Astérisque

MONIQUE HAKIM

Valeurs au bord de fonctions holomorphes bornées en plusieurs variables complexes

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki, exp. n° 613, p. 293-305

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__293_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 613 Juin 1983

VALEURS AU BORD DE FONCTIONS HOLOMORPHES BORNÉES EN PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

par Monique HAKIM

I. INTRODUCTION

1.1. Notations

L'espace $\mathbb{C}^p$ des p-uples $z = (z_1, z_2, \ldots, z_p)$ est muni du produit hermitien $\langle z,w\rangle = \sum_{i=1}^{p} z_i \overline{w}_i$, de la norme $|z| = \langle z,z\rangle^{1/2}$. On désigne par B la boule unité correspondante

$$B = \{z \in \mathbb{C}^p \,;\, |z| < 1\} \ ,$$

par S son bord

$$S = \{\zeta \in \mathbb{C}^p \,;\, |\zeta| = 1\} \ .$$

S est muni de la mesure de Lebesgue σ normalisée par $\sigma(S) = 1$.

On utilise les notations classiques suivantes :

$C(S)$ (resp. $C(\overline{B})$) désigne l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur S (resp. sur $\overline{B} = B \cup S$).

$H(B)$ désigne l'algèbre des fonctions holomorphes dans B .

$A(B) = H(B) \cap C(\overline{B})$.

$H^\infty(B)$ sera l'objet principal de notre étude et désigne l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans B .

Une fonction $f \in H^\infty(B)$ admet en presque tout point $\zeta \in S$ une limite radiale, qui sera notée en tout point où elle existe

$$f^*(\zeta) = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(r\zeta) \ .$$

Rappelons que si f appartient à $H^\infty(B)$, f coïncide avec l'intégrale de Poisson $P[f^* d\sigma]$. En particulier on a alors

$$\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty \ .$$

où la norme "sup essentiel", $\| \ \|_\infty$, est prise dans un cas dans B et dans l'autre sur S .

1.2. Le problème de l'existence des fonctions intérieures

On appelle fonction intérieure une fonction $f \in H^{\infty}(B)$ non constante telle que $|f^*| = 1$ p.p. sur S.

Le terme de fonction intérieure a été introduit par A. Beurling dans un papier de 1949 ([4]) pour des fonctions d'une variable complexe. En dimension 1, on sait caractériser les fonctions intérieures ; ce sont les fonctions de la forme

$$f(z) = cB(z)\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right\}, \qquad (|z| < 1),$$

où c est une constante de module 1 ; $B(z)$ est un produit de Blaschke (c'est-à-dire un produit de la forme

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}, \qquad (|z| < 1),$$

formule dans laquelle k est un entier ≥ 0, et $\{a_n\}$ est une suite de nombres complexes, $a_n \neq 0$, $|a_n| < 1$, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < +\infty \quad),$$

et μ est une mesure positive bornée, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le problème naturel de savoir s'il existait des fonctions intérieures dans la boule unité, en dimension $p > 1$ a été posé par W. Rudin vers l'année 1965. Il est facile de voir que contrairement au cas de la dimension 1 (ex. $f(z) = z$) il ne peut pas exister de fonction intérieure continue, car si $f \in A(B)$, on a

$$f(B) \subset f(S).$$

Ceci résulte aussitôt du phénomène de Hartogs : toute fonction holomorphe dans $B \cap \{|z| > r\}$ où r est un nombre $0 < r < 1$ se prolonge à B. Si f évitait une valeur $f(z_0)$, avec $z_0 \in B$, la fonction $(f - f(z_0))^{-1}$ serait holomorphe dans $B \cap \{|z| > r\}$ pour r assez proche de 1 et donc se prolongerait à B.

En fait, W. Rudin a émis la conjecture que de telles fonctions ne devaient pas exister (voir le ch. 19 de [13] qui est presqu'entièrement consacré à cette question), la condition imposée entraînant un comportement très pathologique au bord. Citons par exemple

PROPOSITION 1.2.1 (Rudin [13] prop. 19.1.3).— *Soit* $f \in H^{\infty}(B)$ *et soit* U *un ouvert non vide de* S *tel qu'on ait*

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} |f(r\zeta)| = 1 \qquad \textit{p.p. sur } U,$$

alors U *contient un* G_δ *dense* H *tel que* f *envoie tout rayon aboutissant en* H *sur un sous-ensemble dense dans le disque unité de* $\mathbb{C}$.

Donc non seulement f ne se prolonge continûment en aucun point du bord, mais l'oscillation de f en tout point $\zeta \in S$ est extrêmement forte.

Et pourtant, comme nous allons le voir, il existe des fonctions intérieures. Mais avant d'énoncer des résultats plus précis, considérons le problème d'un point de vue un peu différent.

1.3. Un problème de composition des dérivations

Une des raisons qui font que, contrairement à la dimension 1 , il ne peut pas y avoir de fonctions intérieures trop régulières en dimension $p > 1$, est que si $f \in H^\infty(B)$, la fonction f^* définie p.p. sur S vérifie au sens des distributions les équations de Cauchy-Riemann tangentielles, à savoir

$$D_{ij} f^* = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq p$$

où $D_{ij} = z_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - z_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$.

Or on sait (voir par exemple les résultats de M.S. Baouendi et F. Trèves [3]), que si $g_0 \in L^\infty(S)$ vérifie au sens des distributions les équations de C.R. tangentielles, il existe une fonction $g \in H^\infty(B)$ telle que $g^* = g_0$ p.p. (on a en fait même un théorème de prolongement local). Le problème de l'existence d'une fonction intérieure, conduisait alors à formuler la question suivante :

Question 1.3.1.– Soit D un opérateur différentiel du premier ordre linéaire à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in L^\infty(U)$ telle que $1/f \in L^\infty(U)$. On suppose que $Df = 0$ au sens des distributions, a-t-on aussi $D(1/f) = 0$?

Si $f \in L^\infty(U)$ vérifie $Df = 0$, il résulte facilement du lemme de Friedricks ([10] lemma 5.2.2) qu'on a $Df^n = 0$ pour tout entier $n > 0$, donc $D(P(f)) = 0$ pour tout polynôme P . Or si f est continue et ne s'annule pas en ζ_0 , on peut approcher uniformément $1/f$ au voisinage de ζ_0 par des polynômes en f et par suite on a aussi $D(1/f) = 0$.

Une réponse négative à la question 1.3.1 va être fournie par les exemples qui suivent. Il est clair qu'une fonction intérieure f donne un contre-exemple, car si $1/f^*$, qui est bornée vérifiait les équations de Cauchy-Riemann tangentielles, elle se prolongerait à B et f serait inversible dans $H^\infty(B)$, ce qui est impossible (d'après la proposition 1.2.1 par exemple). Mais le théorème 2.2 suivant va donner un contre-exemple avec une fonction $f \in L^\infty(U)$ qui est même analytique dans un ouvert de mesure totale de U .

1.4. Les valeurs au bord de fonctions pluriharmoniques

Rappelons qu'une fonction pluriharmonique dans B est une fonction de la forme $u = \operatorname{Re} g$ avec $g \in H(B)$. Trouver une fonction intérieure revient à trouver une fonction pluriharmonique dans B qui vérifie

$$(1.4.1) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} g < 0 & \text{dans } B \\ \operatorname{Re} g^* = 0 & \text{p.p. sur } S . \end{cases}$$

En effet si f est une fonction intérieure, il suffit de prendre pour g la fonction $\frac{f-1}{f+1}$ et inversement si $\operatorname{Re} g$ vérifie les conditions (1.4.1), la fonction $f = e^g$ est une fonction intérieure.

C'est sous cette forme que A.B. Aleksandrov a résolu le problème. Remarquons que l'ensemble où $\operatorname{Re} g^* = 0$ ne peut pas contenir un G_δ de mesure positive. On a en effet

PROPOSITION 1.4.2 (Sibony [16]).— *Soit* φ *une fonction réelle de classe* C^3 *sur* S *et soit* u *une fonction pluriharmonique dans* B *qui vérifient*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} u(r\zeta) = \varphi(\zeta)$$

sur un G_δ *dense,* E, *de* S, *alors*

a) *l'intégrale de Poisson* $\tilde{\varphi} = P[\varphi d\sigma]$ *est pluriharmonique*

b) *si* $\sigma(E) > 0$, *on a* $\tilde{\varphi} = u$.

1.5. Le cas de $A(B)$

DÉFINITION 1.5.1.— *On appelle* ensemble de module maximum *un fermé* E *de* S *qui vérifie*

$$E = \{\zeta \,;\, |f(\zeta)| = \|f\|_\infty\}$$

pour une fonction $f \in A(B)$ *non constante.*

DÉFINITION 1.5.2.— *Un fermé* F *de* S *est dit* ensemble pic *pour* $A(B)$ *s'il existe une fonction* $f \in A(B)$ *telle qu'on ait* $f/F = 1$ *et* $|f| < 1$ *sur* $\overline{B} \setminus F$.

Un ensemble de module maximum est nécessairement distinct de S et un ensemble pic est nécessairement de mesure nulle, mais encore très récemment on ignorait jusqu'à quel point ces ensembles pouvaient être grands. On sait maintenant que la mesure d'un ensemble de module maximum peut être arbitrairement proche de 1 et que la dimension de Hausdorff d'un ensemble pic peut être égale à celle du bord, c'est-à-dire $2p-1$.

II. ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

L'existence des fonctions intérieures a été démontrée deux fois à quelques semaines d'intervalle indépendamment et par des méthodes différentes.

Le première démonstration est due à A.B. Aleksandrov en novembre 81, qui donne en fait un énoncé bien meilleur.

THÉORÈME 2.1 (Aleksandrov [1]).— *Soit* φ *une fonction semi-continue inférieurement positive intégrable sur* S . *Il existe une mesure* μ *positive bornée, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, vérifiant* $\|\mu\| = \int_S \varphi d\sigma$, *telle que l'intégrale de Poisson* $P[\varphi d\sigma - d\mu]$ *soit pluriharmonique dans* B .

COROLLAIRE.— *Il existe des fonctions intérieures.*

Il suffit en effet de prendre $\varphi = 1$. Alors $u = P[d\mu]$ est une fonction pluriharmonique positive dans B dont les valeurs au bord sont presque partout nulles dans S (parce que μ est singulière), c'est dont la partie réelle d'une fonction $f \in H(B)$ telle que e^{-f} soit une fonction intérieure dans B .

En fait le résultat d'Aleksandrov est bien plus fort puisqu'il prouve que les valeurs au bord des fonctions pluriharmoniques positives dans B peuvent être égales p.p. à n'importe quelle fonction s.c.i. positive intégrable.

Dans le même temps, N. Sibony et moi-même démontrions un résultat de nature un peu différente.

THÉORÈME 2.2 (Hakim et Sibony [6]).— *Soit* φ *une fonction continue positive sur* S *; pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe une fonction* f *et un ouvert* U *de mesure totale de* S *tels qu'on ait*

a) $f(0) = 0$,

b) $f \in H^\infty(B)$ *et* f *est holomorphe au voisinage de* $\bar{B} \cup U$,

c) $\big| |f(\zeta)| - \varphi(\zeta) \big| \leq \varepsilon$ *pour tout* $\zeta \in U$.

En particulier, par ce procédé, on voit qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $f \in H^\infty(B)$ et un ouvert U de mesure totale de S qui vérifient $f(0) = 0$, $\|f\|_\infty \leq 1$, f est holomorphe au voisinage de $\bar{B} \cup U$ et $|f(z)| \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $z \in U$.

En décembre 81, E. Løw ([11]) qui ignorait le résultat d'Aleksandrov reprenait la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 2.2 et montrait qu'en raffinant la construction, on pouvait obtenir des fonctions intérieures. Plus précisément, il démontrait le théorème suivant (qui est inclus dans 2.1).

THÉORÈME 2.1'.— *Soit* φ *une fonction s.c.i. positive bornée dans* S *, il existe une fonction* $f \in H^\infty(B)$ *, non constante qui vérifie* $|f^*| = \varphi$ *p.p..*

Dans le cas des fonctions de $A(B)$, par une méthode voisine de celle de son théorème 2.1, A.B. Aleksandrov a obtenu le résultat remarquable suivant : la mesure des ensembles de module maximum (déf. 1.5.1) peut être arbitrairement proche de 1 . Plus précisément il prouve le résultat

THÉORÈME 2.3 (Aleksandrov [2]).— a) *Soit* φ *une fonction bornée s.c.i. sur* S *, et soit* $\varepsilon > 0$ *. Il existe une fonction* $f \in A(B)$ *, non constante qui vérifie*

$$\operatorname{Re} f \leq \varphi \quad \textit{sur } S$$

et

$$\sigma\{z \,;\, \operatorname{Re} f(z) \neq \varphi(z)\} < \varepsilon \,.$$

b) *Si de plus* φ *est positive, il existe une fonction* $g \in A(B)$ *non constante telle qu'on ait*

$$|g| \leq \varphi \quad \textit{sur } S$$

et

$$\sigma\{z \,;\, |g(z)| \neq \varphi(z)\} < \varepsilon \,.$$

La partie b) du théorème est évidemment conséquence de a) appliqué à $\varphi_1 = \operatorname{Log} \varphi$.

Ceci est en contraste avec la situation des ensembles de module maximum pour des fonctions plus régulières. N. Sibony a montré par exemple [15] que si $f \in A(B)$ est lipschitzienne on a $\sigma\{z \,;\, |f(z)| = \|f\|_\infty\} = 0$.

Il est intéressant de remarquer que les ensembles de module maximum sont topologiquement petits ; on a en effet

THÉORÈME 2.4 (Duchamp et Stout [5]).— *La dimension topologique des ensembles de module maximum dans les domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^p$ est inférieure ou égale à p .*

En ce qui concerne les ensembles pics pour $A(B)$, A.E. Tumanov [18] avait donné un exemple pic de dimension de Hausdorff 2,5 dans la boule de $\mathbb{C}^2$. Ceci vient d'être amélioré par B. Stensønes Henriksen qui prouve le joli résultat suivant

THÉORÈME 2.5 (Stensønes Henriksen [17]).— *Tout domaine D strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^p$ à bord C^∞ a des ensembles pics pour $A(D)$ de dimension de Hausdorff $2p-1$.*

Les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 ci-dessus sont énoncés dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^p$. Ils sont en fait vrais dans tout domaine strictement pseudoconvexe à bord C^2 . Ils sont vrais aussi dans des domaines faiblement pseudoconvexes à bord C^∞ , mais il faut alors remplacer S par l'ensemble des points de stricte-pseudoconvexité du bord et la mesure σ par la mesure de Hausdorff h^{2p-1} sur S . Toutes ces généralisations ont été faites par E. Løw dans sa thèse [12]. On trouvera aussi dans la thèse de Løw un excellent exposé de tous les résultats énoncés plus haut.

Citons aussi l'article de W. Rudin [14] qui reprend les idées d'Aleksandrov et en déduit d'intéressantes applications à l'analyse fonctionnelle.

L'article d'Aleksandrov [1] contient aussi d'autres résultats qui ne sont pas exposés ici, en particulier sur l'existence de fonctions intérieures qui coïncident avec une fonction donnée sur un sous-ensemble de non unicité de $A(B)$.

Signalons enfin que la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 2.2 est une méthode constructive qui permet d'obtenir facilement des fonctions holomorphes bornées. En adaptant ce type de construction à chaque problème, on a pu donner d'autres théorèmes d'existence apportant des éclaircissements sur le comportement de ces fonctions : sur l'ensemble de leurs zéros [7], sur leurs limites admissibles [8], sur les valeurs au bord de leur module [9].

III. QUELQUES PREUVES

Il est difficile de donner une démonstration complète des théorèmes cités sans entrer dans des calculs assez longs. Mais en réunissant les preuves des théorèmes 2.1 et 2.2, on peut éviter un peu de technique et comprendre mieux les idées mises en oeuvre. C'est donc ce mode d'exposition suivi par E. Løw dans [12] pour étendre le théorème 2.3 à des domaines plus généraux que j'ai retenu ici.

3.1. Une idée de la preuve du théorème 2.2

Il s'agit étant donnée $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$ de l'approcher à ε près sur un ouvert U de mesure totale de S par le module d'une fonction $f \in H^\infty(B)$, holomorphe au voisinage de $B \cup U$.

La construction n'utilise que des calculs très élémentaires. Elle consiste à ajouter des combinaisons linéaires finies

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_{\zeta_j,m} \tag{3.1.1}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\zeta_j \in S$, $m \in \mathbb{N}$, de fonctions du type

$$u_{\zeta,m}(z) = e^{-m(1-\langle z,\zeta\rangle)} .$$

Ces fonctions vérifient

$$u_{\zeta,m}(\zeta) = 1 ,$$
$$|u_{\zeta,m}(z)| < 1 , \qquad \text{pour } z \in \overline{B} \setminus \{\zeta\} ,$$

et mour m assez grand, elles sont arbitrairement petites en dehors d'un voisinage donné de ζ . On peut facilement contrôler les paramètres en sorte que la fonction décrite en (3.1.1) soit voisine de α_j dans un voisinage de ζ_j pour $j = 1,2,\dots,N$ et arbitrairement petite en dehors d'un voisinage un peu plus grand de $\bigcup_j \{\zeta_j\}$. On construit alors la fonction f comme somme d'une série de la façon suivante : on se donne une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres > 0 en sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \le \varepsilon$$

et on définit par récurrence les fonctions u_n , f_n

$$f_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n ,$$

et l'ouvert U_n . On prend $u_0 = 0$, $U_0 = \emptyset$. A l'étape $n-1$, on a une fonction f_{n-1} et un ouvert U_{n-1} de S tels que

$$|f_{n-1}(z)| \le \varphi(z) + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} \qquad \forall z \in S \tag{3.1.2}$$

$$\varphi(z) - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}) \le |f_{n-1}(z)| \qquad \forall z \in U_{n-1} \tag{3.1.3}$$

$$\sigma(U_{n-1}) = \sigma(\overline{U}_{n-1}) . \tag{3.1.4}$$

On définit f_n en rajoutant à la fonction f_{n-1} une fonction u_n du type (3.1.1) qui corrige sa valeur en un nombre fini de points $\{\zeta_j\}$ correctement choisis dans

$S \setminus \overline{U}_{n-1}$, en sorte qu'on obtienne

(3.1.2') $$|f_n(z)| \le \varphi(z) + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \qquad \forall z \in S$$

$$|u_n(z)| \le \varepsilon_n \qquad \forall z \in U_{n-1}$$

d'où encore sur U_{n-1}

(3.1.3') $$\varphi(z) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) \le |f_n(z)| \qquad \forall z \in U_{n-1}$$

mais en dehors de U_{n-1} on a gagné un peu de place. C'est-à-dire qu'on a aussi l'inégalité (3.1.3') sur un ouvert W_n disjoint de U_{n-1} qui est une réunion de voisinages des points ζ_j . On pose $U_n = U_{n-1} \cup W_n$. Une évaluation précise (voir [6]) donne

(3.1.5) $$\sigma(W_n) = \sigma(\overline{W}_n) \ge \beta_n(1 - \sigma(U_{n-1}))$$

avec

$$\beta_n = C/[\mathrm{Log}(A/\varepsilon_n)]^{(2p-1)/2}$$

où A et C sont des constantes positives. Il suffit alors de choisir la suite $\{\varepsilon_n\}$ en sorte qu'on ait

(3.1.6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \le \varepsilon$$

et

(3.1.7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$$

(ce qui est possible étant donné le comportement des β_n). On en déduit que si $U = \bigcup U_n$, on a $\sigma(U) = \lim \sigma(U_n) = 1$ sinon les relations (3.1.5) et (3.1.7) impliqueraient $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(W_n) = +\infty$, ce qui est en contradiction avec $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(W_n) \le 1$.

La suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts d'un voisinage de $B \cup U$, vers une fonction f qui a les propriétés voulues.

3.2. Preuve du théorème 2.1

La démonstration du théorème 2.1 repose essentiellement sur un lemme d'approximation (lemme 3.2.2) dans $H^p(B)$ pour $0 < p < 1$. Dans un souci de simplification, et en suivant l'exemple de [12] et [14], nous l'exposons ici pour $p = \frac{1}{2}$, la propriété importante étant qu'on a $p < 1$.

De la construction expliquée au paragraphe précédent nous ne retiendrons ici qu'un résultat plus faible sous la forme du

Lemme 3.2.1.– *Soit* φ *une fonction continue* > 0 *sur* S . *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction entière* f *et un ouvert* U *de* B *tels que*

(1) $f(0) = 0$,

(2) $|f(z)| < \varphi(z)$, $\forall z \in S$,

(3) $|f(z)| \ge \frac{1}{2}\varphi(z)$, $\forall z \in U$,

(4) $\sigma(U) > 1 - \varepsilon$.

On en déduit alors

Lemme 3.2.2 (Lemme principal d'Aleksandrov [1]).— *Il existe une constante* $\gamma < 1$ ($\gamma = \frac{127}{128}$ *convient*) *qui a la propriété suivante :*

Pour toute fonction $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$, *il existe* $F \in A(B)$ *telle que*

(1) $\operatorname{Re} F(0) = 0$,

(2) $\varphi - \operatorname{Re} F > 0$ *sur* S ,

(3) $\int_S |F|^{1/2} d\sigma \leq \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$,

(4) $\int_S (\varphi - \operatorname{Re} F)^{1/2} d\sigma \leq \gamma \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$.

Démonstration du lemme 3.2.2.— La fonction φ étant fixée, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait

$$\int_V \varphi^{1/2} d\sigma \leq \frac{1}{128} \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$$

pour tout sous-ensemble mesurable V de S tel que $\sigma(V) \leq \varepsilon$. Soient alors f une fonction entière et U un ouvert de S tels que les propriétés du lemme 3.2.1 soient vraies pour φ et le nombre $\varepsilon > 0$ obtenu ci-dessus. Les quatre fonctions $\pm f$, $\pm if$ vérifient les propriétés (1) (2) (3) du lemme 3.2.2 (et même mieux puisqu'on a $|f| \leq \varphi$). Montrons que l'une d'elles au moins vérifie la propriété (4).

On utilise pour cela l'inégalité, vraie pour $x \in [-1,1]$

$$\frac{1}{2}\{(1-x)^{1/2} + (1+x)^{1/2}\} \leq 1 - \frac{1}{8} x^2 \tag{3.2.1}$$

(les termes suivants du développement en série sont de degré pair et à coefficients négatifs). On en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_S \{(\varphi - \operatorname{Re} f)^{1/2} + (\varphi + \operatorname{Re} f)^{1/2} + (\varphi - \operatorname{Im} f)^{1/2} + (\varphi + \operatorname{Im} f)^{1/2}\} d\sigma \\
&= \int_S \varphi^{1/2} \left\{\left(1 - \operatorname{Re} \frac{f}{\varphi}\right)^{1/2} + \left(1 + \operatorname{Re} \frac{f}{\varphi}\right)^{1/2} + \left(1 - \operatorname{Im} \frac{f}{\varphi}\right)^{1/2} + \left(1 + \operatorname{Im} \frac{f}{\varphi}\right)^{1/2}\right\} d\sigma \\
&\leq \int_S \varphi^{1/2}\left(4 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{Re} \frac{f}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{Im} \frac{f}{\varphi}\right)^2\right) d\sigma = \int_S \varphi^{1/2}\left(4 - \frac{1}{4}\left|\frac{f}{\varphi}\right|^2\right) d\sigma \\
&\leq \int_U \varphi^{1/2}\left(4 - \frac{1}{16}\right) d\sigma + 4\int_{S \setminus U} \varphi^{1/2} \leq \left(\frac{63}{16} + \frac{4}{128}\right) \int_S \varphi^{1/2} d\sigma = \frac{127}{32} \int_S \varphi^{1/2} d\sigma .
\end{aligned}$$

Donc un des quatre termes de la somme envisagée est plus petit que $\frac{127}{128} \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$.

Démonstration du théorème 2.1

On peut sans restreindre la généralité supposer φ continue > 0 . Si φ est s.c.i., $\varphi > 0$, on peut en effet la décomposer en une somme $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ de φ_n continues positives. Si pour chaque φ_n on obtient une mesure $\mu_n > 0$ singulière telle que $P[\varphi_n d\sigma - \mu_n]$ soit pluriharmonique et que $\|\mu_n\| = \|\varphi_n\|_1$, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ converge en norme vers une mesure μ qui a les propriétés voulues.

Le lemme 3.2.2 donne, par récurrence, une suite de fonctions $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $F_k \in A(B)$ telles que

(1) $F_k(0) = 0$,

(2) $\varphi - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} F_i > 0$ sur S ,

(3) $\int_S |F_k|^{1/2} d\sigma \leq \gamma^{k-1} \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$,

(4) $\int_S \left(\varphi - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} F_i\right)^{1/2} d\sigma \leq \gamma^{k} \int_S \varphi^{1/2} d\sigma$.

Pour passer de l'étape k à l'étape $k+1$, il suffit d'appliquer le lemme 3.2.2 à la fonction $\varphi_k = \varphi - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} F_i$.

Comme on a

$$\int_S \left(\sum_{k=1}^{\infty} |F_k|\right)^{1/2} d\sigma \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_S |F_k|^{1/2} d\sigma$$

l'inégalité (3) montre que la série $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ converge vers une fonction $h \in H^{1/2}(B)$ uniformément sur les compacts de B ([13] th. 7.2.5). Sur S , $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} F_k$ converge donc vers $\operatorname{Re} h^*$ pour la métrique de $L^{1/2}(\sigma)$ ([13] th. 5.6.6, 5.6.8). D'où $\operatorname{Re} h^* = \varphi$ p.p. sur S d'après (4).

D'autre part comme on a

$$\int_S F_k d\sigma = F_k(0) = 0 ,$$

(2) implique que

$$\|\varphi - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} F_i\|_1 = \|\varphi\|_1 .$$

La suite $\{\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} F_i\}$ est donc bornée dans $L^1(\sigma)$; on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement (dans le dual de $C(S)$) vers une mesure dont nous écrivons la décomposition de Lebesgue $\psi d\sigma - \mu$, avec $\psi \in L^1(\sigma)$ et $\mu \perp \sigma$. On en déduit que

$$P[\psi d\sigma - d\mu] = \operatorname{Re} h$$

et par suite $\operatorname{Re} h^* = \psi$ p.p. sur S . Donc $\psi = \varphi$ p.p.. La mesure μ étant limite faible d'une suite de fonctions positives (d'après (2)) est ≥ 0 et on a de plus

$$\|\mu\| = \int_S d\mu = \int_S \varphi d\sigma = \|\varphi\|_1$$

puisque $h(0) = 0$ et qu'on a $\varphi = \psi$ p.p.. Ce qui achève la démonstration.

3.3. <u>Preuve du théorème</u> 2.3

Le théorème 2.3 d'Aleksandrov est rapporté dans la thèse de E. Løw comme "communication privée" et s'y trouve étendu à des domaines plus généraux.

Nous terminerons cet exposé en donnant les grandes lignes de cette démonstration.

Des lemmes 3.2.1 et 3.2.2 on déduit le

Lemme 3.3.1.– *Soit* φ *une fonction continue* > 0 *sur* S *et soit* γ *la constante du lemme* 3.2.2.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ *, il existe une fonction entière* h_k *telle que*

(a) $\operatorname{Re} h_k < \varphi$ *sur* S , $\|\varphi - h_k\|_\infty \leq 2^k \|\varphi\|_\infty$,

(b) $\|h_k\|_\infty \leq 2^k \|\varphi\|_\infty$,

(c) $\int_S (\varphi - \mathrm{Re}\, h_k)^{1/2} d\sigma \leq \gamma^k \int_S |\varphi|^{1/2} d\sigma$,

(d) *soit* $\varepsilon > 0$ *et soit* $E = \{z \in S \,;\, \varphi(z) - \mathrm{Re}\, h_k(z) \geq \varepsilon\}$ *alors*

$$\sigma(E) \leq (\gamma^k/\varepsilon^{1/2}) \int_S \varphi^{1/2} d\sigma \,.$$

Les points (a) (b) (c) s'obtiennent par une récurrence facile à partir des lemmes 3.2.1 et 3.2.2 et (d) est conséquence de (c).

En fait pour la démonstration du théorème 2.3 nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.3.2.— *Soit* $\varepsilon' > 0$ *et soit* γ *la constante du lemme* 3.2.2, *il existe une constante* $K > 0$ *telle que la propriété suivante soit vraie : pour toute fonction* $\varphi > 0$ *continue sur* S *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une fonction entière* h_k *telle que :*

(a) $\mathrm{Re}\, h_k < \varphi$ *sur* S

(b) $\|h_k\|_\infty \leq 2^k K \|\varphi\|_\infty$

(c) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *soit* $E = \{z \in S \,;\, \varphi(z) - \mathrm{Re}\, h_k(z) \geq \varepsilon\}$, *on a*

$$\sigma(E) \leq (\varepsilon' \gamma^k \int_S \varphi^{1/2} d\sigma)/\varepsilon^{1/2} \,.$$

Ce dernier lemme est conséquence immédiate du lemme 3.3.1 en prenant pour h_k la fonction h_{N+k} du lemme précédent avec N assez grand pour qu'on ait $\gamma^N < \varepsilon'$. On a alors $K = 2^N$.

3.3.3. Preuve du théorème 2.3 : Il suffit, comme nous l'avons déjà remarqué de prouver le a) du théorème. D'autre part, on peut supposer φ continue sur S . En effet par le théorème de Lusin et le théorème d'extension de Tietze, on voit que, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe une fonction continue $\varphi_1 \leq \varphi$ qui coïncide avec φ sur un compact de S de mesure plus grande que $1 - \varepsilon_1$. En ajoutant à φ une constante et en multipliant le résultat par une constante convenable, on peut supposer de plus qu'on a $0 < \varphi < 1$. On applique alors le lemme 3.3.2 de façon répétée avec un ε' fixé qui sera précisé plus loin et dans (c) on prend à chaque étape pour ε , $\varepsilon_k = 4^{-k}$.

Pour $k = 1$, on obtient h_1 tel que

(a) $\mathrm{Re}\, h_1 < \varphi$ sur S

(b) $\|h_1\|_\infty \leq 2K$

(c) $\sigma\{z \,;\, \varphi - \mathrm{Re}\, h_1 \geq 1/4\} \leq 2\varepsilon'\gamma$.

On pose $\varphi_1 = \inf\{\varphi - \mathrm{Re}\, h_1 \,,\, 1/4\}$, et on définit la fonction $g_1 \in C(S)$ par $g_1 = \varphi - \mathrm{Re}\, h_1 - \varphi_1$ (on a donc $\varphi_1 > 0$, $g_1 \geq 0$ et $\sigma\{g_1 > 0\} \leq 2\varepsilon'\gamma$).

Ensuite par récurrence, on trouve des fonctions entières $h_1, \ldots, h_k$ et des fonctions continues positives $g_1, \ldots, g_k$ telles que

(a_k) $\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k} h_j + \sum_{j=1}^{k} g_j < \varphi$ sur S , $\|\varphi - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k} h_j - \sum_{j=1}^{k} g_j\|_\infty \leq 4^{-k}$

(b_k) $\|h_k\|_\infty \leq 4K2^{-k}$

(c_k) $\sigma\{z\,;\,g_k(z) > 0\} \leq 2\varepsilon'\gamma^k$.

Pour passer de k à $k+1$, on applique le lemme 3.3.2 à

$$\varphi_k = \varphi - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k} h_j - \sum_{j=1}^{k} g_j ,$$

par (b), on a

$$\|h_{k+1}\|_\infty \leq 2^{k+1}K\|\varphi_k\|_\infty \leq 2^{k+1}K4^{-k} ,$$

par (a), on a

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k+1} h_j + \sum_{j=1}^{k} g_j < \varphi ,$$

et on définit

$$\varphi_{k+1} = \inf\{\varphi - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k+1} h_j - \sum_{j=1}^{k} g_j \,,\, 4^{-(k+1)}\} ,$$

on a donc

$$0 < \varphi_{k+1} \leq 4^{-(k+1)} ,$$

et on définit g_{k+1} par $\varphi_{k+1} = \varphi - \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{k+1} h_j - \sum_{j=1}^{k+1} g_j$, on en déduit qu'on a $g_{k+1} \geq 0$ et par (c),

$$\sigma\{z\,;\,g_{k+1}(z) > 0\} \leq (\varepsilon'\gamma^{k+1}\int_S \varphi_k^{1/2}d\sigma)/2^{-(k+1)} \leq 2\varepsilon'\gamma^{k+1} .$$

On définit alors $h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j$ et $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$. D'après (b_k), la fonction h est dans $A(B)$. D'après (a_k), g est continue sur S et on a

$$\varphi = \mathrm{Re}\, h + g .$$

De plus on a

$$E = \{z \in S\,;\,\mathrm{Re}\,h(z) \neq \varphi(z)\} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{z \in S\,;\,g_j(z) > 0\} ,$$

d'après (c_k), la mesure de E est plus petite que

$$2\varepsilon'\sum_{j=1}^{\infty}\gamma^j = \varepsilon'\,\frac{2\gamma}{1-\gamma} ,$$

il suffit alors de choisir ε' assez petit pour avoir le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.B. ALEKSANDROV - *Existence of inner functions in the ball*, Matem. Sbornik, (June 1982), 147-163 (en russe).

[2] A.B. ALEKSANDROV - Cité par E. Løw dans [12].

[3] M.S. BAOUENDI and F. TRÈVES - *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. Math. 113(1981), 341-421.

[4] A. BEURLING - *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. 81(1949), 239-255.

[5] Th. DUCHAMP and E.L. STOUT - *Maximum modulus sets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31-3(1981), 37-69.

[6] M. HAKIM et N. SIBONY - *Fonctions holomorphes bornées dans la boule unité de* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 67(1982), 213-222.

[7] M. HAKIM et N. SIBONY - *Zéros des fonctions holomorphes bornées dans la boule unité de* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 260(1982), 469-474.

[8] M. HAKIM et N. SIBONY - *Fonctions holomorphes bornées et limites tangentielles*, Duke Math. Journal 50 n°1(1983), 133-141.

[9] M. HAKIM et N. SIBONY - *Valeurs au bord des modules de fonctions holomorphes*, Math. Ann. (1983), à paraître.

[10] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland.

[11] E. LØW - *A construction of inner functions on the unit ball in* $\mathbb{C}^p$, Invent. Math. 67(1982), 223-229.

[12] E. LØW - *Inner functions and boundary values in* $H^\infty(\Omega)$ *and* $A(\Omega)$ *in smoothly bounded pseudoconvex domain*, (Ph. D. Princeton University, June 1983).

[13] W. RUDIN - *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1974.

[14] W. RUDIN - *Inner functions in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Journal of funct. anal. 50 n°1(1983), 100-126.

[15] N. SIBONY - *Valeurs au bord de fonctions holomorphes et ensembles polynômialement convexes*, dans le Séminaire Pierre Lelong 1975-76, Lect. Notes in Math. vol. 578, Springer-Verlag (1977).

[16] N. SIBONY - Communication privée.

[17] B. STENSØNES HENRIKSEN - *A peak set of Hausdorff dimension* $2n-1$ *for the algebra* $A(D)$ *in the boundary of a domain* D *with* C^∞*-boundary in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 259(1982), 271-277.

[18] A.E. TUMANOV - *A peak set for the disc algebra of metric dimension 2,5 in the three-dimensional unit sphere*, Math. USSR Izv. 11(1977), 370-377.

Monique HAKIM
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX