BERNARD MALGRANGE

Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki, exp. n° 582, p. 59-73
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__59_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 582 Novembre 1981

TRAVAUX D'ECALLE ET DE MARTINET-RAMIS SUR LES SYSTEMES DYNAMIQUES

par Bernard MALGRANGE

0. - INTRODUCTION

Soit F le groupe des difféomorphismes analytiques du germe $(\mathbb{C}, 0)$, i.e. des applications $z \mapsto f(z) = \alpha z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$, f étant convergent au voisinage de 0 ; on désignera encore par G le sous-groupe des f tangents à l'identité (i.e. $\alpha = 1$) et par $\hat{F}$ et $\hat{G}$ leurs formalisés. Un problème classique consiste à étudier les classes de conjugaison des éléments de F.

Si α n'est pas une racine de l'unité, il est facile de voir que f se linéarise formellement, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi \in \hat{F}$ tel qu'on ait $\varphi \circ f = \alpha\varphi$; si l'on impose la condition $\varphi \in \hat{G}$, alors φ est unique ; de plus, si $|\alpha| \neq 1$, φ est convergent. Un résultat célèbre de Siegel [S] affirme qu'il en est encore de même pour $|\alpha| = 1$, si α n'est "pas trop irrationnel", de façon précise si la suite $(\alpha^n - 1)^{-1}$ est à croissance lente ; par contre, si la suite précédente est très croissante, φ peut diverger ; l'étude des classes de conjugaisons est alors fort difficile, et on n'en parlera pas ici.

Le travail d'Ecalle concerne le cas opposé, celui où α est une racine de l'unité ; les résultats sont ici de nature totalement différente des précédents : la classification formelle fait intervenir un nombre fini d'invariants, mais il apparait une infinité d'invariants analytiques pour classer les éléments de F formellement conjugués. Pour simplifier l'exposé, nous nous contenterons de traiter le cas $\alpha = 1$.

1. - CLASSES DE CONJUGAISON DANS G

La classification formelle est aisée : en effet tout élément de $\hat{G}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule comme l'exponentielle d'un champ de vecteurs $\xi \in \hat{\mathfrak{g}}$ (i.e. nul d'ordre 2 à l'origine) ; la classification revient donc à celle des ξ , ou encore, en considérant la forme $\omega = \xi^{-1}$, à celle des formes différentielles formelles ayant un pôle d'ordre au moins 2 ; or il est facile de voir que, si $\omega = \sum_{-p}^{+\infty} b_n z^n dz$ est une telle forme, la classe de conjugaison de ω est déterminée par (m, b_m, b_{-1}) où $m = \inf\{n \mid b_n \neq 0\}$. En revenant aux éléments de $\hat{G}$, on trouve qu'un tel élément $f = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ est classé par (m, a_m, b) où $m = \inf\{n \mid a_n \neq 0\}$ et où b est une fonction convenable de $a_m, \dots, a_{2m-1}$ (par exemple, le coefficient de z^{-1} dans $\frac{1}{f(z)-z}$).

<u>Exemple</u>. - Si $a_2 = 1$, la classe de conjugaison de f est donnée par a_3 ; la classe la plus simple est celle où $a_3 = 1$; elle correspond au champ de vecteur $\xi = z^{-2} \frac{d}{dz}$, dont l'exponentielle est la fonction g définie par $g(z) = \frac{z}{1-z}$. <u>Dans la suite, pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons à l'étude des invariants analytiques de cette classe formelle</u> (les résultats dans les autres cas sont analogues, mais un peu plus compliqués à écrire).

Il est plus commode ici de faire le changement de variables $w = \frac{1}{z}$; écrivant pour simplifier $g(w)$ au lieu de $1/g(1/w)$ et de même pour f , on aura alors $g(w) = w-1$, $f(w) = w-1+k(w)$, $k(w) = \sum_{2}^{+\infty} k_n w^{-n}$; on désignera par G_0 l'ensemble des f convergentes à l'infini, et de la forme précédente; pour $f \in G_0$, il existe des séries formelles $\hat{\Phi}(w) = w + \sum_{0}^{+\infty} c_n w^{-n}$ telles qu'on ait $\hat{\Phi} \circ f = g \circ \hat{\Phi}$ $(= \hat{\Phi}-1)$; on peut choisir $c_0 = 0$, et alors $\hat{\Phi}$ est unique ; c'est ce choix que l'on fera dans toute la suite.

La démarche qu'on va suivre maintenant est très proche de celle que l'on emploie, depuis Birkhoff [B] dans l'étude des équations différentielles à points singuliers irréguliers ; formellement, elle est aussi analogue à la théorie de la diffusion (dans cette dernière analogie, f est une perturbation de g, les $\psi_\pm$ les opérateurs d'ondes, et Σ la matrice de diffusion). Ceci dit pour éclairer le lecteur qui connaitrait l'une ou l'autre de ces théories ; on espère que ça ne canulera pas les autres.

Soient $a \in]0,\pi[$ et $R > 0$; on désigne par $D_-(a,R)$ (resp. $D_+(a,R)$) le secteur : $|\arg(w+R)-\pi| < a$ (resp. $|\arg(w-R)| < a$).

THÉORÈME 1. - (Kimura [K], Ecalle [E1]). <u>Pour tout</u> a, <u>et</u> $R \geq R(a)$ <u>assez grand, il existe une fonction unique</u> Φ_-, <u>holomorphe dans</u> $D_-(a,R)$, <u>admettant</u> $\hat{\Phi}$ <u>comme développement asymptotique à l'infini, et vérifiant</u> $\Phi_- \circ f = g \circ \Phi_-$.
(Noter que le premier membre est bien défini, car $f(w)$ est voisin de $w-1$ pour $|w|$ grand ; donc $D_-(a,R)$ est stable par f pour R grand).

La démonstration sera donnée au paragraphe 2. Montrons comment on tire de là les invariants cherchés ; on opère de même à droite, avec f^{-1} et g^{-1} au lieu de f et g, d'où un Φ_+ unique, holomorphe dans $D_+(a,R)$, y admettant $\hat{\Phi}$ comme développement asymptotique à l'infini, et vérifiant $\Phi_+ \circ f^{-1} = g^{-1} \circ \Phi_+$; en augmentant au besoin R, on déduit de l'existence du développement asymptotique de Φ_+ qu'il admet un inverse Φ_+^{-1}, qui sera en particulier défini dans $D_+(a',R')$, $a' < a$ quelconque, et R' assez grand (voir démonstration au § 3). Pour n'importe quel $a'' < a'$, et pour R'' grand on aura donc, dans $D_+(a'',R'')$: $\Phi_+ \circ f = g \circ \Phi$.

Choisissons a voisin de π ; pour $R \gg 0$, la fonction $\psi = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1}$ est définie dans $D_+(a,R) \cap D_-(a,R)$, et possède les propriétés suivantes :

i) $\psi - w$ est à décroissance rapide à l'infini dans $D_+(a,R) \cap D_-(a,R)$;
ii) on a $\psi \circ g \circ \psi^{-1} = g$, autrement dit $\psi(w-1) = \psi(w)-1$.

Posons alors $\psi(w) = w + \Sigma(w)$; dans $D_+(a,R) \cap D_-(a,R)$, Σ est périodique de période 1, et tend vers 0 quand $w \to \infty$; par suite w se prolonge

en une fonction de période 1 dans $|\mathrm{Im}\, w| > R$; dans $\mathrm{Im}\, w > R$, elle s'écrit $\Sigma(w) = \sum_{n\geq 1} \sigma_n e^{2\pi i n w}$, et dans $\mathrm{Im}\, w < -R$, elle s'écrit $\Sigma(w) = \sum_{n\leq -1} \sigma_n e^{2\pi i n w}$
A toute $f \in G_0$, on a donc associé une suite de nombres $\{\sigma_n(f)\}_{n\neq 0}$, à croissance exponentielle, ou encore une fonction Σ_f , définie et de période 1 dans $\mathrm{Im}\, w \gg 0$, tendant vers 0 quand $\mathrm{Im}\, w \to \infty$. Le résultat fondamental est alors le suivant

THÉORÈME 1.2. (Ecalle [E1] , [E2]).

1) Pour que f et $f_1 \in G_0$ soient conjugués dans G , il faut et il suffit qu'on ait $\Sigma_f = \Sigma_{f_1}$.

2) Réciproquement, étant donné n'importe quelle fonction Σ holomorphe dans $|\mathrm{Im}\, w| \gg 0$, et vérifiant les conditions précédentes, il existe $f \in G_0$ telle qu'on ait $\Sigma_f = \Sigma$.

La première partie est immédiate : s'il existe $S \in G$ tel qu'on ait $S \circ f \circ S^{-1} = f_1$, on peut supposer que le coefficient du terme constant de S est nul. Appliquons le théorème 1.1 à f_1 , et désignons par $\Phi_{\pm,1}$ les fonctions obtenues ; leur unicité montre qu'on a $\Phi_{\pm,1} \circ S = \Phi_{\pm}$ d'où $\Sigma_{f_1} = \Sigma_f$.

Réciproquement, si l'on a $\Sigma_{f_1} = \Sigma_f$, on aura $\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} = \Phi_{+,1} \circ \Phi_{-,1}^{-1}$, d'où $\Phi_{+,1}^{-1} \circ \Phi_+ = \Phi_{-,1}^{-1} \circ \Phi_-$; la valeur commune des deux nombres est donc une fonction holomorphe dans $|w| \gg 0$; son comportement asymptotique à l'infini montre alors qu'elle est aussi holomorphe (et inversible à l'infini), c'est donc le S cherché.

La seconde partie est plus délicate, et sera démontrée au paragraphe 3.

Voici un exemple d'application du théorème précédent : soit $f \in G_0$; à quelle condition existe-t-il $h \in G_0$ tel qu'on ait $\underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{p \text{ fois}} = f$? Il est facile de voir que $h(w)$ doit être de la forme $w - \frac{1}{p} + O(\frac{1}{w^2})$; en répétant les raisonnements précédents dans cette nouvelle classe de conjugaison formelle (avec ici comme modèle $w \mapsto w - \frac{1}{p}$ au lieu de g), on trouve que Σ_f doit être périodique de période $\frac{1}{p}$; autrement dit, on doit avoir $\sigma_n(f) = 0$ si $p \nmid n$, et réciproquement. En particulier, si ceci a lieu pour assez de p (i.e. des p non tous multiples d'un entier ≥ 2), alors on a $\Sigma_f = 0$ et f est conjuguée à g ; a fortiori, si f se plonge dans un groupe à un paramètre, ceci est encore vrai (ce dernier résultat est d'ailleurs facile à établir directement, en montrant que, pour les germes champs de vecteurs la classification formelle et la classification analytique coïncident).

Indiquons pour terminer ce paragraphe que le résultat précédent, et son extension aux autres classes de conjugaison de G (ou aux automorphismes $z \mapsto \alpha z + \ldots$, α une racine de l'unité) sont seulement les premiers résultats de la théorie d'Ecalle. Des résultats plus difficiles concernent notamment la sommabilité de Borel des $\Phi_\pm$ et l'étude du prolongement analytique de leurs transformées de Borel : il montre que ces transformées, qui coïncident dans le disque unité, se prolongent en des fonctions holomorphes sur le revêtement universel de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}i$, et il précise en fonction des $\sigma_n(f)$ leur ramification. Pour ces questions, qu'il serait trop long d'aborder ici, je renvoie à [E2].

2. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

Le théorème résultera de la proposition suivante (où $g(w) = w-1$, comme au § 1).

PROPOSITION 2.1. - Soit $f(w) = w - 1 + k(w)$, avec $k(w) = \sum_2^{+\infty} k_n w^{-n}$ holomorphe à l'infini. Pour $a \in]0, \pi[$ fixé, et R assez grand, il existe une Φ_- unique, holomorphe dans $D_-(a, R)$, et possédant les propriétés suivantes

i) $\Phi_-(w) = w + \psi(w)$, avec $\psi(w) \to 0$ si $w \to \infty$;

ii) $\Phi_- \circ f = g \circ \Phi_-$.

De plus, si $k_n = 0$ pour $n \leq m$ (m entier ≥ 1), alors, pour $w \to \infty$ on a $\psi(w) = O(w^{-m})$.

Il existe $c > 0$ tel qu'on ait dans $D_-(a, R)$, pour $R \geq 1$:

$$(2.2) \quad \sum_{0}^{+\infty} \left|\frac{1}{w-p}\right|^{m+1} \leq \frac{c}{|w|^m} \quad \text{(élémentaire).}$$

Choisissons alors $A > 0$ et $R \geq 1$ tels que f soit défini dans $D_-(a, R)$ et y vérifie

$$(2.3) \quad \sup_{|w-w'| \leq 1} |k(w')| \leq \frac{A}{|w|^{m+1}} .$$

Quitte à augmenter R, on peut supposer qu'on a aussi, à cause de (2.2)

$$(2.4) \quad A \sum_{0}^{\infty} \left|\frac{1}{w-p}\right|^{m+1} \leq 1 .$$

LEMME 2.5. - <u>Dans</u> $D_-(a, R)$, <u>les itérés</u> $f^{(p)} = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$ <u>sont définis, et vérifient</u>

$$|f^{(p)}(w) - (w-p)| \leq A \sum_{0}^{p-1} \left|\frac{1}{w-q}\right|^{m+1} .$$

Le résultat est vrai pour $p = 1$; raisonnons par récurrence, et supposons le vrai pour p ; on a $f^{(p+1)}(w) = f \circ f^{(p)}(w) = f^{(p)}(w) - 1 + k \circ f^{p}(w)$. Par l'hypothèse de récurrence et (2.4) on a $|f^{(p)}(w) - (w-p)| \leq 1$; donc on a $f^{(p)}(w) \in D_-(a, R)$ et, d'après (2.3) :

$$(2.6) \quad |k \circ f^{(p)}(w)| \leq \frac{A}{|w-p|^{m+1}} .$$

Alors on a

$$|f^{(p+1)}(w) - (w-p-1)| \leq |f^{p}(w) - (w-p)| + |k \circ f^{(p)}(w)| \leq A \sum_{0}^{p} \left|\frac{1}{w-q}\right|^{m+1} ,$$

ce qui démontre le lemme.

La démonstration de la proposition est maintenant immédiate : l'équation $\Phi_- \circ f = g \circ \Phi_-$ s'écrit $\psi \circ f + f = w - 1 + \psi$, ou encore $\psi \circ f + k = \psi$; une solution de cette dernière équation est donnée par $\psi = \sum_{0}^{+\infty} k \circ f^{(p)}$; par (2.6) et (2.2) on a $|\psi(w)| \leq \sum_{p \geq 0} \frac{1}{|w-p|^{m+1}} \leq \frac{Ac}{|w|^m}$, ce qui établit la convergence et la majoration voulue ; d'où l'existence de ψ .

Pour l'unicité, il suffit de montrer que l'équation $\psi \circ f = \psi$, $\psi(w) \to 0$

si $w \to \infty$ n'a que la solution 0 ; or, en itérant, on trouve $\psi \circ f^{(p)} = \psi$; par (2.5), $f^{(p)}(w)$ tend vers l'infini pour w fixé, $p \to +\infty$; ceci entraîne le résultat.

Pour établir le théorème 1.1, il suffit maintenant de montrer que la fonction Φ_- qui vient d'être construite admet un développement asymptotique à l'infini, égal à l'unique série formelle $\hat{\Phi} = w + \sum_1^\infty c_n w^{-n}$ qui vérifie $\hat{\Phi} \circ f = g \circ \hat{\Phi}$. Pour établir ce résultat à l'ordre p , on remarque d'abord que (2.1) l'établit dans le cas particulier où $k = f - w + 1$ s'annule à l'infini à l'ordre $p+2$; on ramène le cas général à ce cas particulier en remplaçant f par $\Phi_q f \Phi_q^{-1}$, avec $\Phi_q = w + \sum_1^q c_n w^{-n}$, et $q \gg p$.

<u>Remarque 2.7</u>. - De la formule $k = f - w + 1$, on tire $\sum_0^{p-1} k_0 f^{(q)} = f^{(p)} + p - w$; en passant à la limite, on trouve donc $\psi = \lim(f^{(p)} + p - w)$ ou encore $\Phi_- = w + \psi = \lim g^{(-p)} f^{(p)}$; on aura de même $\Phi_+ = \lim g^{(p)} f^{(-p)}$; ces formules mettent en évidence l'analogie de $\Phi_\pm$ avec des opérateurs d'ondes, analogie dont il a été question plus haut.

3. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.2

On reprend ici les notations du § 1. Pour établir le résultat, il suffit, Σ étant donné, de résoudre l'équation (3.1) $\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} = w + \Sigma$, Φ_+ (resp. Φ_-) étant défini dans un secteur de type $D_+(a, R)$ [resp. $D_-(a, R)$] et admettant à l'infini un développement asymptotique $w + \sum_1^\infty c_n w^{-n}$, (on peut même supposer que les c_n sont nuls pour $n \leq p$, p fixé, comme il est facile de voir). En effet, on aura alors $\Phi_-^{-1} \circ g \circ \Phi_- = \Phi_+^{-1} \circ g \circ \Phi_+$ là où les deux membres sont définis ; la fonction f définie au voisinage de l'infini par l'un ou l'autre membre de l'égalité précédente est donc holomorphe à l'infini, et elle est dans G_0 (i.e. dans la classe de conjugaison formelle de g) : il est évident qu'on a $\Sigma_f = \Sigma$, d'où le résultat.

Pour résoudre (3.1) il est plus commode de revenir à la variable $z = \frac{1}{w}$, et de considérer plus généralement la situation suivante : on fait un éclatement réel de $0 \in \mathbb{C}$, i.e. on passe en coordonnées polaires $(\theta, r) \in \mathbf{T} \times \mathbb{R}_+ = X$; on note π la projection $X \to \mathbb{C} : (\theta, r) \mapsto re^{i\theta}$, et $\dot{S} = \pi^{-1}(0)$; on définit des faisceaux Γ_p $(p \geq 2)$ sur S de la façon suivante : Γ_{p,θ_0} est formé des fonctions φ holomorphes dans un petit secteur $|\arg z - \theta_0| < \epsilon$, $|z| < \epsilon$, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $z + \sum_{n \geq p} a_n z^n$; si l'on restreint un peu le secteur en le remplaçant par le secteur fermé $\{0\} \cup \{|\arg z - \theta_0| \leq \epsilon' ; |z| \leq \epsilon'\}$, on voit facilement que la restriction de φ est de classe C^∞ (il suffit pour cela de montrer que les développements asymptotiques du type considéré se dérivent terme à terme, ce qui résulte immédiatement des inégalités de Cauchy) ; il résulte alors du théorème des fonctions implicites que le germe de φ en θ_0 est inversible, et que les Γ_p sont munis d'une structure de faisceaux de groupes. Posant $\Gamma_\infty = \cap \Gamma_p$, la résolution de l'équation (3.1) est un cas particulier du résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. - Pour tout $p \geq 2$, l'image de l'application $H^1(S, \Gamma_\infty) \to H^1(S, \Gamma_p)$ est réduite à e (l'élément trivial de $H^1(S, \Gamma_p)$).

Le résultat peut s'établir par un calcul de majoration du type "théorème des matrices holomorphes inversibles". On va ici donner une autre méthode, qui élimine tous les calculs (i.e. ramène à des calculs se trouvant dans la littérature) ; l'inconvénient est que cette méthode ne donnera pas un résultat "explicite".

On va d'abord trivialiser la situation "en C^∞" : soit $\Gamma_\infty^{\mathbb{R}}$ le faisceau sur S défini ainsi : les éléments de $\Gamma_{\infty,\theta_0}^{\mathbb{R}}$ sont représentés par des φ de classe C^∞ sur un petit secteur fermé $|\arg z - \theta_0| \leq \epsilon$, $|z| \leq \epsilon$, telles que $\varphi - z$ soit plate en 0, i.e. toutes ses dérivées par rapport à x et y, $(x+iy = z)$ sont nulles en 0. C'est encore un faisceau de groupes sur S.

LEMME 3.3. - $H^1(S, \Gamma_\infty^{\mathbb{R}})$ est trivial.

En effet, les éléments de $H^1(S, \Gamma_\infty^{\mathbb{R}})$ classent les germes Y le long de S de variété C^∞ à bord, localement isomorphes à $S \times \mathbb{R}_+$, et munis d'une trivialisation du complété formel de Y le long de S ; il est classique qu'une telle trivialisation s'étend à Y (utiliser les arguments usuels de champs de vecteurs) ; ceci est précisément le résultat cherché.

Prenons alors un recouvrement $\{U_i\}$ de S, et soit $\varphi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Gamma_\infty)$ un cocycle de Γ_∞ dans ce recouvrement ; le lemme précédent, joint aux propriétés d'injectivité du H^1 montre qu'il existe des $\psi_i \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Gamma_\infty^{\mathbb{R}})$ tels qu'on ait $\psi_i \circ \varphi_{ij} = \psi_j$; il s'agit de rendre les ψ_i analytiques avec des propriétés de développement asymptotiques convenables.

Soit I le tenseur de la structure presque-complexe standard de $(\mathbb{C}, 0)$; dans le germe de secteur défini par $U_i \cap U_j$, on a $\psi_i(I) = \psi_j(I)$, donc les $\psi_i(I)$ définissent une structure presque complexe J de classe C^∞ dans $(\mathbb{C}, 0)$ privé de 0. Comme les $\psi_i - z$ sont plats en 0, J s'étend en un tenseur de classe C^∞ sur $(\mathbb{C}, 0)$, qui coïncide d'ailleurs avec I à l'ordre ∞ en 0. On applique alors le théorème de Newlander-Nirenberg [N-N] (ici, en fait à 1 variable, c'est un vieux résultat de Korn et Lichtenstein ; mais plus loin on aura besoin du "vrai" Newlander-Nirenberg à plusieurs variables) : il existe χ, de classe C^∞, tangent à l'identité à un ordre aussi grand qu'on veut, (mais <u>pas</u> à l'ordre ∞ en général !) tel qu'on ait $\chi(J) = I$; posant $\varphi_i = \chi \circ \psi_i$, on a $\varphi_i(I) = I$, donc φ_i est holomorphe ; φ_i admet à l'origine un développement asymptotique du type voulu ; enfin, on a $\varphi_i \circ \varphi_{ij} = \varphi_j$, ce qui établit le théorème.

<u>Remarque 3.4</u>. - Dans la théorie des équations différentielles linéaires, on emploie un résultat analogue, avec Γ remplacé par un faisceau de sections holomorphes de $Gl(n, \mathbb{C})$; ce résultat est dû à Sibuya [Si] ; un résultat de ce type se trouve même déjà dans Birkhoff [B]. Bien entendu, la méthode employée ici s'adapte aussi à ce cas.

4. - CHAMPS DE VECTEURS DANS $\mathbb{C}^2$, D'APRÈS MARTINET-RAMIS [M-R]

Il s'agit ici de classer les germes de champs de vecteurs holomorphes $\xi = a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans un cas "très résonnant", celui où la partie linéaire de ξ est de rang 1 et non nilpotente ; on supposera en outre que 0 est une singularité isolée de ξ , et on classera ces champs à facteur inversible près sous l'action de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Si l'on pose $\omega = a dy - b dx$, les conditions précédentes signifient aussi ceci : 0 est une singularité isolée de ω , $j^1\omega$ est de rang 1 , enfin $d\omega(0) \neq 0$; il s'agit alors de classer "les équations $\omega = 0$", i.e. les ω à facteur inversible près.

L'idée essentielle va être la même que précédemment, mais les détails techniques sont beaucoup plus longs ; par conséquent, et pour me conformer au style du séminaire Bourbaki, je serai beaucoup plus bref.

Soit E'' (resp. E''_p) l'ensemble des équations précédentes (resp. celles dont la multiplicité en 0 , c'est-à-dire celle de l'idéal (a, b) , est égale à $p+1$) ; on commence par une série de réductions que j'indique sans démonstration.

(4.1) Toute équation $\in E''_p$ s'écrit, dans des coordonnées convenables, sous la forme $x^{p+1}dy - A(x,y)dx = 0$, avec $A(0,y) = \lambda y$, $\lambda \neq 0$. Ce résultat est dû à Dulac [D] ; voir un exposé plus moderne dans [M-M] .

(4.2) Désignons par E'_p l'ensemble des équations de la forme (4.1) et par H' le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ des transformations de la forme $(x,y) \to (h(x), k(x,y))$, avec $k(0,y) = \mu y$, $\mu \neq 0$. Alors l'application évidente $H'\backslash E'_p \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)\backslash E''_p$ est bijective. Tout revient donc à étudier les orbites de H' dans E'_p .

(4.3) Sous l'action du formalisé $\hat{H}'$ de H' , tout élément de $\hat{E}'_p$ se met sous une et une seule des formes réduites suivantes

$$\omega_{p,\lambda} \underset{\text{déf.}}{=} x^{p+1}dy - y(1+\lambda x^p)dx = 0 \ , \quad \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

(4.4) Désignons par $E'_{p,\lambda}$ l'espace des équations $\in E'_p$ dont la forme réduite formelle est $\omega_{p,\lambda} = 0$. Il s'agit donc d'étudier $H'\backslash E'_{p,\lambda}$; pour cela, on va faire encore une autre réduction. Soit $H \subset H'$ le groupe des transformations de la forme $(x,y) \mapsto (x, h(x,y))$, avec $h(0,y) = y$; soit d'autre part $E_{p,\lambda} \subset E'_{p,\lambda}$ l'ensemble des équations qui peuvent être réduites par $\hat{H}$ à la forme $\omega_{p,\lambda} = 0$; H opère librement dans $E_{p,\lambda}$; d'autre part, il est "presque vrai" que l'application $H\backslash E_{p,\lambda} \to H'\backslash E'_{p,\lambda}$ est bijective ; ceci devient exact si l'on agrandit H en lui adjoignant les transformations $(x,y) \mapsto (\alpha x, \beta y)$, $\alpha^p = 1$, $\beta \neq 0$ (ces dernières transformations laissent visiblement $E_{p,\lambda}$ stable). Il suffit donc essentiellement d'étudier $H\backslash E_{p,\lambda}$, ce à quoi je me limiterai désormais.

Comme aux paragraphes précédents, la démarche va être la suivante : on représente l'isomorphisme formel de l'équation $\{\omega = 0\} \in E_{p,\lambda}$ avec l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$ par des isomorphismes sectoriels convenables, et la classification cherchée s'obtient en écrivant l'obstruction au recollement de ces isomorphismes sectoriels. De façon précise, posons $X = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$, $S = \mathbf{T} \times \{0\} \times \{0\}$, et notons π la projection $(\theta, r, y) \mapsto (re^{i\theta}, y)$. On considère sur S le faisceau Γ défini ainsi : si $\theta_0 \in S$, un élément de Γ_{θ_0} est défini par une fonction h, holomorphe dans $|\arg x - \theta_0| < \epsilon$, $|x| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$, admettant un développement asymptotique quand $x \to 0$ au sens suivant : il existe une série formelle $y + \sum_{n\geq 2} a_n(y)x^n$, les a_n holomorphes dans $|y| < \epsilon$ telle que, pour tout p, on ait

$$|h(x,y) - y - \sum_2^p a_n(y)x^n| \leq c_p |x|^{p+1} .$$

Par Cauchy, de tels développements se dérivent encore terme à terme en x et y. On identifie h à la transformation $(x,y) \mapsto (x, h(x,y))$, et Γ est alors un faisceau de groupes sur S. Enfin, on désigne par Γ_∞ le sous-faisceau de groupes de Γ formé des transformations tangentes d'ordre ∞ à l'identité le long de $x = 0$, i.e. celles pour lesquelles les a_n sont tous nuls.

Ceci posé, soit $\Gamma_\infty(p,\lambda)$ le sous-faisceau de Γ_∞ formé des transformations qui laissent fixe l'équation $\omega_{p,\lambda} = 0$. Le résultat fondamental de Martinet-Ramis est le suivant :

THÉORÈME 4.5. - Les orbites de H dans $E_{p,\lambda}$ sont en bijection canonique avec les éléments de $H^1(S,\Gamma_\infty(p,\lambda))$.

L'application $E_{p,\lambda} \to H^1(S,\Gamma_\infty(p,\lambda))$ se fabrique de manière analogue à ce qu'on a fait au § 1 ; on doit utiliser ici un théorème d'existence d'isomorphismes sectoriels dû à Hukuhara-Kimura-Matuda [H-K-M] (il y a ici une subtilité sur les développements asymptotiques "faibles" et "forts" que je passe sous silence); que cette application soit une injection sur les orbites est immédiat, comme au § 1 .

Enfin, pour démontrer la surjectivité, on raisonne comme au § 3 ; il suffit de démontrer que l'application $H^1(S,\Gamma_\infty) \to H^1(S,\Gamma)$ a une image triviale ; ce dernier point s'établit, par exemple, à l'aide du théorème de Newlander-Nirenberg (ici dans la première étape, on doit oublier la structure holomorphe en x et y ; d'où la nécessité, pour la récupérer d'utiliser vraiment Newlander-Nirenberg à 2 variables).

Explicitons l'ensemble $H^1(S,\Gamma_\infty(p,\lambda))$ dans le cas particulier $p = 1$, $\lambda = 0$ (le cas général est à peine plus compliqué). Un élément de $\Gamma_\infty(p,\lambda)_{\theta_0}$ se représente par une fonction $h(x,y)$ holomorphe dans $D_\epsilon \cap \{|y| < \epsilon\}$, avec D_ϵ défini par $|\arg x - \theta_0| < \epsilon$, $|x| < \epsilon$; de plus, h doit être asymptote à y lorsque $x \in D_\epsilon$, $x \to 0$. Notant encore h l'application $(x,y) \to (x, h(x,y))$ la condition que h fixe l'équation $\omega_{2,0} = 0$ s'écrit $\omega_{2,0} \wedge \omega_{2,0} \circ h = 0$; explicitement, en se rappelant qu'on a $\omega_{2,0} = x^2 dy - y dx$, ceci s'écrit $x^2 \frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} = h$; en posant $h(x,y) = \sum_{n\geq 0} h_n(x) y^n$, il vient $x^2 h_n' = (1-n)h_n$, d'où $h_n = a_n \exp(\frac{n-1}{x})$.

La série $\Sigma h_n(x)y^n$ doit converger dans $x \in D_\epsilon$, $|y| < \epsilon$ et être asymptote à y si $x \to 0$; on doit alors distinguer 3 cas :

i) on a $|\theta_0| < \frac{\pi}{2}$; alors $a_1 = 1$, $a_n = 0$, pour $n \geq 1$, et a_0 est arbitraire ; donc sur l'ouvert $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, $\Gamma_\infty(1,0)$ est un faisceau constant isomorphe à $\mathbb{C}$.

ii) Si $|\theta_0-\pi| < \frac{\pi}{2}$, on a $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la série $\sum_2^\infty a_n t^n$ est n'importe quelle série convergente à l'origine ; donc sur cet ouvert, $\Gamma_\infty(1,0)$ est un faisceau constant isomorphe au groupe G des difféomorphismes de $(\mathbb{C},0)$ tangents à l'identité.

iii) Si $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\Gamma_\infty(1,0)_{\theta_0}$ se réduit à l'identité.

En considérant le recouvrement de S par les deux ouverts $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, on en déduit immédiatement l'isomorphisme suivant, qui précise le théorème 4.3,

(4.6) $H^1(S,\Gamma_\infty(1,0)) \simeq \mathbb{C} \times G$.

Pour terminer, disons un mot de l'<u>holonomie</u> des équations de $E_{p,\lambda}$: une telle équation admet $x = 0$ comme variété intégrale (on l'appellera la "variété invariante" de l'équation) ; l'holonomie est alors définie par l'action d'un lacet autour de l'origine dans $x = 0$ sur une section transverse du feuilletage défini par notre équation ; c'est un élément de $F = \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ défini à conjugaison près. Par exemple, pour l'équation $\omega_{1,0} = 0$, on vérifie tout de suite que cette holonomie est représentée justement par la transformation $g(x) = \frac{x}{1-x}$ dont il a été question aux § 1 à 3 .

Prenons maintenant une équation $\in E_{1,0}$, Martinet et Ramis, en utilisant les résultats précédents, montrent que son holonomie est formellement conjuguée à g sous l'action de $\hat{F}$ et que l'application $E_{1,0} \mapsto$ "holonomie" est une injection de $H\backslash E_{1,0}$ $(\simeq \mathbb{C}\times G)$ dans l'ensemble des classes de conjugaison de F formellement conjuguées à g ; ces dernières sont visiblement en bijection avec les classes de conjugaison de G , formellement conjuguées par $\hat{G}$ à g , qui ont été classées au § 1 . L'application est la suivante : si $(a, t(1+h(t))) \in \mathbb{C}\times G$, la fonction Σ associée à son image est donnée par

$$\begin{cases} \Sigma(w) = \log(1+h(e^{2\pi i w})) & \text{dans } \operatorname{Im} w \gg 0 \\ \Sigma(w) = \log(1+ae^{-2\pi i w}) & \text{dans } \operatorname{Im} w \ll 0 . \end{cases}$$

On ne trouve donc pas toutes les classes, mais seulement un sous-espace de dimension et codimension infinie (Σ est arbitraire dans $\mathrm{Im}\, w \gg 0$, mais pas dans $\mathrm{Im}\, w \ll 0$).

Plus généralement, si E'' désigne l'ensemble des équations considérées au début de ce paragraphe, Martinet et Ramis montrent que l'application : équation $\mapsto$ (holonomie le long de la variété invariante) donne une injection de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)\backslash E''$ dans $\mathrm{ad}\, F\backslash G$, et ils déterminent l'image de cette application en terme des invariants d'Ecalle. Ceci fait agréablement le lien entre les deux problèmes étudiés dans cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[B] G. BIRKHOFF, The generalized Riemann problem for linear differential equations, Proc. Am. Ac. A. Sc. 49 (1913), 521-568.

[D] H. DULAC, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Jal. Ec. Polytechnique 2, 9 (1904), 1-125.

[E.1] J. ECALLE, Théorie des invariants holomorphes, Public. Math. d'Orsay n° 67, 7409 (1974).

[E.2] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes et leurs applications, tomes I, II, III, à paraître.

[H-K-M] H. HUKUHARA, T. KIMURA, T. MATUDA, Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Publ. Math. Soc. of Japan, (1961).

[K] T. KIMURA, On the iteration of analytic functions, Funk. Eqvacioj 14-3 (1971), 197-238.

[M-M] J.F. MATTEI et R. MOUSSU, Intégrales premières et holonomie, Ann. Sc. E.N.S. 4-13 (1980), 469-523.

[M-R] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publ. Sc. I.H.E.S. (à paraître).

[N-N] A. NEWLANDER, L. NIRENBERG, Complex coordinates in almost-complex manifold, Ann. Math. 65(1957), 391-404.

[Si] Y. SIBUYA, Equations différentielles linéaires dans le domaine complexe (en japonais), Kinokuniya, Tokyo (1976).

[S] C.L. SIEGEL, Iteration of analytic functions, Ann. of Math. 43 (1942), 607-616.

N.B.— Récemment, S.M. Voronin a obtenu des résultats très voisins de celui d'Ecalle qui est exposé ici ; voir

S.M. VORONIN, Classification des germes d'applications conformes $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ tangents à l'identité, Funkt. Analyz 15-1(1981), 1-17.

Bernard MALGRANGE

Institut Fourier
B.P. 116
F-38402 SAINT-MARTIN-D'HERES CEDEX