Astérisque

ROBIN HARTSHORNE

Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 592, p. 301-313
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__301_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 592 Juin 1982

GENRE DES COURBES ALGÉBRIQUES DANS L'ESPACE PROJECTIF
[d'après L. Gruson et C. Peskine]

par Robin HARTSHORNE

§ 0. Introduction

Soit $\mathbb{P}^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque. Soit C une courbe algébrique, lisse et connexe dans $\mathbb{P}^3$. A la courbe C on peut associer son *genre* $g = \dim H^1(C,\mathcal{O}_C)$ et son *degré* d, qui est le degré du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes \mathcal{O}_C$ sur C. Depuis le milieu du 19e siècle on considère le problème de classification des courbes dans l'espace projectif (voir [4, ch. IV § 6] et [5] pour discussion générale du problème). En particulier, on veut savoir quelles sont les paires d'entiers $\langle d,g \rangle$ pour lesquelles il existe une courbe C dans $\mathbb{P}^3$ de degré d et de genre g. La réponse est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 0.1.– *Soit* C *une courbe lisse, connexe de degré* $d > 0$ *dans l'espace projectif* $\mathbb{P}^3$.

a) *Si* C *est contenue dans un plan* $\mathbb{P}^2$, *on a*
$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$
et pour tout $d > 0$ *il existe une telle courbe.*

b) *Si* C *est contenue dans une surface quadratique* Q, *il existe deux entiers* $a, b \geq 0$ *tels que* $d = a+b$ *et* $g = (a-1)(b-1)$. *D'autre part, pour tous* $a, b > 0$ *il existe une telle courbe.*

c) *Si* C *n'est pas contenue dans une surface quadratique, on a*
$$0 \leq g \leq \frac{1}{6}\, d(d-3)+1 .$$

d) *Pour tout* $d > 0$ *et tout* g *satisfaisant à l'inégalité de* c), *il existe une courbe lisse connexe de degré* d *et de genre* g *dans* $\mathbb{P}^3$.

Les parties a) et b) du théorème sont classiques et élémentaires (voir, par exemple [4, ch. IV § 6]). La partie c) est due à Halphen [3] et a reçu une démonstration moderne par Gruson et Peskine [6][1]. La partie difficile est le théorème d'existence d). Dans la partie la plus compliquée de son mémoire [3], Halphen a prétendu démontrer d) en construisant de telles courbes sur des surfaces cubiques. Mais on sait maintenant d'après les travaux récents de Gruson et Peskine que pour $d \geq 10$, il y a des valeurs de g satisfaisant aux inégalités

[1] Voir Note A à la fin de l'exposé.

de c), qui n'apparaîssent pas comme genre d'une courbe de degré d sur une surface cubique, même en admettant des surfaces cubiques singulières. La première lacune de ce type est $\langle d,g\rangle = \langle 10,1\rangle$. Donc la démonstration de Halphen était fausse.

L'objet du présent exposé est de donner la solution récente de Gruson et Peskine [7] du problème d'existence d) cité plus haut, en démontrant les deux résultats suivants.

THÉORÈME 0.2.— *Pour tout* $d > 0$ *et tout* g *tels que*

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\, d^{3/2} - d + 1 < g \leq \frac{1}{6}\, d(d-3) + 1 \ ,$$

il existe une courbe lisse connexe de degré d *et de genre* g *sur une surface cubique non singulière dans* $\mathbb{P}^3$.

THÉORÈME 0.3.— *Pour tout* $d > 0$ *et tout* g *tel que*

$$0 \leq g \leq \frac{1}{8}(d-1)^2 \ ,$$

il existe une courbe lisse connexe de degré d *et de genre* g *sur une surface rationnelle quartique à droite double dans* $\mathbb{P}^3$.

Comme pour $d \geq 4$, tout entier g entre 0 et $\frac{1}{6}\, d(d-3) + 1$ vérifie l'hypothèse de (0.2) ou de (0.3), ces deux résultats entraînent le théorème (0.1, d). Dans les deux cas, la démonstration repose sur l'étude de courbes sur les surfaces rationnelles obtenues en faisant éclater des points de $\mathbb{P}^2$. Pour obtenir tous les degrés et genres voulus, il faut quelques résultats sur les entiers représentés par certaines formes quadratiques sur $\mathbb{Z}$. On démontre les théorèmes (0.2) et (0.3) dans les paragraphes 1 et 3. Dans les paragraphes 2 et 4 on donne les résultats nécessaires sur les formes quadratiques. Dans le paragraphe 5 on donne un théorème du type "Bertini" pour faire marcher la démonstration de Gruson et Peskine dans le cas de caractéristique $p > 0$.

Dans leur article [7], comme produit de leur étude de courbes sur les surfaces cubiques singulières, Gruson et Peskine ont donné de nouveaux exemples de composantes irréductibles non réduites du schéma de Hilbert des courbes dans $\mathbb{P}^3$, mais nous n'avons pas le temps d'en parler ici.

§ 1. Courbes sur les surfaces cubiques

Dans ce paragraphe on va démontrer le théorème (0.2). On sait qu'une surface cubique non singulière X dans $\mathbb{P}^3$ peut être obtenue en éclatant six points $P_1,\dots,P_6$ en position générale dans $\mathbb{P}^2$ et en utilisant le système linéaire des courbes cubiques dans $\mathbb{P}^2$ qui passent par les six points P_i pour la plonger dans $\mathbb{P}^3$ (voir par exemple [4, ch. V § 4]). Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ le morphisme d'éclatement, soit $\ell \in \operatorname{Pic} X$ la classe $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, et soit $e_i \in \operatorname{Pic} X$ la classe du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(P_i)$ pour $i = 1,\dots,6$. On prend alors $\ell,-e_1,\dots,-e_6$ comme base de Pic X et on note $(a;b_1,\dots,b_6)$ la classe $a\ell - \Sigma b_i e_i$, pour $a,b_1,\dots,b_6 \in \mathbb{Z}$.

On sait [4, V, 4.12 et Ex. 4.8] que si $a,b_1,\dots,b_6 \in \mathbb{Z}$ avec

$$\begin{gathered} a \geq b_1 + b_2 + b_3 \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_6 \geq 0 \end{gathered} \tag{1}$$

alors la classe $(a;b_1,\dots,b_6)$ contient une courbe irréductible non singulière C sur X de degré d et de genre g donnés par

$$\begin{gathered} d = 3a - \Sigma b_i \\ g = \frac{1}{2}(a^2 - \Sigma b_i^2 - d) + 1 , \end{gathered} \tag{2}$$

sauf si $(a;b_1,\dots,b_6) = (n;n,0,\dots,0)$ avec $n > 1$.

La démonstration qui suit est alors de la pure arithmétique, pour montrer qu'avec ces formules, on obtient toutes les valeurs de d et g voulues.

Pour commencer, pour tout élément $(a;b_1,\dots,b_6) \in$ Pic X , on définit

$$\begin{gathered} r = a - b_1 \\ \alpha_i = \frac{1}{2}r - b_i \qquad\qquad i = 2,\dots,6 . \end{gathered} \tag{3}$$

Alors $r \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On prend $d,r,\alpha_2,\dots,\alpha_6$ comme variables au lieu de $a,b_1,\dots,b_6$. On a donc

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{2}(d + \frac{3}{2}r - \Sigma\alpha_i) \\ b_1 = a - r \\ b_i = \frac{1}{2}r - \alpha_i \quad , \qquad i = 2,\dots,6 . \end{gathered} \tag{4}$$

Pour que $a , b_i \in \mathbb{Z}$ il faut supposer

$$\begin{gathered} \alpha_i \equiv \frac{1}{2}r \pmod{1} \qquad \text{pour } i = 2,\dots,6 \\ d + \frac{3}{2}r - \Sigma\alpha_i \equiv 0 \pmod{2} . \end{gathered} \tag{5}$$

D'autre part, les inégalités (1) se traduisent par

$$\begin{gathered} |\alpha_2| \leq \alpha_3 \leq \dots \leq \alpha_6 \leq \frac{1}{2}r \\ -\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_6 \leq d - \frac{3}{2}r . \end{gathered} \tag{6}$$

Finalement, le genre s'écrit

$$g = \frac{1}{2}((r-1)d - \frac{3}{4}r^2 - \Sigma\alpha_i^2) + 1 .$$

On définit donc

$$F_d(r) = \frac{1}{2}((r-1)d - \frac{3}{4}r^2) + 1$$

de façon que

$$g = F_d(r) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i^2 . \tag{7}$$

Notre problème, donc, pour d donné, est de trouver un entier r et des demi-entiers α_i , satisfaisant aux congruences (5) et aux inégalités (6), pour obtenir tous les genres voulus avec la formule (7). La fonction $F_d(r)$ prend son maximum pour $r = \frac{2}{3}d$, et $F_d(\frac{2}{3}d) = \frac{1}{6}d(d-3)+1$. Donc pour $d \equiv 0 \pmod{3}$, ce maximum est atteint, en prenant tous les α_i égaux à 0 . Pour les autres valeurs de g , si g est dans l'intervalle $(F_d(r-1), F_d(r)]$, l'existence d'un tel diviseur est réduite à un problème de somme de cinq carrés $\Sigma\, \alpha_i^2$. Voici le résultat.

Lemme 1.1.— *Soit* $d > 0$ *un entier. Soit* r *un entier tel que*

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{d} - \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}d$$

et soit g *un entier tel que*

$$F_d(r-1) < g \leq F_d(r) .$$

Alors il existe $\alpha_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $i = 2,\ldots,6$, *satisfaisant à* (5) *et* (6), *tel que* g *soit donné par* (7).

Démonstration.— Notons que

$$F_d(r) - F_d(r-1) = \frac{1}{2}(d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4}) .$$

Donc on a

$$F_d(r) - g < \frac{1}{2}(d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4}) ,$$

et on veut exprimer

$$F_d(r) - g = \frac{1}{2}\,\Sigma\alpha_i^2 .$$

On distingue deux cas, suivant la parité de r .

Si r est pair, on a $F_d(r) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Alors $n = 2(F_d(r) - g)$ est un entier, et on cherche des entiers α_i avec $|\alpha_i| \leq \frac{1}{2}r$ tels que $n = \Sigma\, \alpha_i^2$. On a par hypothèse $n < d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4}$. D'autre part, on a supposé $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{d} - \frac{1}{3} \leq r$. Donc on a $n < \frac{3}{4}r^2 - r + \frac{5}{6}$. Alors la proposition (2.1) ci-dessous entraîne qu'il existe des entiers α_i , $i = 2,\ldots,6$ avec $|\alpha_i| \leq \frac{1}{2}r$ et $n = \Sigma\alpha_i^2$.

Il faut encore vérifier les congruences (5) et les inégalités (6). Puisque g est un entier, on a

$$(r-1)d - \frac{3}{4}r^2 - \Sigma\alpha_i^2 \equiv 0 \pmod{2} ,$$

ce qui entraîne

$$d + \frac{3}{4}r - \Sigma\alpha_i \equiv 0 \pmod{2} .$$

On peut évidemment ajuster l'ordre et les signes des α_i de façon à satisfaire la première inégalité de (6). Et puisque

$$\Sigma\alpha_i^2 = n \leq d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4}$$

il est évident que

$$-\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_6 \leq d - \frac{3}{2}r .$$

Supposons maintenant r impair. Dans ce cas $F_d(r) \in \frac{1}{8}\mathbb{Z}$. On prend $n = 8(F_d(r) - g)$ et on veut exprimer $n = \sum_{i=2}^{6} x_i^2$ avec $x_i = 2\alpha_i$ des entiers impairs tels que $|x_i| \leq r$. On voit tout de suite que $n \equiv 5 \pmod{8}$. D'autre part, on a par hypothèse $n < 3r^2 - 4r + \frac{10}{3}$ comme plus haut. Alors le corollaire (2.2) ci-dessous entraîne l'existence des entiers impairs x_i avec $|x_i| \leq r$

tels que $n = \Sigma x_i^2$, et on prend $\alpha_i = \frac{1}{2}x_i$. La première inégalité de (6) fixe l'ordre des α_i et le signe de $\alpha_3,\ldots,\alpha_6$. Le signe de α_2 est fixé par la deuxième congruence de (5). Il reste à vérifier la deuxième inégalité de (6), soit

$$- x_2 + x_3 + \ldots + x_6 \leq 2d - 3r .$$

Puisque $n < 4d - 6r + 3$ et $n \equiv 5 \pmod{8}$, on a en fait $n \leq 4d - 6r - 1$. D'autre part, $n = \Sigma x_i^2$, donc il suffit de montrer

$$- x_2 + x_3 + \ldots + x_6 \leq \frac{1}{2} \Sigma x_i^2 + \frac{1}{2}$$

ce qui s'écrit aussi

$$(x_2 + 1)^2 + \sum_{i=3}^{6} (x_i - 1)^2 - 4 \geq 0 .$$

Pour les x_i tous impairs, ceci est vrai sauf pour $(x_2,\ldots,x_6) = (-1,1,1,1,1)$. On a quand même

$$- x_2 + x_3 + \ldots + x_6 \leq 2d - 3r$$

sauf si $2d - 3r = 1$ ou 3 . Dans le premier cas il n'y a pas de $n \equiv 5$ avec $n \leq 4d - 6r -1$; dans le deuxième cas la deuxième congruence de (5) est en défaut. Ceci démontre le lemme.

<u>Démonstration du théorème (0.2)</u>. Soit $d > 0$, et soit r_0 le plus petit entier $\geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d} - \frac{1}{3}$. Alors d'après le lemme (1.1), pour tout entier g tel que

$$F_d(r_0 - 1) < g \leq \frac{1}{6}d(d - 3) + 1$$

il existe sur la surface cubique non singulière X dans $\mathbb{P}^3$ une courbe irréductible non singulière de degré d et de genre g . Soit $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d} + 1$. On a évidemment $\rho > r_0$, donc on obtient tout g satisfaisant à

$$F_d(\rho - 1) < g \leq \frac{1}{6} d(d - 3) + 1 .$$

On a $F_d(\rho - 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} d^{3/2} - d + 1$, d'où le théorème.

Remarques.— 1) La borne inférieure pour g dans le théorème (0.2) n'est pas la meilleure possible, mais la distribution des lacunes est assez irrégulière, donc on ne peut pas espérer trouver une formule pour la plus grande lacune. Néanmoins, pour d grand, Gruson et Peskine montrent que la plus grande lacune est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{5}} d^{3/2} + O(d^{5/4})$.

2) Dans leur article, Gruson et Peskine donnent une réciproque au lemme (1.1) qui leur permet de calculer, pour un degré donné, la liste des lacunes, c'est-à-dire les valeurs de g satisfaisant à $0 \leq g \leq \frac{1}{6} d(d - 3) + 1$ qui n'apparaîssent pas comme genre d'une courbe sur la surface cubique X . Ils vérifient aussi, que tout $\langle d,g\rangle$ qui apparaît comme degré et genre d'une courbe lisse sur une surface cubique singulière, peut aussi être réalisé sur une surface cubique non singulière.

§ 2. Sommes de cinq carrés

PROPOSITION 2.1.— *Soit* $k>0$ *un entier. Alors tout entier positif* $n < 3k^2 - 2k + 3$ *est somme de cinq carrés* $n = \sum_{i=1}^{5} x_i^2$ *d'entiers* x_i *avec* $|x_i| \leq k$.

On va utiliser le théorème de Gauss [8, p. 79] qui dit qu'un entier positif n est somme de 3 carrés si et seulement si n n'est pas de la forme $4^a(8b-1)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Pour démontrer la proposition, supposons d'abord que $n < (k+1)^2$. Si n est la somme de 3 carrés $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, on a nécessairement $|x_i| \leq k$ pour tout i , donc on a gagné. Sinon, on écrit $n = 4^a m$ avec $m \equiv 7 \pmod{8}$. Alors $m-1$ est somme de 3 carrés, donc n est somme de 4 carrés d'entiers nécessairement $\leq k$.

Si $k^2 \leq n < k^2 + (k+1)^2$, le même argument s'applique à $n - k^2$, donc n est la somme de 4 ou de 5 carrés d'entiers x_i avec $|x_i| \leq k$.

Supposons maintenant $n > 2k^2$. On écrit $n = 2k^2 + m$. Si m est somme de 3 carrés et $m < (k+1)^2$, on a gagné comme plus haut. Sinon, $m = 4^a(8b-1)$, donc $m \equiv 0,4,7 \pmod{8}$. On écrit alors $n = 2(k-1)^2 + m'$, où $m' = m + 4k - 2$. Alors $m' \equiv 1,2,5,6 \pmod{8}$, donc m' est somme de 3 carrés, et si $m' < (k+1)^2$, c'est-à-dire $n < 3k^2 - 2k + 3$, on a le résultat voulu.

COROLLAIRE 2.2.— *Soit* $k > 0$ *un entier impair. Alors tout entier positif* $n \equiv 5 \pmod{8}$ *avec* $n < 3k^2 + 2k + 1$ *est somme de cinq carrés* $n = \sum_{i=1}^{5} x_i^2$ *d'entiers impairs* x_i *avec* $|x_i| \leq k$.

On utilise la même méthode, mais c'est plus facile. On peut écrire un tel n sous la forme $1+1+m$ ou $1 + k^2 + m$ ou $k^2 + k^2 + m$ avec $0 < m < (k+1)^2$ et $m \equiv 3 \pmod{8}$. Alors m est somme de 3 carrés d'entiers $\leq k$, nécessairement impairs.

Remarque.— Gruson et Peskine démontrent, avec un argument nettement plus compliqué, que (2.1) reste valable pour tout $n \leq 3k^2 + 2$. Ceci est le meilleur résultat possible, parce que 78 n'est pas somme de 5 carrés d'entiers ≤ 5 . D'autre part, pour k grand, ils démontrent un résultat analogue pour $n \leq 5k^2 - O(k^{3/2})$.

§ 3. Courbes sur une surface quartique

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème (0.3). L'idée de la démonstration est de construire une surface quartique singulière dans $\mathbb{P}^3$ comme image d'une surface rationnelle S obtenue en éclatant neuf points de $\mathbb{P}^2$. On étudie les courbes sur S et leurs images dans $\mathbb{P}^3$. Mais cette fois, au lieu de déterminer explicitement les classes de diviseurs sur S qui contiennent une courbe non singulière, comme dans le cas de la surface cubique, on construit seulement quelques courbes explicites sur S, et ensuite on fait opérer un certain groupe d'automorphismes de $\mathrm{Pic}\, S$. L'étude de ce groupe est faite dans le paragraphe 4.

Pour commencer, on prend 9 points $P_1,\ldots,P_9$ dans $\mathbb{P}^2$ en *position générale*. En particulier, on suppose qu'ils ont la propriété suivante :

(*) Il existe une unique courbe cubique Γ_0 qui contient $P_1,\ldots,P_9$; la courbe Γ_0 est non singulière, et les classes de $P_1,\ldots,P_9$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\mathcal{O}_{\Gamma_0}$ dans $\mathrm{Pic}\,\Gamma_0$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$.

Cette condition est évidemment réalisable sur un corps de base k non dénombrable[2].

Soit $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement des 9 points $P_1,\ldots,P_9$. Alors $\mathrm{Pic}\, S \cong \mathbb{Z}^{10}$, et on peut prendre comme base orthogonale les éléments $\ell = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ et $-e_i$ où e_i est la classe de la droite exceptionnelle $E_i = \pi^{-1}(P_i)$. Alors $\ell^2 = 1$ et $e_i^2 = -1$.

Soit Γ la transformée propre de Γ_0. Alors $\Gamma = (3;1,1,\ldots,1)$ dans $\mathrm{Pic}\, S$, et la classe canonique $\omega = \omega_S$ est égale à $-\Gamma$. Soit C la transformée propre d'une droite passant par P_1. Alors $C = (1;1,0,\ldots,0)$ dans $\mathrm{Pic}\, S$.

PROPOSITION 3.1.— *Le système linéaire complet* $|C+\Gamma|$ *est de dimension* 3 *et sans points bases, donc définit un morphisme* $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^3$. *L'image* X *de* φ *est une surface quartique. La restriction de* φ *à* Γ *est un morphisme fini de degré* 2 *de* Γ *sur une droite* $L \subseteq X$, *avec quatre points de ramification* $Q_1,\ldots,Q_4 \in \Gamma$. *La restriction de* φ *à* $S-\Gamma$ *est un isomorphisme sur* $X-L$. *L'application tangente* $T_\varphi : T_{S,x} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^3,\varphi(x)}$ *est injective pour tout* $x \in S$, *sauf aux points* Q_i. *Si* $Y \subseteq S$ *est une courbe non singulière,* $Y \neq \Gamma$, *une condition suffisante pour que* $\varphi(Y)$ *soit non singulière est que* Y *ne contienne aucun des points* Q_i, *et que l'ensemble* $Y \cap \Gamma$ *ne contienne aucune paire de points de l'involution sur* Γ *définie par* φ_Γ.

Il est facile de voir que le système linéaire $|C|$ n'a pas de points bases, donc que le faisceau $\mathcal{O}(C)$ est engendré par ses sections. On a aussi $H^1(\mathcal{O}(C)) = 0$. Donc de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(C) \longrightarrow \mathcal{O}(C+\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma) \longrightarrow 0$$

et du fait que $\mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma)$ est de degré 2 sur Γ, donc engendré par ses sections, on déduit que $\mathcal{O}(C+\Gamma)$ est engendré par ses sections et $\dim H^0(\mathcal{O}(C+\Gamma)) = 4$. Ceci nous donne le morphisme $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^3$. Comme $\mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma)$ est de degré 2 sur Γ, la restriction φ_Γ donne un morphisme de degré 2 de Γ sur un $\mathbb{P}^1$, plongé comme droite $L \subseteq \mathbb{P}^3$, donc avec quatre points de ramification $Q_1,\ldots,Q_4$. D'autre part, on vérifie par les moyens usuels que φ sépare les points de S sauf pour les paires de l'involution φ_Γ, et que φ sépare les vecteurs tangents en chaque point de S différent de $Q_1,\ldots,Q_4$. Les autres assertions de la proposition en

[2] Voir Note B à la fin de l'exposé.

résultent.

PROPOSITION 3.2.— a) *Pour tout* $n \geq 0$ *, le système linéaire* $|C + n\Gamma|$ *est sans points bases, et contient une courbe irréductible non singulière* Y *de genre* $g = 2n$.

b) *Soit* B *la réunion des deux droites exceptionnelles* E_8 *et* E_9 *. Pour tout* $n \geq 1$ *le système linéaire* $|B + n\Gamma|$ *est sans points bases, et contient une courbe irréductible non singulière* Y *de genre* $g = 2n-1$.

En effet, on démontre par récurrence sur n que $\mathcal{O}(C+n\Gamma)$ et $\mathcal{O}(B+n\Gamma)$ sont engendrés par leurs sections et que $H^1(\mathcal{O}(C+n\Gamma)) = H^1(\mathcal{O}(B+n\Gamma)) = 0$. Pour commencer la récurrence pour B , il faut voir que $|B + \Gamma|$ n'a pas de points bases, ce qui est conséquence du fait que les cubiques dans $\mathbb{P}^2$ passant par 7 points en position générale donnés n'ont aucun autre point en commun [4, V, 4.3]. Ensuite, si la caractéristique du corps de base k est zéro, on applique le théorème de Bertini pour trouver une courbe Y non singulière (et irréductible à cause de l'annulation d'un certain H^1). Le genre se calcule avec la formule d'adjonction sur S . Pour le cas de $\mathrm{Car}.k = p > 0$, voir (5.1) ci-dessous.

Nous arrivons maintenant à une des idées centrales de la démonstration. Soit G le groupe d'isométries de $\mathrm{Pic}\, S$ qui laissent fixe ω . On va utiliser G pour construire beaucoup de courbes sur S .

Lemme 3.3.— *Si* $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ *est une des droites exceptionnelles sur* S *, et si* $\sigma \in G$ *, alors la classe* $\sigma(E_i)$ *contient une courbe irréductible rationnelle* E *avec* $E^2 = -1$.

Démonstration.— On a évidemment $\sigma(E_i)^2 = -1$ et $\sigma(E_i).\omega = -1$. Alors le théorème de Riemann-Roch sur S entraîne $h^0(\mathcal{O}(\sigma(E_i))) > 0$. Soit $D \in |\sigma(E_i)|$ un diviseur effectif. Puisque $\Gamma = -\omega$ on a $D.\Gamma = 1$. Donc on peut écrire $D = D_1 + \sum_{i=2}^{r} D_i$ où les courbes D_i sont irréductibles, $D_1.\Gamma = 1$ et $D_i.\Gamma = 0$ pour $i > 1$. Si D_i est irréductible, $D_i \neq \Gamma$, et $D_i.\Gamma = 0$, alors l'image $\pi(D_i)$ dans $\mathbb{P}^2$ ne rencontre Γ qu'aux points $P_1,\ldots,P_9$. Mais ceci est impossible vu l'hypothèse de position générale (*) qu'on a fait sur les P_i . Donc $D = D_1 + r\Gamma$ avec $r \geq 0$. Puisque D_1 est irréductible, la formule d'adjonction entraîne $D_1^2 \geq -1$. D'autre part $-1 = D^2 = D_1^2 + 2r$. Donc $r = 0$, $D = D_1$ est irréductible, rationnelle, donc non singulière.

COROLLAIRE 3.4.— *Soit* $\sigma \in G$ *. Alors il existe un morphisme* $\pi' : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ *, où* π' *est l'éclatement de neuf points* $P'_1,\ldots,P'_9$ *satisfaisant à l'hypothèse de position générale* (*), *tel que* $\pi'^{-1}(P'_i) = \sigma(E_i)$ *pour tout* i *, et* $\pi'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \sigma(\ell)$.

En effet, d'après le lemme, les classes $\sigma(E_i)$ contiennent des droites exceptionnelles E'_i , nécessairement disjointes. Si on contracte les E'_i on obtient une surface isomorphe à $\mathbb{P}^2$. L'image Γ'_0 de Γ contient les points éclatés P'_i , donc on a (*), et puisque G respecte ω on a nécessairement $\pi'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \sigma(\ell)$.

THÉORÈME 3.5.— *Pour tout* $d \geq 3$ *et pour tout* g *tel que* $0 \leq g \leq d-3$, *il existe une courbe irréductible non singulière* Y *de genre* g *sur* S *telle que* $\varphi(Y)$ *soit non singulière et de degré* d *dans* $\mathbb{P}^3$.

Démonstration.— Soit $n \geq 0$ un entier. On a vu (3.2) que le système linéaire $|C + n\Gamma|$ contient une courbe irréductible non singulière de genre $g = 2n$. Soit alors $\sigma \in G$. En appliquant le résultat de (3.2) à la surface S , considérée comme étant construite par le morphisme π' de (3.4), on voit de même que la classe $\sigma(C + n\Gamma)$ contient une courbe irréductible non singulière Y de genre $g = 2n$. Le degré d de l'image $\varphi(Y)$ dans $\mathbb{P}^3$ est

$$d = (C+\Gamma).(\sigma(C+n\Gamma)) = C.\sigma(C) + 2n + 2 ,$$

compte tenu du fait que $\sigma(\Gamma) = \Gamma$, et $C.\Gamma = 2$.

D'autre part, $Y.\Gamma = 2$, et à cause de l'hypothèse de position générale (*), l'application $\operatorname{Pic} S \longrightarrow \operatorname{Pic} \Gamma$ définie par l'intersection avec Γ est injective. Donc les deux points $Y.\Gamma$ de Γ ne peuvent être une paire de l'involution φ_Γ que si $Y = C + \Gamma$ dans $\operatorname{Pic} S$. On voit tout de suite que ceci a lieu seulement si $n = 1$ et $\sigma(C) = C$. Si on suppose donc que $C.\sigma(C) > 0$, d'après (3.1), l'image $\varphi(Y)$ sera non singulière.

En appliquant finalement le résultat (4.5) ci-dessous, on voit que lorsque σ varie dans G , l'intersection $C.\sigma(C)$ prend toutes les valeurs entières non négatives. De cette façon on obtient des courbes Y sur S de tout genre $g \geq 0$ pair, et dont l'image $\varphi(Y)$ dans $\mathbb{P}^3$ est non singulière de tout degré $d \geq g+3$.

Pour les genres impairs, on prend $n > 0$ et on fait un raisonnement analogue avec $Y \in |\sigma(B+n\Gamma)|$.

Démonstration de (0.3). Le théorème (3.5) nous donne déjà des cas particuliers de (0.3). Pour terminer, il faut un petit travail supplémentaire. Pour des entiers d_0, g_0 tels que $0 \leq g_0 \leq d_0 - 3$, soit Y_0 sur S une courbe donnée par (3.5). Pour un entier $r \geq 0$, on considère le système linéaire $|Y_0 + r(C+\Gamma)|$. Il est sans points bases puisque $|Y_0|$ et $|r(C+\Gamma)|$ le sont, donc contient une courbe non singulière Y , qu'on voit facilement être irréductible (voir (5.1) pour le cas de $\operatorname{Car}.k = p > 0$). On calcule $d = \deg \varphi(Y)$ et $g = \text{genre } Y$:

$$d = d_0 + 4r$$
$$g = g_0 + r(d + 2r - 1)$$

et un argument élémentaire montre que pour Y générale dans le système linéaire, $Y \cap \Gamma$ ne contient par de paire pour l'involution φ_Γ , donc $\varphi(Y)$ est non singulière dans $\mathbb{P}^3$.

On peut écrire d_0, g_0 comme fonction de d, g :

$$d_0 = d - 4r$$
$$g_0 = g - r(d - 2r - 1) ,$$

et l'inégalité $0 \leq g_0 \leq d_0 - 3$ s'écrit alors

$$r(d-2r-1) \leq g \leq (r+1)(d-2r-3) \ .$$

Si on pose

$$F_d(r) = (r+1)(d-2r-3)$$

l'inégalité pour g s'écrit encore

$$F_d(r-1) \leq g \leq F_d(r) \ .$$

Donc pour un d, $r \geq 0$ donné, on obtient toutes ces valeurs de g. Pour $r=0$ on retrouve l'intervalle $0 \leq g \leq d-3$. Le maximum de $F_d(r)$ s'obtient pour $r = \frac{1}{4}(d-5)$ et vaut $F_d(\frac{1}{4}(d-5)) = \frac{1}{8}(d-1)^2$. Donc pour $d \equiv 1 \pmod 4$ on obtient toute valeur de g entre 0 et $\frac{1}{8}(d-1)^2$. Pour $d \equiv 0,2,3 \pmod 4$ un petit calcul montre que le maximum de la fonction $F_d(r)$ pour r entier est toujours $[\frac{1}{8}(d-1)^2]$, ce qui démontre le théorème (0.3).

§ 4. Étude d'une forme quadratique sur $\mathbb{Z}^{10}$

Soit V le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{10}$, avec une base $e_0, e_1, \ldots, e_9$, et soit Q la forme quadratique $x_0^2 - \sum_{i=1}^{9} x_i^2$ sur V. Soit $(\ .\ )$ le produit scalaire associé, donc $e_0^2 = 1$, $e_i^2 = -1$ pour $i = 1,\ldots,9$, et $(e_i . e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Soit ω le vecteur $(-3;-1,-1,\ldots,-1)$. On note que $\omega^2 = 0$. Soit $H \subseteq V$ l'hyperplan $\omega^\perp$ des vecteurs orthogonaux à ω.

Lemme 4.1.— *Il y a des éléments* $r_1, r_2, \ldots, r_8$, *de* V *tels que*

a) $\omega, r_1, r_2, \ldots, r_8, e_9$ *forment une base de* V,

b) $\omega, r_1, \ldots, r_8$ *forment une base de* H,

c) $r_i^2 = -2$, $(r_i . r_j) = 0$ *sauf si* $(i,j) \in I = \{(2,3),(3,4),\ldots,(7,8),(1,4)\}$ *et dans ce cas* $(r_i . r_j) = 1$.

d) *En particulier, le sous-espace engendré par* $r_1, \ldots, r_8$ *est un groupe abélien libre de rang* 8 *avec une forme quadratique définie, négative, paire, isomorphe à l'opposée de la forme* Γ_8 [8, p. 88].

En effet, il suffit de prendre $r_1 = (1;1,1,1,0,\ldots,0)$, $r_2 = (0;-1,1,0,\ldots,0)$, $r_3 = (0;0,-1,1,0,\ldots,0)$, ..., $r_8 = (0;0,0,\ldots,0,-1,1,0)$. On vérifie immédiatement les propriétés a), b), et c). Pour d) il suffit de comparer la matrice d'intersection des r_i avec celle donnée dans [8, p. 89] pour Γ_8 (où r_1 et r_2 sont permutés).

Soit maintenant G le groupe d'isométries de V qui laissent fixe ω ; soit G_H le groupe d'isométries de H laissant fixe ω ; soit G_W le groupe d'isométries de $W = H/(\omega)$; et soit finalement $G_{\overline{W}}$ le groupe d'isométries de $\overline{W} = W/2W$ avec la forme quadratique $\overline{Q} = \frac{1}{2}Q(x) \pmod 2$ induite.

Lemme 4.2.— a) *La restriction* $G \longrightarrow G_H$ *est un isomorphisme.*

b) *L'homomorphisme naturel* $G_H \longrightarrow G_W$ *est surjectif, et son noyau est isomorphe au groupe de transvections* $x \longmapsto x - (x.z)\omega$, *pour* $x, z \in H$.

c) *La restriction* $G_W \to G_{\overline{W}}$ *est surjective de noyau* $\{\pm 1\}$

En effet, on sait que G_W est le groupe de Weyl E_8, engendré par les réflexions $\sigma_i : x \longmapsto x + (x,r_i)r_i$ par rapport aux racines $r_1,\dots,r_8$ [2, ch. VI]. D'autre part, on vérifie que la forme quadratique $\overline{Q}$ sur $\overline{W}$ est isomorphe à la forme $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + x_7x_8$ sur $\mathbb{F}_2$. On démontre c) en comparant les ordres (connus) de G_W et $G_{\overline{W}}$ [2, ch. VI, ex. 4.1, p. 228].

Puisque H est la somme directe orthogonale de W et de (ω), il est évident que $G_H \to G_W$ est surjectif. Si $\sigma \in G_H$ donne l'identité sur W, alors pour tout $x \in H$, $\sigma(x) = x - \varphi(x)\omega$ où φ est une forme linéaire sur H, donc $\varphi(x) = (x.z)$ pour un $z \in H$ convenable. Ceci démontre b).

On voit facilement que $G \to G_H$ est injectif. Pour la surjectivité, on remarque que les réflexions σ_i par rapport aux r_i se relèvent telles quelles à V, donc $G \to G_W$ est surjectif. D'autre part, la transvection $x \longmapsto x - (x.z)\omega$ peut être relevée à V par la formule, pour $x \in V$,

$$\tau_z(x) = x - (x.z)\omega + (x.\omega)z - \frac{1}{2}(z.z)(x.\omega)\omega$$

où $\frac{1}{2}(z.z) \in \mathbb{Z}$ puisque Q_W est une forme quadratique paire.

PROPOSITION 4.3.— *Les éléments* $x \in V$ *tels que* (i) $x^2 = 0$, (ii) $x.\omega = -2$, (iii) $\overline{x} \not\equiv 0$ (mod. ω) *dans* $\overline{V} = V/2V$, *forment une seule orbite sous l'action de* G.

Démonstration.— Soient x et y deux tels éléments. Alors $\overline{x}$ et $\overline{y}$ (mod. ω) sont des éléments non-nuls isotropes de $\overline{W}$. D'après le théorème de Witt sur $\mathbb{F}_2$ [1] il existe un élément de $G_{\overline{W}}$, et donc un élément de G, qui envoie $\overline{x}$ sur $\overline{y}$. Donc on peut supposer $\overline{x} = \overline{y}$. Alors on peut écrire $y = x - 2z + \lambda\omega$ avec $z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$. D'autre part, $\tau_z(x) = x - 2z + \mu\omega$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$. Mais $y^2 = \tau_z(x)^2 = 0$ entraîne $\lambda = \mu$, donc $y = \tau_z(x)$.

Remarques.— Si on laisse tomber la condition (iii), le même argument montre qu'il y a une autre orbite des éléments x tels que $x^2 = 0$, $x.\omega = -2$ et $\overline{x} \equiv 0$ (mod. ω). Comme corollaire on en déduit que G opère transitivement sur les *droites exceptionnelles*, c'est-à-dire les éléments $e \in V$ tels que $e^2 = -1$, $e.\omega = -1$. En effet, pour un tel e, l'élément $x = 2e - \omega$ satisfait à $x^2 = 0$, $x.\omega = -2$, $\overline{x} \equiv 0$ (mod. ω).

Lemme 4.4.— *Pour tout entier* $n > 0$ *il existe* $x \in W$ *tel que* $n = -\frac{1}{2}(x.x)$, *et on peut même demander que* $\overline{x} \neq 0$ *dans* $\overline{W}$.

Soit on applique une formule générale [8, p. 176] qui donne le nombre de représentations d'un entier pair par Γ_8, soit on le voit directement comme suit. Si $x = x_2r_2 + x_4r_4 + x_6r_6 + x_8r_8$, alors $-\frac{1}{2}(x.x) = x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 + x_8^2$, et comme tout entier positif est somme de 4 carrés, on a gagné. Si $\overline{x} = 0$, donc tous les x_i pairs, alors $n \equiv 0$ (mod. 4), et on prend $x' = x_2r_2 + 2r_1 + r_4 + x_6r_6 + x_8r_8$. Alors $-\frac{1}{2}(x'.x') = x_2^2 + x_6^2 + x_8^2 + 3$. Comme

$n-3 \equiv 1,5 \pmod{8}$, il est somme de 3 carrés, et on a $\bar{x}' \neq 0$.

PROPOSITION 4.5.— *Soient* $c = (1;1,0,\dots,0)$ *et* $b = (0;0,0,\dots,0,-1,-1)$. *Alors les intersections* $(c.\sigma(c))$ *et* $(b.\sigma(c))$ *prennent toutes les valeurs entières non négatives lorsque* σ *varie dans* G.

Démonstration.— Etant donné $n > 0$, choisissons $x \in H$ tel que $-\frac{1}{2}(x.x) = n$ et $\bar{x} \neq 0$ dans $\bar{W}$. D'après le théorème de Witt sur $\mathbb{F}_2$, quitte à remplacer x par son image par un élément de G, on peut supposer que $\bar{c} + \bar{x}$ est isotrope et non nul dans $\bar{W}$. Ceci entraîne que $(c+x)^2 \equiv 0 \pmod{4}$. On prend alors $c' = c + x + \frac{1}{4}(c+x)^2\omega$. On vérifie d'une part que c' satisfait aux hypothèses de (4.3), donc $c' = \sigma(c)$ pour un $\sigma \in G$, et d'autre part $(c.c') = n$.

Pour montrer que $(b.\sigma(c))$ prend toutes les valeurs, on prend x comme plus haut, et on peut supposer $\bar{b} + \bar{x}$ isotrope et non nul. Alors $c' = b + x + \frac{1}{4}(b+x)^2\omega$ est égal à $\sigma(c)$ pour un $\sigma \in G$ et $(b.c') = n-1$.

§ 5. Théorème de Bertini

Dans leur article [7], Gruson et Peskine ont supposé que le corps de base k était de caractéristique 0, pour pouvoir utiliser le théorème de Bertini dans les démonstrations de (3.2) et (0.3), qui dit qu'un système linéaire sans points bases contient un diviseur non singulier (voir par exemple [4, III, 10.9]). Ce résultat n'est plus valable en caractéristique $p > 0$, mais nous donnons ici un théorème du type Bertini, qui est valable en toute caractéristique, et qui suffit pour cette application.

Soit X une variété projective non singulière, soit $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ un morphisme, et pour tout $x \in X$, soit $T_{\varphi,x} : T_{X,x} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n,\varphi(x)}$ l'application tangente. Pour tout i, soit

$$\Sigma_i = \{x \in X \mid \dim \operatorname{Ker} T_{\varphi,x} \geq i\}.$$

Nous dirons qu'un système linéaire sans points bases sur X est *presque très ample* si le morphisme $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ associé a la propriété que pour tout $i > 0$, $\operatorname{codim}(\Sigma_i, X) \geq i$. Évidemment un système linéaire très ample est presque très ample.

THÉORÈME 5.1.— *Soit* X *une variété projective non singulière, et soit* $\mathcal{S}$ *un système linéaire presque très ample. Alors il existe un ouvert de Zariski non vide* $U \subset \mathcal{S}$ *tel que tout* $D \in U$ *soit un diviseur réduit non singulier (pas nécessairement irréductible).*

La démonstration est la même que pour les systèmes linéaires très amples [4, II, 8.18]. Il suffit de considérer le sous-ensemble $B \subset X \times \mathcal{S}$ des paires $\langle x,D \rangle$ tel que D soit singulier en x, et par un calcul local de vérifier que $\dim B < \dim \mathcal{S}$.