un ensemble E de monomes dans l'anneau de polynomes $h[X_1,\ldots,X_d]$ est un escalier si tout monôme m' divisant un monome m de E est aussi dans E.

Dans toute la suite nous ne considérerons que les multi-ensembles de cardinalité au plus dénombrable, et nous identifierons V à $\{1,\ldots,d\}$, où $d = \operatorname{card} V$.

Soit (V,e) un multi-ensemble, et soit Δ une famille de parties de rang fini de (V,e). Considérons l'anneau de polynomes $k[V] = k[(X_v)_{v\in V}]$, et à chaque élément (V',e') de Δ associons le monôme $\prod_{v\in V'} X_i^{e'(v)}$; Notons $E(\Delta) \subset k[V]$ l'ensemble des monômes ainsi obtenus : L'ensemble $E(\Delta)$ est un escalier si et seulement si Δ est un complexe simplicial.

Notons $I(\Delta)$ l'idéal homogène de $k[V]$ engendré par les monômes $\prod_{v\in V'} X_v^{e'(v)}$, où (V',e') est une partie de (V,e) qui n'appartient pas à Δ, et notons $R(\Delta)$ la k-algèbre graduée quotient $k[V]/I(\Delta)$. Etant donnée une partie (W,f) de $(V,+\infty)$, posons pour tout $w\in W$, $a(w) = \inf(f(w),e(w))$.
Supposons que Δ soit un complexe simplicial : On voit que le monôme $\prod_{w\in W} X_w^{f(w)}$ n'appartient pas à $I(\Delta)$ si et seulement si la partie (W,a) de (V,e) appartient à Δ. Dans le cas où e est la fonction constante égale à 1, (W,a) n'est autre que le support de (W,f), et puisque le nombre des monômes de degré ℓ ayant un support de cardinalité $i+1$ donné ne dépend que de ℓ et i, puisqu'il vaut $\binom{\ell-1}{i}$, en notant $R(\Delta)_\ell$ la composante homogène de degré ℓ de $R(\Delta)$, on a : $\dim_k R(\Delta)_o = 1$, et

$$\dim_k R(\Delta)_\ell = \sum_{i=o}^{\delta} f_i \binom{\ell-1}{i} \qquad \text{si } \ell \geq 1$$

où δ est le plus grand des rangs des éléments de Δ et f_i est le nombre des éléments de Δ qui ont rang $i+1$.
Dans le cas où e est la fonction constante égale à $+\infty$ on a $(W,a) = (W,f)$, et donc

$$\dim_k R(\Delta)_\ell = f_{\ell-1} \qquad \ell \geq 0 \qquad (f_{-1} = 1)$$

On voit donc que dans ces deux cas, la connaissance de la fonction de Hilbert $H_R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de l'algèbre graduée $R = R(\Delta)$ définie par $H_R(\ell) = \dim_k R_\ell$ équivaut à la connaissance de la f-suite du complexe simplicial Δ, c'est à dire la suite $(f_o, f_1, \ldots, f_i, \ldots)$ où $f_\ell = \mathrm{card}\, \Delta_\ell$ et Δ_ℓ est l'ensemble des éléments de Δ qui ont pour rang ℓ . On se propose de caractériser les suites d'entiers qui sont la f-suite d'un complexe simplicial Δ :
Considérons l'anneau $k[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et introduisons sur l'ensemble de ses monômes l'ordre suivant : Un monôme m est plus petit que m', si ou bien $\deg m < \deg m'$ ou bien $\deg m = \deg m'$ et m est plus petit que m' pour l'ordre lexicographique inverse c'est à dire $X_1^{a_1} \ldots X_p^{a_p} < X_1^{b_1} \ldots X_p^{b_p}$ (les a_i, b_i peuvent être nuls) si il existe $j \leq p$ tel que $a_p = b_p$, $a_{p-1} = b_{p-1}, \ldots$ $a_{p-j+1} = b_{p-j+1}$ et $a_{p-j} < b_{p-j}$. En particulier, $X_1 < X_2 < X_3 < \ldots$.

Soit $(\mathbb{N},e)$ un multi-ensemble. Pour chaque entier a, désignons par $\binom{a}{\ell}_e$ le nombre des monômes de degré ℓ en $X_1, \ldots, X_a$ tels que X_i apparaisse avec un exposant $\leq e(i)$, que nous appellerons e-monômes, c'est à dire le coefficient de x^ℓ dans le produit $\prod_{i=1}^{a} (1+x+\ldots+x^{e(i)})$. En particulier si $e \equiv 1$, on a $\binom{a}{\ell}_1 = \binom{a}{\ell}$ et si $e \equiv +\infty$, on a $\binom{a}{\ell}_\infty = \binom{a+\ell-1}{\ell}$. On suppose dans la suite $e(i) \leq e(i-1)$, $\forall\, i \geq 1$.

Lemme de Macaulay et Kruskal.- Un entier ℓ étant fixé, tout nombre entier f s'écrit d'une manière unique

$$f = \binom{a_\ell}{\ell}_e + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1}_e + \ldots + \binom{a_i}{i}_e$$

où $a_\ell \geq a_{\ell-1} \geq \ldots \geq a_i$, et dans cette suite, chaque j apparait au plus $e(j+1)$ fois.
Gardons les notations précédentes, et pour chaque entier f, notons I_ℓ^f l'ensemble des f premiers e - monômes de degré ℓ (pour l'ordre ci-dessus), vu bien sûr comme un ensemble de parties de $(\mathbb{N},e)$; on a alors :

THEOREME (cf. [3] , [7])....

A) $\partial\, I^f_\ell = I^{\partial_\ell f}_{\ell-1}$ où $\partial_\ell f = \binom{a_\ell}{\ell-1}_e + \dots + \binom{a_i}{i-1}_e$

les nombres $a_\ell ,\dots, a_i$ étant ceux qui sont associés à f dans le lemme précédent.

B) Soit Δ un ensemble de parties de $(\mathbb{N},e)$, et soit C l'opérateur (de compression) qui à Δ associe la famille des $I^{f_\ell}_\ell$, avec $f_\ell = \operatorname{Card} \Delta_\ell$. Alors

$$\partial(C\Delta) \subseteq C(\partial\Delta)$$

L'idée de la preuve du lemme est simple : tant que $\binom{a_\ell}{\ell}_e \leq f$, les f premiers monômes de degré ℓ utilisent au moins les a_ℓ premières variables ; si $\binom{a_\ell}{\ell}_e < f < \binom{a_\ell+1}{\ell}_e$, alors parmi les f premiers monômes, certains utilisent $X_{a_\ell+1}$. Ainsi les f premiers monômes comprennent tous les monômes de degré ℓ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$, et des produits de monômes de degré $\ell-1$ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$ par $X_{a_\ell+1}$. Mais il s'agit surement des $f-\binom{a_\ell}{\ell}_e$ premiers monômes de degré $\ell-1$, toujours à cause de la façon dont l'ordre a été défini. Si $f-\binom{a_\ell}{\ell}_e \geq \binom{a_\ell}{\ell-1}_e$, cela signifie que tous les monômes de degré $\ell-1$ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$ apparaissent ainsi, on pose $a_{\ell-1} = a_\ell$, et l'on va regarder les monômes de degré $\ell-2$, dont on fait le produit avec $X^2_{a_{\ell+1}}$, et l'on continue ainsi. L'égalité se reproduit bien au plus $e(a_\ell+1)$ fois, et par récurrence on obtient le lemme, et le même type d'argument prouve l'assertion A) du Théorème.

Pour l'assertion B), souvent appelée "Théorème de Kruskal-Katona" on renvoie à [3] et [7]..

<u>Remarque</u>.- Si l'on note ∂^{-1} l'application qui, à une partie de rang fini (V',e') de (V,e) associe l'ensemble des parties de (V,e) de rang $r(V',e')+1$ telles que (V,e) en soit une partie, une preuve symétrique de celle de B) montre aussi que

$$\partial^{-1}(C\Delta) \supseteq C(\partial^{-1}\Delta)$$

tandis que $\partial^{-1} I_\ell^f = I_{\ell+1}^{\partial_\ell^{-1} f_\ell}$

où
$$\partial_\ell^{-1} f = \binom{a_\ell}{\ell+1}_e + \dots + \binom{a_i}{i+1}_e \quad .$$

Corollaire 1.- Une suite d'entiers $(f_o, f_1, \dots, f_\ell, \dots)$ est la f-suite d'un complexe simplicial de parties de rang fini de $(\mathbb{N}, e)$ si et seulement si pour tout $\ell \geq 1$, on a

$$\partial_\ell f_\ell \leq f_{\ell-1} \qquad (\text{resp. } f_{\ell+1} \leq \partial_\ell^{-1} f_\ell)$$

En effet, étant donné une suite satisfaisant cette condition, la famille $\Delta_\ell = I_\ell^{f_\ell}$ est un complexe simplicial d'après la partie A) du Théorème. Inversement, étant donné un complexe simplicial Δ, $C\Delta_\ell = I_\ell^{f_\ell}$ et donc on a $I_{\ell-1}^{\partial_\ell f_\ell} \subseteq C(\partial\Delta) \subseteq C(\Delta_{\ell-1}) = I_{\ell-1}^{f_{\ell-1}}$ d'où le résultat.

Corollaire 2.- (Stanley [21], inspiré par Macaulay [14]).- Soient k un corps, et $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une k-algèbre graduée de type fini R avec $R_o = k$ et engendrée par ses éléments de degré 1, ayant H pour fonction de Hilbert.

ii) Il existe un escalier E dans un anneau $k[X_1, \dots, X_d]$ tel que $H(\ell)$ soit le nombre d'éléments de degré $\ell-1$ dans E.

ii)' Il existe un ensemble fini V et un complexe simplicial Δ dans $(V, +\infty)$ tel que $\operatorname{card} \Delta_{\ell-1} = H(\ell)$ $(\ell \geq 0)$.

iii) Posant, pour tout ℓ, $H(\ell) = \binom{c_\ell}{\ell} + \dots + \binom{c_i}{i}$ avec $c_\ell > c_{\ell-1} > \dots > c_i \geq i$, on a

$$H(\ell+1) \leq \binom{c_\ell + 1}{\ell+1} + \binom{c_{\ell-1} + 1}{\ell} + \dots + \binom{c_i + 1}{i+1}$$

1) Une k-algèbre R comme en i) est quotient de $k[X_1, \dots, X_d]$ par un idéal homogène I. On va lui associer un escalier dans $k[X_1, \dots, X_d]$ comme suit : Posons $m_1 = 1$, et supposons avoir défini $m_1, \dots, m_i$; on définit m_{i+1} comme le plus petit monôme dont l'image dans R est linéairement indépendante des images de $m_1, \dots, m_i$. Si un tel élément n'existe pas, la construction s'arrète là. La collection des m_i est un escalier ayant la propriété voulue en ii). Le reste résulte de ce qui précède, en remarquant que l'inégalité de iii) équivaut bien à $\partial_\ell^{-1} f_\ell \geq f_{\ell+1}$ dans le cas $e \equiv +\infty$.

§ 2. Polytopes et variétés toriques

2.1 Algèbres associées à des cônes et varités toriques. (D'après [5], [13], [17])

Notons M un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d, considéré comme le réseau entier de $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^d$, et $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module dual, considéré comme le réseau entier de l'espace vectoriel dual $\mathbb{R}^{d*}$. Soit $\sigma \subset \mathbb{R}^{d*}$ un cône convexe polyhédral rationnel, c'est à dire qu'il existe un nombre fini de formes linéaires ℓ_i, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, telles que $\sigma = \{u \in \mathbb{R}^{d*} / \ell_i(u) \geq 0$ pour tout $i\}$, et soit $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}^d$ le dual convexe de σ, c'est à dire $\{x \in \mathbb{R}^d / u(x) \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}$; l'ensemble $\check{\sigma}$ est encore un cône convexe rationnel, et grâce au lemme de Gordan le sous-monoide $\check{\sigma} \cap M$ de M est un monoide de type fini. En fait, l'application $\sigma \to \check{\sigma} \cap M$ définit une bijection de l'ensemble des cônes convexes polyhédraux rationnels de $\mathbb{R}^{d*}$ qui ne contiennent aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{d*}$ sur l'ensemble des sous-monoides de type fini de M qui engendrent le groupe M.

Dans toute la suite, nous dirons "cône" pour "cône convexe polyhédral rationnel". Etant donné un corps k, on notera $k[\check{\sigma} \cap M]$ l'algèbre du monoide $\check{\sigma} \cap M$, c'est à dire la sous-algèbre de l'algèbre $k[M] \simeq k[X_1,X_1^{-1},\dots,X_d,X_d^{-1}]$ du groupe M qui est engendrée par les monômes dont l'exposant appartient à $\check{\sigma} \cap M$. Puisque $\check{\sigma} \cap M$ est monoide de type fini, la k-algèbre $k[\check{\sigma} \cap M]$ est de type fini, et définit donc une variété algébrique affine $X_\sigma = \mathrm{Spec}\, k[\check{\sigma} \cap M]$ sur k. On obtient en particulier ainsi, en prenant les cônes σ ne contenant aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{d*}$, toutes les variétés algébriques affines normales X contenant comme ouvert de Zariski dense le tore $T = (k^*)^d$ et telles que l'action de T sur lui-même par translation s'étende en une action algébrique de T sur X.

Remarquons qu'une inclusion de cônes $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ équivaut à $\check{\sigma}_1 \cap M \supseteq \check{\sigma}_2 \cap M$ qui a son tour équivaut à un morphisme $X_{\sigma_1} \to X_{\sigma_2}$, qui est birationnel si $\check{\sigma}_1 \cap M$ et $\check{\sigma}_2 \cap M$ engendrent le même groupe.

On dit qu'un sous-ensemble $\sigma' \subseteq \sigma$ est une face du cône σ, et l'on note $\sigma' < \sigma$ si il existe $m \in M$ tel que $u(m) \geq 0$ $\forall u \in \sigma$ et $\sigma' = \{u \in \sigma \,/\, u(m) = 0\}$.

Définitions 3.- Un éventail Σ est la donnée d'un ensemble fini de cônes $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dans $\mathbb{R}^{d*}$ tel que : toute face d'un cône σ_α est un cône σ_β, $\beta \in A$, et pour tous les couples $(\alpha,\beta) \in A \times A$, $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ est une face de σ_α et de σ_β.

On appelle variété torique associée à Σ la variété algébrique X_Σ sur k obtenue en recollant les variétés algébriques affines X_{σ_α} $(\alpha \in A)$ le long des ouverts $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$.

On montre (cf. [5] ou [13] ou [17]) que l'on obtient ainsi tous les plongements T-équivariants du tore T dans des variétés normales. De plus on a un morphisme de plongements T-équivariants $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ si et seulement si, pour tout $\sigma\in\Sigma$, il existe $\sigma'\in\Sigma'$ tel que $\sigma \subseteq \sigma'$, un tel morphisme est propre si et seulement si $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = \bigcup_{\sigma'\in\Sigma'} \sigma'$, et X_Σ est complète si et seulement si $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = \mathbb{R}^{d*}$.

2.2 La construction (cf. [4], [21] ou [26])

Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_M$) l'ensemble des compacts convexes de $\mathbb{R}^d$ (resp. de ceux qui sont l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points du réseau entier M). On munit $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_M$ de la topologie de Hausdorff. Pour tout $K \in \mathcal{K}$, soit $H : \mathbb{R}^{d*} \to \mathbb{R}$ la fonction d'appui de K, définie par $H(u) = \inf_{x\in K} u(x)$. Si K est dans $\mathcal{K}_M$, sa fonction d'appui est linéaire par morceaux, c'est à dire qu'il existe un éventail $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tel que pour tout $\alpha\in A$, il existe $m_\alpha \in M$ tel que $H(u) = u(m_\alpha)$ pour tout $u\in\sigma_\alpha$. Nous dirons qu'un tel éventail est adapté à K. Etant donnés $K_1,\dots,K_p$ dans $\mathcal{K}_M$, il existe un unique éventail Σ_o adapté à tous les K_i et tel que tout autre éventail adapté à tous les K_i soit une subdivision de Σ_o. Si Σ est adapté, et si un des K_i est d'intérieur non vide, aucun des $\sigma_\alpha\in\Sigma$ ne contient de sous-espace linéaire.

Prenons $k = \mathbb{C}$, et soit Σ un éventail adapté à $K_1,\dots,K_p$. Pour chaque $i \in [1,\dots,p]$, et $\sigma_\alpha \in \Sigma$, notons $L_{i,\alpha}$ le sous $\mathbb{C}[\sigma_\alpha \cap M]$ - module de $\mathbb{C}(M)$ engendré par les monômes m tels que $u(m) \geq H_i(u)$ pour tout $u\in\sigma_\alpha$, où H_i est la fonction d'appui de K_i. Puisque $H_i(u) = u(m_{i,\alpha})$ $(u\in\sigma_\alpha)$, $L_{i,\alpha}$ est précisément le $\mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap M]$ - module monogène engendré par $m_{i,\alpha}$. Les $L_{i,\alpha}$ se recollent en un faisceau inversible L_i de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ - modules, qui est engendré par ses sections globales, admet une action de T, et une base T-homogène de $H^o(X_\Sigma, L_i)$ est en bijection avec l'ensemble des $m\in M$ tels que $u(m) \geq H_i(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^{d*}$, c'est à dire $K_i \cap M$. Ainsi la donnée de la variété torique X_Σ et du $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ - module T-équivariant et inversible L_i détermine K_i, alors que la donnée de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$, même dans le cas $p=1$, ne détermine que les faces de K_i "à translation près" ; la donnée de L_i équivaut à la donnée des positions des faces de K_i.

2.3 Le dictionnaire

Soient $K_1,\dots,K_p$ dans $\mathcal{K}_M$, Σ un éventail adapté et $X = X_\Sigma$. On suppose que K_1 est d'intérieur non vide. On rappelle qu'un polytope P est <u>simplicial</u> si toutes ses faces sont des simplexes. On note $f_i = f_i(P)$ le nombre des faces de dimension i du polytope P, et l'on remarque que, quitte à raffiner le réseau entier, on peut approximer arbitrairement P par un polytope $K \in \mathcal{K}_M$ tel que $f_i(K') = f_i(P)$ pour tout i . Par ailleurs, tout polytope peut être approximé arbitrairement par un polytope simplicial. Un polytope est cosimplicial si son éventail Σ_0 est formé de cônes simpliciaux.

On rappelle que, étant donnée une variété algébrique complète X , et des faisceaux inversibles de $\mathcal{O}_X$-modules $L_1,\dots,L_p$, la caractéristique d'Euler - Poincaré cohérente $\chi(X,L_1^{\nu_1} \otimes \dots \otimes L_p^{\nu_p})$ est un polynome de degré $d = \dim X$ en $\nu_1,\dots,\nu_p$. En particulier, $\chi(X,L^\nu) = \deg L \dfrac{\nu^d}{d!} + O(\nu^{d-1})$ où $\deg L$ est un entier. On définit les degrés mixtes de L_1 et L_2 comme les coefficients s_i apparaissant dans l'expression $\deg L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2} = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} s_i \nu_1^i \nu_2^{d-i}$.

A) Propriétés de X et des L_i . (d'après Demazure [5], et [13], [4])

1) X est une variété complète et normale.
2) $H^j(X,L_i) = 0$ pour $j \geq 1$ (et L_i est engendré par ses sections globales).
3) (D'après Ehlers [6] et Danilov [4]) : Si p=1 K est simplicial et $\Sigma = \Sigma_o$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2k}(X,\mathbb{C}) = \sum_{i=k}^{d} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_{d-i}$$

où a_j est le nombre de cônes de dimension j dans Σ , et $\dim H^{2k+1}(X,\mathbb{C}) = 0$ $(0 \leq k)$.

4) Si P est cosimplicial , et $\Sigma = \Sigma_o$, chaque σ_α est un cône simplicial, et l'on vérifie alors que X_{σ_α} est quotient d'une variété affine non-singulière par un groupe fini d'automorphismes (cf. [4], 2.6.2). Si l'on sait de plus que X est projective, c'est une V-variété projective, et donc d'après un théorème de Steenbrink ([24], 1.13) X satisfait le théorème de Lefschetz vache, c'est à dire que si $L \in H^2(X,\mathbb{Z})$ est la classe d'un diviseur ample sur X, pour tout $q \in \mathbb{N}$ l'application $\omega \to L^q \cap \omega$ induit un isomorphisme de $H^{n-q}(X,\mathbb{C})$ sur $H^{n+q}(X,\mathbb{C})$. De plus, X satisfait aussi la dualité de Poincaré. [Le point ici est que pour une résolution des singularités $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$, notant $j : X^o \to X$ l'inclusion de la partie non-singulière X^o de X dans X, et $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X = j_* \Omega^{\cdot}_{X^o}$

(complexes de De Rham), d'une part $\Omega^{\cdot}_X$ est encore une résolution de $\mathbb{C}$, et d'autre part $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X \cong \pi_* \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}}$. Steenbrink démontre alors que la suite spectrale d'hypercohomologie $E_1^{pq} = H^q(X,\tilde{\Omega}^p_X) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C})$ dégénère en E_1 comme dans le cas non-singulier].

5) (D'après [4], § 10, et Remarque 10.9) : Si le polytope P est cosimplicial et $\Sigma = \Sigma_o$, l'algèbre graduée de cohomologie est $H^*(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=o}^{d} H^{2i}(X,\mathbb{C})$ (où $\deg H^{2i} = i$) et est engendrée par ses éléments de degré 1. (En fait, toute la cohomologie de X est algébrique).

B) Voici quelques points du dictionnaire ($k=\mathbb{C}$) . Les K_i sont dans $\mathcal{K}_M$ et Σ leur est adapté ; $X = X_\Sigma$. On suppose que K_1 est d'intérieur non vide.

1)	$K_i = \{m_i\}$ pour un $i>1$	$L_i \simeq \mathcal{O}_X$
2)	Ensemble des $x\in\frac{1}{\nu} M$ ($\nu\in\mathbb{N}$) tel que $K_i + x \subseteq K_j$ $(i,j\geq 1)$. En particulier :	Base T-homogène, sur $\mathbb{C}$ de $H^o(X,(L_i^{-1}\otimes L_j)^{\nu})$
3)	$K_i \cap \{\frac{1}{\nu} M\}$	Base T-homogène de $H^o(X,L_i^{\nu})$
4)	Homothétie et addition $\nu_1 K_i + \nu_2 K_j$ $(\nu_1,\nu_2 \in \mathbb{N})$	$L_i^{\nu_1} \otimes L_j^{\nu_2}$
5)	$\mathrm{Vol}(\nu_1 K_i+\nu_2 K_j)=\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\#(\nu(\nu_1 K_i+\nu_2 K_j)\cap M)}{\nu^d}$	$\frac{1}{d!} \deg L_i^{\nu_1} \otimes L_j^{\nu_2}$
6)	Volumes mixtes de (K_i,K_j)	$\frac{1}{d!}\times$ (degrés mixtes de (L_i,L_j))
7)	$\Sigma = \Sigma_o$	$L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ est ample
8)	Si p=1, Le polytope K est cosimplicial et $\Sigma = \Sigma_o$	L est ample et X est recouvert par des ouverts affines T-invariants admettant des revêtements finis T-équivariants non-singuliers.
9)	Si p=1, K est cosimplicial et $\Sigma = \Sigma_o$, $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i(K) = \sum_{j=i}^{d} (-1)^{j-i}\binom{j}{i} f_j$ où $f_j = f_j(K)$ $(f_{-1}=1, f_d=1)$ et $0\leq i\leq d$.	$\tilde{h}_i = \dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(X,\mathbb{C})$ (Résulte du point 3) de A) et du fait que $f_j(p) = a_{d-j}(\Sigma_o)$.

§ 3. La Conjecture de Mc Mullen

Soit P un polytope simplicial convexe. On étend la f-suite de P en la suite $(f_{-1},f_o,f_1,\dots,f_{d-1},f_d)$ où $f_d = f_{-1} = 1$, et f_i est le nombre des faces de dimension i de P . Posons

$$h_i = h_i(P) = \sum_{j=o}^{i} \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1} \qquad (0 \le i \le d)$$

et $g_i = h_{i+1} - h_i$.

Mc Mullen avait conjecturé (cf. [15]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que, étant donné $(f_o,\dots,f_{d-1})$ il existe un polytope simplicial P tel que $f_i(P) = f_i$ et que les trois conditions suivantes soient vérifiées par la suite des g_i dérivée de celle des f_i comme ci-dessus :

(1) $$g_i = -g_{d-i-1} \qquad (0 \le i \le [\tfrac{d+1}{2}] - 1)$$

(2) $$g_i \ge 0 \qquad (0 \le i \le [\tfrac{d}{2}] - 1)$$

(3) $$g_{i+1} \le \partial_{i+1}^{-1} g_i \qquad (0 \le i \le [\tfrac{d}{2}] - 2)$$

(où ∂^{-1} a le sens donné au § 1 , avec $e = +\infty$) .

Montrons, d'après Stanley ([20]), que ces conditions sont nécessaires. Puisque P est un polytope simplicial, on peut bouger un peu ses sommets sans changer les $f_i(P)$ et se ramener au cas où $P \in K_M$ pour un choix convenable du réseau entier M dans $\mathbb{R}^d$. On peut donc associer à P une variété torique $X = X_{\Sigma_o}$ comme ci-dessus.

Soit $P^* = \{u \in \mathbb{R}^d / u(x) \le 1 \ \ \forall x \in P\}$ le polytope dual de P , qui vérifie les égalités $f_i(P^*) = f_{d-1-i}(P)$. La symétrie des conditions 1) à 3) ci-dessus fait que P les satisfait si et seulement si P^* les satisfait, et l'on peut donc supposer que P est cosimplicial. Posant $X = X_{\Sigma_o}$, on a d'après le dictionnaire l'égalité $\tilde{h}_i(P) = h_{d-i}(P^*)$ et la <u>dualité de Poincaré sur</u> X donne 1). On va montrer simultanément (2) et (3) comme ceci : Soit $L \in H^2(X,\mathbb{C})$ la classe d'une section hyperplane. Grâce au Théorème de Lefschetz vache, la multiplication par L est une injection $H^{2i}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2i+2}(X,\mathbb{C})$, pour $0 \le i \le [\frac{d}{2}] - 1$.

Soit $A = \bigoplus_{i=o}^{d} A_i$ l'algèbre graduée $\bigoplus_{i=o}^{d} H^{2i}(X,\mathbb{C})$, où les éléments de H^{2i} ont le degré i . Comme nous avons vu plus haut, A est engendré par ses éléments de degré 1 . Soit I l'idéal (homogène) de A engendré par L et $A_{[\frac{d}{2}]+1}$ et soit $R = A/I$.

On a $\dim_{\mathbb{C}} R_i = g^*_{i-1}$ $(1 \le i \le [\frac{d}{2}])$ d'où aussitôt l'inégalité (2). L'inégalité (3) résulte enfin du Théorème du § 1.

Remarque.- Il était connu (cf. [8]) que les équations (1), appelées équations de Dehn-Somerville engendrent toutes les relations linéaires entre les $f_i(P)$ pour un polytope simplicial P .

Pour montrer que la condition est suffisante, Billera et Lee dans [2] utilisent le fait que, si les $f_i(P)$ satisfont 1), 2), 3), d'après le théorème du § 1, la suite $(H(0), \ldots, H(d+1))$ provient d'un escalier de monômes, où $H(i) = h_i$ pour $0 \le i \le [\frac{d}{2}]$ et $H(i) = 0$ pour $[\frac{d}{2}]+1 \le i \le d+1$. Ils en déduisent qu'un certain sous-polytope Σ de dimension d, dont la construction est très ingénieuse, d'un polytope enveloppe convexe de $H(1)+d+1$ points distincts sur la courbe $(t,t^2,\ldots,t^{d+1})$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ a la suite donnée pour f-suite (comparer à [16] et [22]).

§ 4. Les inégalités isopérimétriques. (Voir [25], [26], [11])

Reprenons les notations de 2.2, et soient K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$. On se propose de démontrer les inégalités $v^2_{i-1} \ge v_i\, v_{i-2}$, $2 \le i \le d$, entre les volumes mixtes de K_1 et K_2 , définis par $\mathrm{Vol}(\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2) = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} v_i\, \nu_1^i\, \nu_2^{d-i}$.

Puisque les volumes mixtes sont des fonctions continues sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, et que l'on peut approximer arbitrairement les éléments de $\mathcal{K}$ par des éléments de $\mathcal{K}_M$, en prenant M assez serré, il suffit de prouver les inégalités pour K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}_M$. D'après le point 6), il suffit de prouver les inégalités $s^2_{i-1} \ge s_i\, s_{i-2}$ entre les degrés mixtes de deux faisceaux inversibles L_1 et L_2 sur une variété algébrique projective X , qui sont engendrés par leurs sections. Pour i fixé, en coupant par des hypersurfaces de X définies comme zéros de sections générales de L_1 et L_2 , on se ramène au cas où X est une surface, et l'inégalité est alors exactement le théorème de l'index de Hodge sur la surface. Des inégalités, dites "quadratiques" ci-dessus, on sait depuis Minkowski tirer les inégalités $v_i^d \ge v_o^{d-i}\, v_d^i$, et en particulier, prenant pour K_1 la boule unité de $\mathbb{R}^d$, et pour K un convexe compact, on calcule facilement $v_{d-1} = \frac{1}{d}\mathrm{Vol}(\partial K)$, et prenant $i=d-1$, il vient l'inégalité isopérimétrique classique $\mathrm{Vol}(\partial K)^d \ge d^d\, \mathrm{Vol}(\mathbb{B})\, \mathrm{Vol}(K)^{d-1}$.
Shepard a montré dans ([19], th. 4) que toute suite de nombres $(v_o,\ldots,v_d)$ vérifiant $v^2_{i-1} \ge v_i\, v_{i-2}$ était la suite des volumes mixtes d'un couple de convexes K_1,K_2 dans $\mathbb{R}^d$.

Dans le cercle d'idées de la théorie de Hodge, parce que reposant sur le théorème d'existence de Riemann, on a aussi le résultat suivant : soient X une surface projective, H un diviseur ample sur X et D un diviseur (de Cartier) sur X. Si $D.H > 0$ et $D^2 > 0$, pour ν assez grand $\dim |\nu D| > \varepsilon \nu^2$ avec $\varepsilon > 0$. A l'aide des points 2) et 5) du dictionnaire ce résultat se traduit dans la théorie des convexes compacts de $\mathbb{R}^2$ comme ceci (cf [26]) : soit

$$r(K_2 \,;\, K_1) = \mathrm{Sup}\{r / r.K_1 \subseteq K_2 \quad \text{à translation près}\}$$

Alors on a l'inégalité

$$r(K_2;K_1) \geq \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - v_o\, v_2}}{v_2} \qquad (\text{où } v_o = \mathrm{Vol}\, K_2 \,,\, v_2 = \mathrm{Vol}\, K_1$$

et v_1 est le volume mixte nouveau de K_1 et K_2).

En particulier le rayon r du plus grand disque inscriptible dans un convexe de surface S et de périmètre L dans $\mathbb{R}^2$ vérifie $r \geq \dfrac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}$.

Ces résultats étaient déjà connus, démontrés bien sûr par des méthodes différentes (cf [28]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.D. ALEKSANDROV - On the theory of mixed volumes, 4 articles dans Mat.Sbornik, tomes 44 (p. 947-972 et 1205 - 1238) et 45 (p. 27 - 46 et 227 - 251) en 1937. Traduit par J. Firey, Dept. of Math, Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331.

[2] L.J. BILLERA et C.W. LEE - Suffciency of Mc Mullen's condition for f-vectors of simplicial polytopes. Bulletin A.M.S. Vol. 2, n° 1 (1980) 181-185.

[3] G. CLEMENTS et B. LINDSTRÖM - A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay. Journ. Combinatorial Theory, 7 (1969) 230-238.

[4] V.I. DANILOV - The geometry of toric varieties. Russian Math Surveys 33, 2 (1978) 97-154. Traduit de Uspekhi Mat. Nauk 33, 2 (1978) 85-134.

[5] M. DEMAZURE - Sous groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Annales E.N.S. 4 ème série, t. 3 Fasc. 4 (1970).

[6] F. EHLERS - Eine Klasse komplexer Mannig **faltig** keiten ..., Math. Annalen, 218 (1975) 127-156.

[7] C. GREENE and D.J. KLEITMAN - Proof techniques in the theory of finite sets "M.A.A. Studies in Combinatories" G.C. Rota, editor. Math. Assoc. of America, Washington D.C. (1978).

[8] G. GRÜNBAUM - Convex Polytopes, Wiley ed.

[9] M. HOCHSTER - Cohen-Macaulay rings, Combinatorics and simplicial complexes. 2nd Oklahoma Ring Theory Conference, 171-223, Dekker 1978 .

[10] M. HOCHSTER - Rings of invariants of tori, Cohen - Macaulay rings generated by monomials, Annals of Math. 96 (1972) 318-337.

[11] A.G. HOVANSKI - Uspeki Mat. Nauk, 34, 4(208), p. 160-161.

[12] M.N. ISHIDA - Torus embeddings and dualizing complexes. Tohôku Math. Journal 2nd series Vol. 32 n° 1 (1980) 111-146.

[13] G. KEMPF et al. - Toroidal embeddings (Chap. 1), Springer Lecture Note 339.

[14] F.S. MACAULAY - Some properties of enumeration in the theory of modular systems. Proc. Lond. Math. Soc. 26 (1927) 531-555.

[15] P. Mc MULLEN - The maximum number of faces of a convex polytope. Mathematika 17 (1970) 179-184.

[16] T.S. MOTZKIN - Comonotone curves and Polyhedra Bull. Ann. Math. Soc. 63 (1957) 35.

[17] T. ODA - Torus embeddings and applications, Tata Institute, Bombay 1978.

[18] P. SHENZEL - On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius. Preprint, Martin-Luther Universität, Halle Wittenberg (R.D.R.) 1980.

[19] G.C. SHEPARD - Inequalities between mixed volumes Mathematika 7 (1960) 125 - 138.

[20] R. STANLEY - The number of faces of a simplicial convex polytope. Preprint, M.I.T. (1979).

[21] R. STANLEY - The Hilbert function of a graded algebra, Advanced in Math., 28 n°1, (1978) 57-83.

[22] R. STANLEY - The upper bound conjecture and Cohen Macaulay rings, Studies in Applied Math. 54 (1975) 135-142.

[23] R. STANLEY - Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property. S.I.A.M. Journal (1980).

[24] J.H.M. STEENBRINK - Mixed Hodge structure on vanishing cohomology, Real and complex singularities, Oslo 1976, Noordhoff 1977.

[25] B. TEISSIER - Du Théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques. C.R.A.S. Paris, tome 288 (29 Janvier 1979) 287-289.

[26] B. TEISSIER - Bonnesen type inequalities in algebraic geometry. Preprint, Harvard University et Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1979).

[27] B. TEISSIER - Jacobian polyhedra and equisingularity. Proceedings Conf. on singularities, R.I.M.S. Kyoto, April 1978. Publ. R.I.M.S. 1978.

[28] L.A. SANTALO - Integral geometry and geometric probability, Encyclopedia of of mathematics and its applications, Addison-Wesley 1976.

Bernard TEISSIER

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX