Jean-Louis Verdier

# Les représentations des algèbres de Lie affines : applications à quelques problèmes de physique

*Astérisque*, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki, exp. nº 596, p. 365-377
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__365_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 596 Juin 1982

# LES REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE AFFINES : APPLICATIONS À QUELQUES PROBLÈMES DE PHYSIQUE
[d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa]

par Jean-Louis VERDIER

## 1. Introduction

Des travaux récents ont permis d'établir des liens entre la théorie des algèbres de Kac-Moody et ses généralisations [6], la théorie des modèles duaux d'interaction entre champs ou particules [9], la théorie des équations d'évolutions non linéaires telles que les équations de Kadomtsev-Petviashvili (K.P.) ou de Korteweg-De Vries (KdV) [2].

En théorie des modèles duaux s'introduisent naturellement des opérateurs différentiels d'ordre infini agissant sur des fonctions qu'on interprète comme des valeurs moyennes sur le vide. Les algèbres de Lie engendrées par ces opérateurs sont de dimension infinie et on obtient ainsi par exemple des représentations de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $S^1$. Dans [7], à la suite de travaux sur le cas $A_1^{(1)}$ [8], on montre qu'on peut réaliser avec ses opérateurs la représentation fondamentale des algèbres de Lie affines.

Il existe d'autres manières de réaliser ces représentations et notamment, dans le cas des algèbres de type $A_n^{(1)}$, on peut réaliser ces représentations dans un espace de Fock par des opérateurs de Clifford. Cette réalisation a l'avantage de s'intégrer facilement à un groupe $G$ convenable. Lorsqu'on dispose des opérateurs d'entrelacement on peut alors décrire l'opération de $G$ sur une algèbre de polynômes ou une complétion convenable de cette algèbre. Les fonctions $\tau_g = g.1$ pour $g \in G$, possèdent des propriétés remarquables. Elles permettent de résoudre les équations K.P. ou Kdv et de décrire les solutions solitons de ces équations [2]. Ces fonctions sont des analogues formelles des fonctions $\vartheta$ sur les jacobiennes de courbes [1].

Il s'agit donc d'un chapitre de théorie formelle de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'apparition de symétries (cachées) engendrant un groupe de Kac-Moody est surprenante et demande à être mieux comprise.

Enfin signalons que les algèbres de Kac-Moody interviennent dans d'autres parties de la physique notamment en théorie de la gravitation ou de la super gravitation [5] et en théorie des champs de jauge [10].

En préparant cet exposé, des conversations avec A. Douady, J.-L. Gervais, P. Lochak, A. Neveu, M.A. Semenov-Tian-Shansky m'ont permis d'éclaircir certains points.

2. L'algèbre $g\ell(\infty)^{\sim}$ .

On note $\overline{g\ell(\infty)}$ l'ensemble des matrices $(a_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et

2.1 $$e_{i,j} = (\delta(k,i).\delta(\ell,j))_{k,\ell}$$

les matrices élémentaires. Posons

2.2 $$g\ell(\infty) = \{(a_{k,\ell}) \in \overline{g\ell(\infty)} \mid \exists\, r \text{ tel que } a_{k,\ell} = 0 \text{ pour } |k-\ell| > r\}$$

2.3 $$g\ell(\infty)_f = \{(a_{k,\ell}) \in \overline{g\ell(\infty)} \mid (k,\ell) \longmapsto (a_{k,\ell}) \text{ à support fini}\} .$$

Les éléments de $g\ell(\infty)$ sont donc les matrices infinies à support dans une bande autour de la diagonale. Le produit d'une matrice $X = (a_{k,\ell}) \in g\ell(\infty)$ et $Y = (b_{k,\ell}) \in \overline{g\ell(\infty)}$ se définit de la manière usuelle

2.4 $$\begin{cases} XY = (c_{k,\ell}) , \\ c_{k,\ell} = \sum_p a_{k,p} c_{p,\ell} , \end{cases}$$

de sorte que $g\ell(\infty)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et $\overline{g\ell(\infty)}$ un $g\ell(\infty)$-module. Pour $i \in \mathbb{Z}$ , posons

2.5 $$\begin{cases} h_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{n,n+i} , \\ \mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}h_i ; \end{cases}$$

et

2.6 $$\begin{cases} J = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon(i) e_{i,i} , \quad \text{où} \\ \varepsilon(i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \geq 0 , \\ +1 & \text{si } i < 0 . \end{cases} \end{cases}$$

Le sous-espace $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre commutative de $g\ell(\infty)$ . Si $X \in g\ell(\infty)$ , $X = (a_{k,\ell})$ et si $Y \in \overline{g\ell(\infty)}$ , $Y = (b_{k,\ell})$ , la matrice $[J,X]Y$ possède une trace. On pose

2.7 $$B(X,Y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}([J,X]Y) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} (\varepsilon(k) - \varepsilon(\ell)) a_{k,\ell} b_{\ell,k} .$$

Définissons alors une extension de l'algèbre de Lie $g\ell(\infty)$ et du $g\ell(\infty)$-module $\overline{g\ell(\infty)}$ en posant

2.8 $$\begin{cases} g\ell(\infty)^{\sim} = g\ell(\infty) \oplus \mathbb{C}c , \\ \overline{g\ell(\infty)}^{\sim} = \overline{g\ell(\infty)} \oplus \mathbb{C}c , \end{cases}$$

et en définissant le crochet $[\ \ ]^{\sim}$ de la manière suivante

2.9 $$\begin{cases} c \text{ est central} \\ \text{Pour } X \in g\ell(\infty) \text{ et } Y \in \overline{g\ell(\infty)} \text{ on a} \\ [X,Y]^{\sim} = [X,Y] \oplus B(X,Y)c . \end{cases}$$

L'algèbre $g\ell(\infty)^\sim$ est une extension centrale de $g\ell(\infty)$ et on peut montrer que cette extension est non triviale. La sous-algèbre $g\ell(\infty)_f^\sim = g\ell(\infty)_f \oplus \mathbb{C}c$ est une extension centrale triviale de $g\ell(\infty)_f$. On pose

2.10 $$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \ .$$

C'est une sous-algèbre de Lie de $g\ell(\infty)^\sim$ appelée sous-algèbre d'Heisenberg. On a

2.11 $$[h_i,h_j]^\sim = i\delta(i,-j)c \ .$$

Définissons alors une série formelle en $(p,p^{-1},q,q^{-1})$ à coefficients dans $g\ell(\infty)^\sim$ en posant

2.12 $$e(p,q) = \Big(\sum_{k,m} e_{k,m}p^k q^{-m}(pq^{-1}-1)\Big) - c \ .$$

On a alors

2.13 $$[h_i,e(p,q)]^\sim = (p^i - q^i)e(p,q) \ .$$

3. <u>La représentation fondamentale de</u> $g\ell(\infty)^\sim$

Soient $\mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots]$ l'algèbre des polynômes en une infinité de variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ et $\mathbb{C}[[X_1,X_2,\ldots]]$ l'espace des séries formelles correspondantes. Posons pour $f \in \mathbb{C}[[X_1,X_2,\ldots]]$

3.1 $$\begin{cases} \Lambda_n f = \dfrac{\partial}{\partial X_n} f & n > 0 \ , \\ \Lambda_n f = (-n)X_{-n} f & n < 0 \ , \\ \Lambda_0 f = 0 \ . \end{cases}$$

On a

3.2 $$[\Lambda_n,\Lambda_m] = n\delta(n,-m)\,\mathrm{Id} \ ,$$

de sorte qu'en posant

3.3 $$\begin{cases} \rho(h_i) = \Lambda_i \ , \\ \rho(c) = \mathrm{Id} \ , \end{cases}$$

on définit une représentation $\rho$ de $\tilde{\mathfrak{h}}$ sur $\mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots]$ (cf. 2.11). On constate immédiatement que cette représentation est *irréductible*.

*Lemme* 3.4.— *Soit* $A : \mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots] \longrightarrow \mathbb{C}[[X_1,X_2,\ldots]]$ *une application* $\mathbb{C}$*-linéaire telle que*

3.5 $$\begin{cases} [\Lambda_n,A] = \lambda_n A & \textit{pour} \ n > 0 \\ [\Lambda_n,A] = \mu_{-n} A & \textit{pour} \ n < 0 \ . \end{cases}$$

*On a alors*

3.6 $$A = A_0 e^{\sum_1^\infty \lambda_i X_i} e^{-\sum_1^\infty \mu_i \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial X_i}} \ , \quad A_0 \in \mathbb{C} \ .$$

*Réciproquement l'opérateur* 3.6 *possède les propriétés* 3.5.

La preuve élémentaire est laissée au lecteur. Définissons alors une série formelle en $p,p^{-1},q,q^{-1}$ à coefficients opérateurs en posant

$$3.7 \qquad \begin{cases} \xi(X,p) = \sum_1^\infty X_i p^i \ , \\ \tilde{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial X_n}, \dots\right) \ , \\ X(p,q) = e^{\xi(X,p)-\xi(X,q)} e^{-\xi(\tilde{\partial},p^{-1})+\xi(\tilde{\partial},q^{-1})} \ . \end{cases}$$

On a alors d'après 3.4

$$3.8 \qquad [\Lambda_i, X(p,q)] = (p^i - q^i)X(p,q) \ , \quad i \in \mathbb{Z} \ .$$

L'opérateur $X(p,q)$ s'écrit

$$3.9 \qquad X(p,q) = \sum_{k,\ell} Z_{k,\ell}(X,\tilde{\partial})p^k q^{-\ell}(1-qp^{-1}) + \mathrm{Id} \ .$$

Des vérifications simples permettent de démontrer le lemme suivant

*Lemme* 3.10.— 1) *Les opérateurs* $Z_{k,\ell}(X,\tilde{\partial})$ *sont des opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients polynômiaux. En particulier ils transforment polynômes en polynômes.*

2) *Soit* $P \in \mathbb{C}[X_1,X_2,\dots]$ *un polynôme. Il existe deux entiers* $k(P) \leq 0$ *et* $\ell(P) \geq 0$ *tels que* $Z_{k,\ell}(X,\tilde{\partial})(P) = 0$ *pour* $k < k(P)$ *ou* $\ell > \ell(P)$ .

Nous dirons qu'une représentation $\rho$ de $g\ell(\infty)^\sim$ ou $g\ell(\infty)^\sim_f$ dans un espace vectoriel $V$ est *admissible* si pour tout $v \in V$ , il existe deux entiers $k(v)$ et $\ell(v)$ tels que pour tout $(a_{k,\ell}) \in g\ell(\infty)$ dont le support est contenu dans $\{(k,\ell) \mid k < k(v) \text{ ou } \ell > \ell(v)\}$ on ait $\rho((a_{k,\ell}))v = 0$ . La restriction à $g\ell(\infty)_f$ d'une représentation admissible de $g\ell(\infty)^\sim$ est admissible. Toute représentation admissible de $g\ell(\infty)^\sim_f$ admet une unique extension admissible à $g\ell(\infty)^\sim$ .

PROPOSITION 3.11.— *Il existe une et une seule représentation admissible* $\rho$ *de* $g\ell(\infty)^\sim$ *sur* $\mathbb{C}[X_1,X_2,\dots]$ *telle que*

$$3.12 \qquad \begin{cases} \rho(h_i) = \Lambda_i \ , \\ \rho(c) = \mathrm{Id} \ , \\ \rho(e_{k,\ell}) = Z_{k,\ell}(X,\tilde{\partial}) \ . \end{cases}$$

Posons

$$3.13 \qquad \begin{cases} X_-(q) = e^{-\xi(X,q)}e^{\xi(\tilde{\partial},q^{-1})} \\ X_+(p) = e^{\xi(X,p)}e^{-\xi(\tilde{\partial},p^{-1})} \end{cases}$$

et pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , posons

$$3.14 \qquad \overline{Z_{k,\ell}}(X,\tilde{\partial}) = Z_{k,\ell}(X,\tilde{\partial}) + Y_-(k)\delta(k,\ell)\mathrm{Id} \ ,$$

où

$$3.15 \qquad Y_-(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < 0 \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$3.16 \qquad X_+(p)X_-(q) = \sum \overline{Z_{k,\ell}}(X,\tilde{\partial})p^k q^{-\ell} \ .$$

On montre alors par un calcul

$$[\overline{Z}_{k,\ell},\overline{Z}_{m,n}] = \delta(\ell,m)\overline{Z}_{k,n} - \delta(n,k)\overline{Z}_{m,\ell} .$$

Utilisant 3.14 et 2.9 on montre alors que $e_{k,\ell} \mapsto Z_{k,\ell}$ définit une représentation de $g\ell(\infty)^{\sim}_{f}$ qui est admissible d'après 3.10 et qui donc s'étend à $g\ell(\infty)^{\sim}$. On vérifie alors 3.12.

La représentation décrite dans la proposition 3.11 est appelée la *représentation fondamentale* de $g\ell(\infty)^{\sim}$.

## 4. La représentation de Fock

Soient $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_n$ et $V^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi^*_n$ deux espaces vectoriels en dualité séparante par la forme

4.1 $$(\psi_k,\psi^*_\ell) = \delta(k,\ell) .$$

Posons $V^+ = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\psi_n$, $V^- = \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\psi_n$, $V^{*+} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\psi^*_n$, $V^{*-} = \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\psi^*_n$.

Munissons l'espace $F = V \oplus V^*$ de la forme quadratique

4.2 $$Q((x,u)) = (x,u) .$$

Notons $\beta$ la forme bilinéaire symétrique sur $F$ telle que $Q(w) = \beta(w,w)$, $w \in F$, on a

4.3 $$\beta((\psi_k,0),(0,\psi^*_\ell)) = \frac{1}{2}\,\delta(k,\ell) .$$

On note $\mathbb{A}$ l'algèbre de Clifford de $(F,Q)$ (algèbre de Fermions libres). L'application bilinéaire $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{A}$ qui associe à $(v,v^*)$ le produit dans $\mathbb{A}$ : $(v,0).(0,v^*)$, identifie $V \otimes V^*$ à son image, notée $\mathfrak{g}(V,V^*)$, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathbb{A}$. On pose

4.4 $$\mathfrak{g}(V,V^*)^{\sim} = \mathbb{C}.1 \oplus \mathfrak{g}(V,V^*) ;$$

c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathbb{A}$.

Le groupe $G(V,V^*)^{\sim}$ des éléments inversibles $g \in \mathbb{A}$ tels que $gVg^{-1} = V$ et $gV^*g^{-1} = V^*$ est le groupe correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(V,V^*)^{\sim}$. Le groupe $G(V,V^*)^{\sim}$ opère par automorphisme intérieur sur $V \subset \mathbb{A}$. Le groupe des automorphismes de $V$ que l'on obtient, noté $G(V,V^*)$ est le groupe $GL(V) \cap (Id + V^* \otimes V)$. On a donc une suite exacte

4.5 $$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow G(V,V^*)^{\sim} \longrightarrow G(V,V^*) \longrightarrow 1 .$$

Posons

4.6 $$W_{cre} = V^+ \oplus V^{*-} , \qquad W_{an} = V^- \oplus V^{*+} .$$

On obtient ainsi deux sous-espaces isotropes supplémentaires de $F$ qui sont en dualité séparante par la forme $\beta$. Posons alors

4.7 $$\mathcal{F} = \Lambda W_{cre} , \quad \mathcal{F}^* = \Lambda W_{an} .$$

On obtient ainsi deux espaces en dualité par la forme $\beta$ : si $a \in \mathcal{F}^*$ et si

$b \in \mathcal{F}$ , on note $\langle a|b\rangle$ leur produit scalaire. Le vecteur $1 \in \mathbb{C} = \Lambda^o W_{Cre}$ ou bien $1 \in \mathbb{C} = \Lambda^o W_{an}$ est noté vac et appelé le vecteur d'état vide. Les éléments a et b de $\mathcal{F}^*$ et $\mathcal{F}$ respectivement sont notés le plus souvent $\langle a|$ et $|b\rangle$ .

Soient $\alpha \in F$ , $\alpha_{cre}$ et $\alpha_{an}$ ses composantes suivant $W_{cre}$ et $W_{an}$ respectivement. Pour tout $b \in \mathcal{F}$ posons

4.8 $$\alpha|b\rangle = |\alpha_{cre} \wedge b\rangle + |\alpha_{an} \lrcorner\, b\rangle ,$$

où le produit intérieur est défini à l'aide de $\beta$ .

Ces opérations s'étendent à l'algèbre de Clifford $\mathbb{A}$ et on définit ainsi une structure de $\mathbb{A}$-module à gauche sur $\mathcal{F}$ . On définit de même une structure de $\mathbb{A}$-module à droite sur $\mathcal{F}^*$ qui est *adjointe* de la précédente. Pour $a \in \mathcal{F}^*$ , $b \in \mathcal{F}$ et $g \in A$ le nombre complexe

4.9 $$\langle a|g|b\rangle$$

est donc défini sans ambiguité comme l'accouplement de $\langle a|g$ avec $|b\rangle$ ou bien comme l'accouplement de $\langle a|$ avec $g|b\rangle$ . En particulier

4.10 $$\langle vac|g|vac\rangle$$

est appelé la *valeur moyenne de* g *sur le vide.*

Les $\mathbb{A}$-modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont simples. Le A-module $\mathcal{F}$ est appelé *l'espace de Fock.* Les vecteurs $\langle vac|$ et $|vac\rangle$ sont des générateurs de ces modules.

PROPOSITION 4.11.— *L'unique application linéaire*

$$r : G\ell(\infty)^{\sim}_{f} \longrightarrow A$$

*telle que*

4.12 $$\begin{cases} r(e_{m,n}) = -2\langle vac|\psi_m\psi_n^*|vac\rangle + \psi_m\psi_n^* & \text{pour } (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} , \\ r(c) = 1 \end{cases}$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Lie de* $G\ell(\infty)^{\sim}_{f}$ *sur* $\mathfrak{g}(V,V^*)^{\sim}$ .

*La représentation* $\rho$ *de* $G\ell(\infty)^{\sim}_{f}$ *sur* $\mathcal{F}$ *qu'on en déduit est admissible.*

La proposition résulte immédiatement du fait qu'on a

4.13 $$\langle vac|\psi_m\psi_n^*|vac\rangle = \delta(m,n)Y_-(m) ,$$

où $Y_-(m)$ a été défini en 3.15.

La représentation $\rho$ admet une unique extension admissible à $g\ell(\infty)^{\sim}$ qu'on note encore $\rho$ et qu'on appelle la *représentation de Fock* de $g\ell(\infty)^{\sim}$ .

En particulier pour tout i , $\rho(h_i)$ (cf. 2.5) est un endomorphisme de $\mathcal{F}$ et pour $i,j > 0$ , $\rho(h_i)$ et $\rho(h_j)$ commutent.

*Lemme* 4.14.— 1) *Pour tout* $i > 0$ , $\rho(h_i)$ *est un opérateur localement nilpotent.*

2) *Pour tout* $|v\rangle \in \mathcal{F}$, *il existe* $i_0$ *tel que* $\rho(h_i)|v\rangle = 0$ *pour* $i > i_0$ .

L'assertion 2) résulte de l'admissibilité de $\rho$ et l'assertion 1) résulte d'un calcul immédiat à partir de la définition de $\rho$ .

Soit $v \in \mathcal{F}$ . Considérons alors la série formelle

4.15 $$e^{\sum_1^\infty X_i \rho(h_i)}|v> .$$

Il résulte du lemme 4.14 que cette série est un polynôme en les $X_i$ à coefficients dans $\mathcal{F}$ . Par suite

4.16 $$\tau_v(X) = <vac|e^{\sum_1^\infty X_i \rho(h_i)}|v>$$

est un polynôme.

THÉORÈME 4.17.— *L'application linéaire* $v \longmapsto \tau_v(X)$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $\mathbb{C}[X_1,X_2,\dots]$ *est un isomorphisme de la représentation de Fock de* $g\ell(\infty)^\sim$ *sur la représentation fondamentale de* $g\ell(\infty)^\sim$ .

On a pour $j > 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \tau_v(X) = <vac|e^{\sum_1^\infty X_i \rho(h_i)} \rho(h_j)|v> = \tau_{\rho(h_j)v}(X) .$$

De même pour $j > 0$ , on a

$$jX_j\tau_v(X) = <vac|-[h_{-j},e^{\sum_1^\infty X_i \rho(h_i)}]|v> ,$$

et comme $<vac|h_{-j} = 0$ , on a

$$jX_j\tau_v(X) = <vac|e^{\sum_1^\infty X_i \rho(h_i)} \rho(h_{-j})|v> = \tau_{\rho(h_{-j})v}(X) .$$

Donc $v \longmapsto \tau_v(X)$ commute aux opérations de l'algèbre d'Heisenberg et comme les modules sont simples, c'est bien un isomorphisme. Pour démontrer que cet isomorphisme commute aux opérations de $g\ell(\infty)^\sim$ , il suffit, compte tenu des formules (3.14), (3.15), (3.16) et (4.12) de montrer qu'à l'opérateur $X_+(p)X_-(q)$ correspond l'opérateur $\Sigma\, \psi_m\psi_n^* p^m q^{-n}$ . Comme on a

4.18 $$\begin{cases} \Sigma\, \psi_m\psi_n^* p^m q^{-n} = \psi(p)\psi^*(q) \\ \text{où} \quad \psi(p) = \sum\limits_m \psi_m p^m \\ \qquad \psi^*(q) = \sum\limits_m \psi_n^* q^{-n} , \end{cases}$$

il suffit de montrer les égalités

4.19 $$\begin{cases} X_+(p)\tau_v(X) = \tau_{\psi(p)v}(X) , \\ X_-(q)\tau_v(X) = \tau_{\psi^*(q)v}(X) . \end{cases}$$

Comme on a $[h_i,\psi(p)] = p^i\psi(p)$ et $[h_i,\psi^*(q)] = q^{-i}h_i$ , $i \in \mathbb{Z}$ , il résulte de 3.4 que $\psi(p)$ correspond à un opérateur $\alpha(p)X_+(p)$ où $\alpha(p)$ est une série formelle en $p,p^{-1}$ . On montre que $\alpha(p) = 1$ en testant sur le vecteur $v = |vac>$ . On raisonne de même pour $\psi^*(q)$ .

5. Les sous-algèbres périodiques de $g\ell(\infty)^\sim$

Soit $n > 0$ un entier. Un élément $g = (a_{i,j})$ de $g\ell(\infty)$ est dit périodique de période $n$ si on a

5.1 $$a_{i+n,j+n} = a_{i,j} \quad \forall\, i,j \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ .$$

L'ensemble des éléments périodiques de période $n$ est une sous-algèbre de Lie de $g\ell(\infty)$ .

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice périodique. Posons pour $k \in \mathbb{Z}$

5.2 $$A_k = (a_{i,j})_{0\le i<n,\, kn\le j<(k+1)n}\ .$$

On obtient ainsi une suite à support fini de matrices $A_k \in g\ell(n)$ . Associons à $A$ le polynôme de Laurent

5.3 $$\sum_k A_k T^k\ ,$$

élément de $g\ell(n)[T,T^{-1}]$ . On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des matrices périodiques de période $n$ , sur $g\ell(n)[T,T^{-1}]$ . La structure d'algèbre de Lie sur $g\ell(n)[T,T^{-1}]$ obtenue par transport de structure est la suivante : on a

5.4 $$[\Sigma A_k T^k, \Sigma B_j T^j] = \sum_n \Big(\sum_{k+j=n} [A_k,B_j]\Big) T^n\ ,$$

où $[A_k,B_j]$ désigne le crochet usuel de $g\ell(n)$ .

On identifie dans la suite $g\ell(n)[T,T^{-1}]$ à la sous-algèbre des matrices périodiques de période $n$ de $g\ell(\infty)$ . Considérons alors la sous-algèbre de $g\ell(\infty)^\sim$

5.5 $$g\ell(n)[T,T^{-1}]^\sim = g\ell(n)[T,T^{-1}] \oplus \mathbb{C}c\ .$$

Pour $A$ et $B \in g\ell(n)[T,T^{-1}]$ , on a

$$[A,B]^\sim = [A,B] + \mathrm{Res}_{T=0}\mathrm{Tr}\left(\frac{dA}{dT}\, B\, dT\right)\ .$$

On obtient donc l'algèbre affine de type $A_n^{(1)}$ [7]. En restreignant la représentation fondamentale de $g\ell(\infty)^\sim$ à $g\ell(n)[T,T^{-1}]^\sim$ , on obtient essentiellement la représentation fondamentale de $g\ell(n)[T,T^{-1}]^\sim$ : on en déduit une représentation dans $\mathbb{C}[X_1,X_2,\dots,X_j,\dots]$ $j \not\equiv 0$ (mod. n), qui est la représentation fondamentale de $g\ell(n)[T,T^{-1}]^\sim$ [7].

6. Equations d'évolution non linéaire

Il s'agit d'une suite infinie d'équations aux dérivées partielles, non linéaires, reliant une infinité de fonctions $u_1, u_2,\dots,u_n,\dots$ en une infinité de variables $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ . Ce système d'équations qu'on appelle la *hiérarchie de Kadomtsev-Petviashvili* est aussi appelé plus brièvement la hiérarchie K.P. [1]. Considérons l'opérateur pseudo-différentiel formel

6.1 $$L(X,\partial) = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \dots\ , \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial X_1}\ .$$

On convient que $\partial^{-1}$ est l'inverse de $\partial$ et que par conséquent il commute aux multiplications par les fonctions suivant les règles

6.2
$$\begin{cases} \partial^{-1}.v = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\partial^{n-1}v).\partial^{-n} , \\ v.\partial^{-1} = \sum_{1}^{\infty} \partial^{-n}.(\partial^{n-1}v) . \end{cases}$$

On peut donc calculer pour tout $n$, l'opérateur composé $L^n(X,\partial)$. C'est un opérateur du type

6.3 $$L^n(X,\partial) = \partial^n + P_{n,2}(u)\partial^{n-2} + \ldots + P_{n,n}(u) + P_{n,n+1}(u)\partial^{-1} + \ldots$$

où les $P_{n,n}(u)$ sont des expressions polynômiales en les $u_i$ et leurs dérivées par rapport à $X_1$.

Notons alors $L_+^n(X,\partial)$ la partie différentielle de $L^n(X,\partial)$. On a donc avec les notations de 6.3 :

6.4 $$L_+^n(X,\partial) = \partial^n + \sum_{2}^{n} P_{n,m}(u)\partial^{n-m} .$$

Ainsi on a $L_+^1(X,\partial) = \partial$, $L_+^2(X,\partial) = \partial^2 + 2u_2$, $L_+^3(X,\partial) = \partial^3 + 3u_2\partial + 3(u_3 + \partial u_2)$, ...

Exprimons la condition pour que le système d'équations linéaires en la fonction $w(X_1,X_2,\ldots)$

6.5 $$\frac{\partial}{\partial X_n} w = L_+^n(X,\partial)w , \qquad n = 1,2,\ldots ,$$

admette une solution. On obtient pour tout couple $m,n \geq 1$, une égalité entre opérateurs différentiels en $\frac{\partial}{\partial X_1}$ :

6.6 $$\frac{\partial}{\partial X_n} L_+^m(X,\partial) - \frac{\partial}{\partial X_m} L_+^n(X,\partial) = [L_+^m(X,\partial),L_+^n(X,\partial)] .$$

En égalisant les coefficients des $\partial^p$ dans 6.6 on obtient les équations aux dérivées partielles, non linéaires reliant les $u_i$ qui construisent la hiérarchie K.P. . Ainsi dans le cas $m = 2$, $n = 3$, on obtient deux relations liant $u_2$ et $u_3$. Eliminant $u_3$ on obtient en posant $v = u_2$, l'équation K.P. :

6.7 $$\frac{3}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial X_2^2} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(2\frac{\partial v}{\partial X_3} - 6v\frac{\partial v}{\partial X_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 v}{\partial X_1^3}\right) .$$

Des solutions particulières de cette équation sont données par les solutions du système

6.8
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial X_2} = 0 \\ \dfrac{2\partial v}{\partial X_3} = 6v\dfrac{\partial v}{\partial X_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3 v}{\partial X_1^3} . \end{cases}$$

La deuxième équation de 6.8 n'est autre que l'équation de Korteweg-De Vries (KdV).

On peut montrer [2] que les équations 6.6 sont équivalentes aux équations

6.9 $$\frac{\partial L}{\partial X_n} = [L_+^n,L] , \quad n \geq 1 .$$

Les équations 6.9 sont les *équations d'évolution* de l'opérateur pseudo-différentiel $L$.

Les équations 6.6 ou 6.9 entraînent l'existence d'un opérateur pseudo-différentiel de degré 0

6.10 $$P = 1 + w_1(X)\partial^{-1} + w_2(X)\partial^{-2} + \dots ,$$

tel que

$$\begin{cases} 6.11 & LP = P\partial , \\ 6.12 & \dfrac{\partial}{\partial X_n}(P) = -(L^n_-)P \quad \text{ou} \quad L^n_- = L^n - L^n_+ . \end{cases}$$

L'existence de $P$ vérifiant 6.11 et 6.12 équivaut aux relations 6.9 ou 6.6. Considérons alors la fonction de phase

6.13 $$\xi(X,k) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i k^i ,$$

et introduisons la *fonction d'onde*

6.14 $$w(X,k) = Pe^{\xi(X,k)} .$$

On a

6.15 $$w(X,k) = (1 + w_1(X)k^{-1} + w_2(X)k^{-2} + \dots)e^{\xi(X,k)} .$$

L'adjoint formel de $P$ s'écrit

6.16 $$P^* = 1 + (-\partial)^{-1}w_1 + (-\partial)^{-2}w_2 + \dots .$$

Posons alors

6.17 $$w^*(X,k) = (P^*)^{-1}e^{-\xi(X,k)} .$$

La connaissance de $w$ entraîne celle de $P$ (6.15 et 6.10) donc de $w^*$ (6.17) et de $L$ (6.11).

PROPOSITION 6.18.— *La fonction* $w(X,k)$ *de la forme* 6.15 *est une fonction d'onde pour la hiérarchie* K.P. *si et seulement si pour tout* $X$ , $X'$ *on a*

6.19 $$\mathrm{Res}_{k=\infty}(w(X,k)w^*(X',k)dk) = 0 .$$

Pour la démonstration nous renvoyons à [2].

Revenons à l'équation K.P. (6.7). On sait que si on fait le changement de fonction

$$u_2(X) = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \log \tau(X) ,$$

on obtient l'équation

6.20 $$P(D_y)\tau(X+y).\tau(X-y)\big|_{y=0} = 0$$

où $P(D)$ est le polynôme différentiel :

6.21 $$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3) .$$

Il s'agit là d'un phénomène général. En utilisant 6.19, on montre [2] que la fonction d'onde $w(X,k)$ peut se mettre sous la forme

6.22 $$w(X,k) = \frac{\tau(X_1 - \frac{1}{k}, X_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots)}{\tau(X)} e^{\xi(X,k)} ,$$

où $\tau$ est uniquement déterminée à un facteur près par $w(X,k)$ . Les relations 6.19 peuvent alors être mises sous la forme d'équations différentielles bilinéaires portant sur la fonction $\tau$ et qu'on appelle *équations bilinéaires d'Hirota*.

Supposons maitenant que $\tau$ soit un *polynôme*. Alors la relation 6.22 s'écrit compte tenu de 3.13

6.23
$$w(X,k) = \frac{X_+(k)\tau(X)}{\tau(X)} ,$$

on en déduit

6.24
$$w^*(X,k) = \frac{X_-(k)\tau(X)}{\tau(X)} ,$$

et la relation 6.19 s'écrit

6.25
$$\mathrm{Res}_{k=\infty}(X_+(k)\tau(X).X_-(k)\tau(X')dk) = 0 .$$

Appelons *polynôme de type* K.P., tout polynôme qui satisfait aux conditions 6.25.

THÉORÈME 6.26.— *L'ensemble des polynômes de type* K.P. *est stable sous l'action de* $g\ell(\infty)^\sim$ *par la représentation fondamentale.*

Il s'agit de montrer que pour tout élément $m \in g\ell(\infty)^\sim$ , on a

6.27
$$\mathrm{Res}(X_+(k)\rho(m)\tau(X).X_-(k)\tau(X')dk) + \mathrm{Res}(X_+(k)\tau(X).X_-(k)\rho(m)\tau(X')dk) = 0 .$$

En vertu de l'admissibilité de $\rho$ (3.11), il suffit de montrer 6.27 lorsque $m \in g\ell(\infty)^\sim_f$ ou encore lorsque $m$ est élémentaire. En vertu de 3.13 et 3.16, il suffit de montrer l'identité entre séries formelles en $p$ et $q$ :

6.28
$$\mathrm{Res}(X_+(k)X_+(p)X_-(q)\tau(X).X_-(k)\tau(X')dk) + \mathrm{Res}(X_+(k)\tau(X),X_-(k)X_+(p)X_-(q)\tau(X')dk) = 0 .$$

Un calcul simple montre que le premier terme de 6.28 est égal à

6.29
$$(q-p)X_+(p)\tau(X).X_-(q)\tau(X')$$

et que le deuxième terme est l'opposé de 6.29.

COROLLAIRE 6.30.— *Pour tout* $g \in G(V,V^*)^\sim$ (n° 4), *le polynôme*
$$\tau(X,g) = \langle vac|e^{\sum_1^\infty X_i\rho(h_i)} g|vac\rangle ,$$
*est de type* K.P.

Cela résulte du théorème 4.17, du fait que 1 est de type K.P. et que tout $g \in G(V,V^*)^\sim$ est dans le groupe engendré par les $\exp\rho(m)$ où $m \in G\ell(\infty)^\sim_f$ .

A titre d'exemple, posons pour $r < 0 \leq s$
$$g_{rs} = 1 - (\psi_r^* + \psi_s^*)(\psi_r + \psi_s) ,$$
et prenons pour $g$ un élément du type
$$g = g_{r_1s_1}g_{r_2s_2}\cdots g_{r_ps_p} .$$
La fonction $\tau(X,g)$ correspondante est essentiellement un *caractère du groupe linéaire* [2].

De même la série formelle en les $p_i$ , $q_i$ , à coefficients polynômiaux
$$\tau(X;a_1,p_1,q_1;\ldots,a_N,p_N,q_N) = e^{\sum_1^N a_jX(p_j,q_j)}.1$$
est du type K.P. et est appelée la solution à N solitons.

Pour étudier les solutions de la hiérarchie KdV il faut imposer des contraintes au système général K.P.. Ainsi si l'on impose que pour un entier $n$

6.31 $$L^n_- = 0$$

c'est-à-dire que $L^n$ soit un opérateur différentiel. Alors cela entraîne

$$\frac{\partial}{\partial X_p} L = 0 \ , \quad p \equiv 0 \pmod{n} \ ,$$

et la fonction correspondante ne dépend que des variables $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ $j \neq 0 \pmod{n}$. Dans le cas $n = 2$, on obtient la hiérarchie KdV. Dans le cas $n = 3$, on obtient la hiérarchie de Boussinesq.

L'algèbre de Lie $g\ell(n)[T,T^{-1}]^{\sim}$ opère sur les fonctions $\tau$ décrivant les solutions de ces systèmes. Ces opérations s'intègrent aux groupes correspondants.

## 7. Autres résultats

Nous nous bornerons à les citer. Tout d'abord un des problèmes de la théorie des modèles duaux est de montrer que les états qu'on construit ont tous une signification physique (par exemple masse $\geq 0$ ). C'est le problème de l'absence des fantômes. L'utilisation des algèbres de Lie affines permet de simplifier ces démonstrations.

La hiérarchie K.P. est liée à l'algèbre $g\ell(\infty)^{\sim}$. On peut construire des algèbres analogues en utilisant le groupe orthogonal ou symplectique et définir et résoudre de nouvelles hiérarchies [4] qui sont elles-mêmes liées, en imposant des contraintes, aux algèbres affines classiques.

De même on peut remplacer les opérateurs scalaires présentés ici par des opérateurs matriciels [3].

Enfin les fonctions $\vartheta$ des jacobiennes de courbes algébriques permettent d'exprimer des solutions des systèmes K.P. [1]. De même pour les systèmes liés au groupe orthogonal, il faut utiliser des fonctions $\vartheta$ de variétés de Prym [2].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] I.V. CHEREDNICK - *Differential equations for the Baker-Akliezer functions of algebraic curves*, Funct. Anal. Appl. 12(1978), 45-54.

[2] E. DATE, M. JIMBO, T. MIWA, M. KASHIWARA - *Transformation Groups for Soliton Equations*, R.I.M.S. 394, Kyoto, Feb. 1982.

[3] E. DATE, M. JIMBO, T. MIWA - *Operator approach to the Kadomstev-Petviashvili Equation - Transformation groups for Soliton Equations III*, J. of Physical Soc. of Japan, vol. 50, n° 11, november 1981, 3806-3812.

[4] E. DATE, M. JIMBO, T. MIWA - K.P. *Hierarchies of Orthogonal and Symplectic Type - Transformation groups for Soliton Equations VI*, J. of physical

Soc. of Japan, vol. 50, n° 11, november 1981, 3813-3818.

[5] B. JULIA - *Infinite Lie Algebra in Physics,* preprint, L.P.T.E.N.S., juin 1981.

[6] V.G. KAC - *Highest Weight Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras,* Proceedings of the I.C.M. Helsinki, 1978.

[7] V.G. KAC, D.A. KAZHDAN, J. LEPOWSKY, R.L. WILSON - *Realization of the Basic Representations of the Euclidean Lie Algebras,* Advances in Math., vol. 42, n° 1, octobre 1981.

[8] J. LEPOWSKY and R.L. WILSON - *Construction of the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, Comm. Math. Phys., 62(1978), 43-53.

[9] S. MANDELSTAM - *Dual Resonance Models,* Phys. Rep., 13(1974), 259-353.

[10] J.K. UENO and Y. NAKAMURA - *Transformation Theory for Anti-Self-Dual Equations in Four-Dimensional Euclidean Space and Riemann-Hilbert Problem,* R.I.M.S. 375, Kyoto, july 1981.

Jean-Louis VERDIER

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05