Astérisque

MICHEL MERLE

Variétés polaires, stratifications de Whitney et classes de Chern des espaces analytiques complexes

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki, exp. n° 600, p. 65-78

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__65_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 600 Novembre 1982

VARIÉTÉS POLAIRES, STRATIFICATIONS DE WHITNEY ET CLASSES DE CHERN DES ESPACES ANALYTIQUES COMPLEXES

[d'après LÊ-TEISSIER]

par Michel MERLE

0. Introduction.

0.1 Soient (X,x_o) un germe d'espace analytique complexe réduit de dimension pure d plongé dans $(\mathbb{C}^{n+1},0)$, et X^o l'ouvert dense des points réguliers. Soit V un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimension au plus n-1.

Définition (Lê-Teissier) [20] .- Le sous-espace analytique réduit de X, ensemble des points où une direction limite de plan tangent à X^o coupe V de façon excédentaire est appelé variété polaire locale de X en x_o associée à V .

Lorsque X est un cône sur une variété projective lisse W de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cette définition est celle du cône sur la variété polaire de W au sens de Severi-Todd ([36]).

Todd et Eger avaient établi la relation entre les classes des cycles des variétés polaires et les classes de Chern sur W, relation généralisée par R. Piene ([26], [27]) au cas où W est singulière en utilisant la classe de Chern-Mather de W .

0.2 MacPherson a défini ([23]) l'obstruction locale d'Euler $Eu_X(x_o)$ de X au point x_o pour prouver l'existence de classes de Chern vérifiant les axiomes de Deligne-Grothendieck. (Ces classes sont égales, modulo l'isomorphisme d'Alexander (voir [1]), aux classes d'obstruction définies par ailleurs par M.H. Schwartz [29], [39].)

La fonction $x \to Eu_X(x)$ est une fonction constructible à valeurs entières. MacPherson construit un isomorphisme T de l'espace des cycles analytiques sur l'espace des fonctions constructibles à valeurs entières : $T(\sum_i a_i V_i) = \sum a_i Eu_{V_i}$.

La classe de Chern-MacPherson de X s'exprime alors par $c_*(1\!\!1_X) = c_*^M(T^{-1}(1\!\!1_X))$ (où c_*^M est la classe de Chern-Mather) (voir 1.8).

Kashiwara ([4],[38]) et Dubson [7] ont introduit des invariants locaux de X en x_o définis en termes de caractéristiques d'Euler de sections planes de X voisines de x_o (ne passant pas par x_o). Les formules de Gonzalez-Verdier [8], Dubson [7], Lê-Teissier [20] expriment les parentés entre obstruction d'Euler locale, caractéristiques évanescentes et multiplicités des variétés polaires locales générales. Nous les explicitons dans le paragraphe 2. Elles permettent de donner des procédés de calcul de la classe de Chern-MacPherson en termes de ces invariants numériques.

On a le résultat suivant :

THEOREME (Dubson, Brasselet-Schwartz)([1],[6]) .- L'obstruction locale d'Euler est constante le long des strates d'une stratification de Whitney.

On a en fait une caractérisation numérique des stratifications de Whitney

THEOREME (Teissier) .- Si Y est un sous-espace lisse d'un espace analytique complexe X réduit, de dimension pure d, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le couple (X^o,Y) vérifie les conditions de Whitney en x_o.
2) Les multiplicités des variétés polaires locales générales de X sont localement constantes sur Y au voisinage de x_o.

Rappelons que (X^o,Y) vérifie les conditions de Whitney ([34]) en x_o si, pour toute suite de points $(x_i)_i$ de X^o et toute suite $(y_i)_i$ de Y convergeant toutes deux vers x_o et telles que $\lim T_{x_i}X$ et $\lim \overline{x_iy_i}$ existent respectivement dans Grass(d,n+1) et $\mathbb{P}^n$, on a :

(a) $$\lim T_{x_i}X \supset T_{x_o}Y$$

(b) $$\lim T_{x_i}X \supset \lim \overline{x_iy_i}$$

(où $\overline{xy}$ désigne la direction de droite définie par les deux points x et y).

On sait que (b) implique (a).

Nous aurons aussi besoin d'un version uniforme de la condition (a) qui implique (a) et (b) dans la catégorie analytique complexe (voir [13], [33]).

(w) Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_o dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et une constante C positive tels que pour tout $x \in X^o \cap \mathcal{V}$ et tout $y \in Y \cap \mathcal{V}$:

$$\delta(T_yY,T_xX) \leq C\ d(x,y)$$

où d est la distance euclidienne et δ induite par d est définie par :

$$\delta(T_yY,T_xX) = \sup_{\substack{z \in T_yY \\ d(z,0)=1}} d(z,T_xX) .$$

Lorsqu'une stratification $\mathcal{S}$ d'un espace analytique X vérifie les conditions de Whitney, le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather ([35], voir aussi [34]) donne la trivialité topologique locale de X le long des strates de $\mathcal{S}$.

Bien que l'énoncé réciproque du théorème de Thom-Mather soit faux (cf. [2]) la trivialité topologique de X en toute codimension (voir § 5) le long des strates d'une stratification $\mathcal{S}$ implique la régularité de $\mathcal{S}$ au sens de Whitney (Lê-Teissier [21]).

*
* *
*

1. Limites d'espaces tangents. Variétés polaires locales ([20],[32]).

Soit (X,x_o) un germe d'espace analytique complexe réduit de dimension d. Donnons-nous un plongement $(X,x_o) \hookrightarrow (\mathbb{C}^{n+1},0)$ que nous supposons minimal. Sur la partie lisse X^o de X le morphisme de Gauss $\gamma : X^o \to \mathrm{Grass}(d,n+1)$ associe à tout point de X^o la direction d'espace tangent en ce point.

L'adhérence N(X) du graphe de γ dans $\mathrm{Grass}(d,n+1) \times X$ est le transformé de Nash de X. Le morphisme $\nu : N(X) \to X$, isomorphisme au-dessus de X^o est la modification de Nash. Sur N(X), l'image inverse $\tilde{T}$ du fibré tautologique de Grass(d,n+1) prolonge naturellement l'image inverse par ν du fibré tangent à X^o. La fibre de N(X) au-dessus de x_o représente les limites d'espaces tangents à X en 0.

Pour tout drapeau $\mathcal{D} : V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$, on peut considérer dans Grass(d,n+1) les variétés de Schubert

$$\sigma_{\underbrace{1,\dots,1}_{k}}(\mathcal{D}) = \{T \in \mathrm{Grass}(d,n+1) \text{ , } \dim T \cap V_{n-d+k} \geq k\}$$

pour k compris entre 0 et d-1. (Nous les noterons $\rho(V_{n-d+k})$ pour plus de commodité.)

1.1 Définition .- La k-ième variété polaire locale de X en x_o associée au drapeau $\mathcal{D}$ est définie comme le sous-espace analytique (réduit) $\nu(\gamma^{-1}(\rho(V_{n-d+k})))$. On la note $P_k(X,x_o,\mathcal{D})$.

Rappelons le lemme de transversalité de Kleiman ([15]).

1.2 Lemme de transversalité .- Soient X, Y, Z des variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ équidimensionnelles et des morphismes $q : Y \to X$ et $p : Z \to X$. Un groupe algébrique irréductible G agit transitivement sur X. Il existe alors un ouvert U de G, tel que pour tout g dans U :

(i) Le produit fibré $gY \times_X Z$ est vide ou de dimension $\dim Y + \dim Z - \dim X$.

(ii) Si Y et Z sont réguliers $gY \times_X Z$ est régulier et les morphismes p et q sont tranverses.

Ce lemme montre l'existence d'un ouvert Ω de la variété des drapeaux, tel que pour $\mathcal{D}$ élément de Ω :

1.2.3 $\gamma^{-1}(\rho(V_{n-d+k}))$ est un sous-espace analytique de N(X) de codimension k, réduit.

1.2.4 L'intersection de $\gamma^{-1}(\rho(V_{n-d+k}))$ avec $\nu^{-1}(X^o)$ est partout dense dans $\gamma^{-1}(\rho(V_{n-d+k}))$.

Par suite, pour $\mathcal{D}$ élément de Ω, $P_k(X,x,\mathcal{D})$ est l'adhérence de son intersection avec X^o, donc $P_k(X,x,\mathcal{D})$ est l'adhérence du lieu critique de la restriction à X^o de la projection linéaire de noyau V_{n-d+k}.

▪ Multiplicités des variétés polaires. Il existe un ouvert de Zariski de la variété des drapeaux où la suite des multiplicités en x_o : $(m_o(P_o(X,x_o,\mathcal{D})),\dots,m_o(P_{d-1}(X,x_o,\mathcal{D})))$ est constante. Plus précisément, considérons l'éclatement $e_o : E_oN(X) \to N(X)$ de l'image inverse de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{x_o}$ dans $N(X)$ et D_o le diviseur exceptionnel $(\nu \circ e_o)^{-1}(x_o)$ plongé dans $\mathrm{Grass}(d,n+1) \times \mathbb{P}^n$.

1.3 PROPOSITION ([20]) -- Il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ de la variété des drapeaux tel que, pour tout élément $\mathcal{D}$ de Ω' et tout entier k entre 0 et $d-1$,

$$m_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D})) = (D_o \cdot c_k \cdot h^{d-1-k})$$

où h est la classe de Chern $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ du fibré induit par l'éclatement de $\mathfrak{m}_{x_o}$ et c_k la k-ième classe de Chern duale de l'image inverse de $\tilde{T}$. Le nombre d'intersection $(D_o \cdot c_k \cdot h^{d-1-k})$ est calculé dans $\mathrm{Grass}(d,n+1) \times \mathbb{P}^n$.

Notation : Si $\mathcal{D} \in \Omega'$ nous dirons que $P_k(X,x_o,\mathcal{D})$ est générale et nous la noterons par abus de langage $P_k(X,x_o)$. La multiplicité $m_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D}))$ sera la multiplicité polaire générale en x_o et notée $M_k(X,x_o)$.

1.4 Corollaire : La suite des multiplicités $(M_o(X,x_o),\dots,M_{d-1}(X,x_o))$ est un invariant analytique du germe (X,x_o).

En fait, le type projectif du diviseur D_o associé à un plongement minimal est un invariant analytique de $(X,0)$. (On peut aussi donner une définition intrinsèque du transformé de Nash à l'aide de la grassmannienne des quotients localement libres de rang d du faisceau des différentielles Ω^1_X (voir [8]).

▪ Espace conormal et variétés polaires ([10]). Remarquons que le drapeau $\mathcal{D}$ détermine également des variétés de Schubert dans le projectif $\check{\mathbb{P}}^n$ des hyperplans de $\mathbb{C}^n$

$$\sigma(V_j) = \{H \in \check{\mathbb{P}}^n ,\ H \supset V_j\} .$$

Si l'on considère dans $X \times \check{\mathbb{P}}^n$, l'adhérence $C(X)$ du fibré projectif conormal $\mathbb{P}(T^*_{X^o}\mathbb{C}^{n+1})$ défini par le plongement $(X,x_o) \to (\mathbb{C}^{n+1},0)$, équipée du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(-1)$, on constate que la variété polaire $P_k(X,x_o,\mathcal{D})$ est aussi l'image par l'application $\tau : C(X) \to X$, de l'image inverse de $\sigma(V_{n-d+k})$ par l'application $\delta : C(X) \to \check{\mathbb{P}}^n$

$$P_k(X,x_o,\mathcal{D}) = \nu(\gamma^{-1}(\rho(V_{n-d+k}))) = \tau(\delta^{-1}(\sigma(V_{n-d+k}))) .$$

On appelle $C(X)$ l'espace conormal de X.

Sur l'éclaté $E_oC(X)$ de l'image inverse de $\mathfrak{M}_{x_o}$ dans $C(X)$ et sur son diviseur exceptionnel $(\tau \circ e_o)^{-1}(0) = A_o$ on a l'analogue de 1.3 :

(1.3bis) PROPOSITION .- Il existe un ouvert Ω'' de la variété des drapeaux, tel que, pour tout élément $\mathcal{D}$ de Ω'' et tout entier k entre 0 et d-1

$$m_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D})) = (A_o \cdot \ell^{n-d+k} \cdot h^{d-1-k}) \quad ,$$

où h est la classe de Chern $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ et ℓ la classe $c_1(\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(1))$, le nombre d'intersection $(A_o \cdot \ell^{n-d+k} \cdot h^{d-1-k})$ étant calculé dans $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^n$.

1.6 Remarque : La caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{O}_{A_o} \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(r) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s))$ est un polynôme en r et s de degré n-1 (cf. [16]). La forme de plus haut degré de ce polynôme s'écrit donc au vu de 1.3bis :

$$S_{n-1}(r,s) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{d-1-k} m_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D}))r^{n-d+k} s^{d-1-k} \quad ,$$

si $\mathcal{D} \in \Omega''$. (Une variante de ce polynôme a été étudiée par Hironaka.)

Notons que, à cause de la condition (b) de Whitney, satisfaite par le couple $(X^o,\{x_o\})$, le diviseur exceptionnel A_o est contenu dans la variété d'incidence I de $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^n$. La cohomologie de I en degré n-1 est engendrée par les classes a_j des cycles $[(\sigma(V_j) \times \mathbb{P}(V_{j+2})) \cap I]$, $(0 \leq j \leq n-1)$ déterminés par un drapeau $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.

On en déduit que la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{O}_{A_o} \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(r) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s))$ calculée sur I, voit son terme de degré n-1 s'égaler à :

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{d-1-k} (A_o \cdot a_{n-d+k})\ r^{n-d+k}\ s^{d-k-1}$$

ce qui prouve que

$$(P_k(X,x_o,\mathcal{D}) \cdot V_{n-d+k+1}) = (A_o \cdot a_{n-d+k}) = (A_o \cdot \ell^{n-d+k} \cdot h^{d-k-1}) = m_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D}))$$

c'est en fait le résultat du

1.7 Lemme de transversalité des variétés polaires ([20]) .- Pour $\mathcal{D}$ élément de Ω'' le plan $V_{n-d+k+1}$ est transverse au cône tangent $C_o(P_k(X,x_o,\mathcal{D}))$ de la variété polaire définie par V_{n-d+k}.

1.8 Note .- La k-ième classe de Chern-Mather de X peut se définir, comme l'image de la k-ième classe de Chern (en homologie) du fibré $\tilde{T}$. La variété polaire générale $P_k(X,x_o,\mathcal{D})$ $(\mathcal{D} \in \Omega')$ est donc un représentant de la classe de Chern-Mather du "fibré cotangent" $(0 \leq k \leq d-1)$.

2. Invariants numériques locaux.

■ L'obstruction d'Euler locale (MacPherson [23]). Considérons la restriction à X de la fonction $z \to \|z\|^2$ définie sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par la norme hermitienne. Sa différentielle induit une section r du fibré réel sous-jacent à $\tilde{T}^*$, fibré sur N(X). Pour ε suffisamment petit, r ne s'annule pas sur $\nu^{-1}(B_\varepsilon - \{0\})$ (puisque (X^o, x_o) satisfait à la condition (b) de Whitney), si B_ε est la boule de centre 0 et de rayon ε.

L'obstruction à étendre r en une section non nulle de $\tilde{T}^*$ au-dessus de $\nu^{-1}(B_\varepsilon)$, évaluée sur la classe fondamentale d'orientation de $H_{2d}(\nu^{-1}(B_\varepsilon), \nu^{-1}(S_\varepsilon), \mathbb{Z})$ est l'obstruction d'Euler locale de X en x_o et est notée $Eu_X(x_o)$.

On vérifie que c'est un invariant analytique de (X, x_o). On a même

2.2 THEOREME (Gonzalez-Verdier [8]) .- Sur l'éclaté $E_o N(X)$ de l'image inverse de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{x_o}$ dans N(X), muni de ses deux fibrés tautologiques $\tilde{T}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, l'obstruction d'Euler locale s'exprime par :

$$Eu_X(x_o) = \deg(c_{d-1}(\tilde{T} - \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))|D_o) \quad .$$

Compte-tenu de (1.3) et avec les notations adoptées, ceci nous donne la formule de [20] :

$$Eu_X(x_o) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k (D_o \cdot c_k \cdot h^{d-k-1}) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \, m_o(P_k(X, x_o)) \quad .$$

Si H est un hyperplan assez général contenant 0, on a en utilisant (1.7) :

$$Eu_{X \cap H}(x_o) = \sum_{k=0}^{d-2} (-1)^k \, m_o(P_k(X, x_o)) \quad .$$

■ Les caractéristiques d'Euler évanescentes ([7], [4]). Il s'agit de définir la caractéristique d'Euler (voire le type topologique) d'une section de X par un (n-d+k)-plan général ne contenant pas x_o mais suffisamment proche de x_o. Pour cela, on considère la projection $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \xrightarrow{\pi_k} (\mathbb{C}^{d-k+1}, 0)$ de noyau V_{n-d+k} et on veut montrer qu'une fibre générique de la restriction à X de cette projection a un type topologique bien défini (i.e. indépendant du plongement et de la taille du représentant de X choisis).

C'est ce qui est fait dans [21]. Le point crucial est de montrer que la restriction de π_k à l'intersection de X avec une boule B_ε de rayon convenable admet une stratification induisant à la source et au but une stratification de Whitney et vérifiant de plus la condition A_{π_k} de Thom ([35]) (qui assure la transversalité des fibres de π_k à la sphère S_ε) au-dessus du complémentaire d'un sous-espace analytique fermé de $\mathbb{C}^{d-k+1}$.

Ceci étant, il est facile de voir que la caractéristique d'Euler $\chi_{d-k+1}(X,x)$ de la fibre générale de la restriction de π_k à l'intersection de X avec une boule de rayon assez petit centrée en x est constante sur une strate de Whitney de X contenant x (Propriété énoncée par Dubson dans [6]). On notera donc $\chi_{d-k+1}(X,X_\alpha)$ la valeur de $\chi_{d-k+1}(X,x)$ lorsque x est dans X_α.

<u>Note</u> .- $\chi_j(X,X_\alpha) = 1$ dès que j est inférieur ou égal à la dimension de X_α (que l'on note d_α).

A l'aide des caractéristiques évanescentes $\chi_j(X,x)$, Dubson et Kashiwara (cf. [4]) définissent par récurrence sur la dimension de X, la fonction E_X à valeurs entières et constructible sur X :

Si $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de Whitney de X, on pose, si $x_o \in X_{\alpha_o}$:

$$E_X(x_o) = \sum_{\overline{X}_\beta \supset X_{\alpha_o}} (\chi_{d_\beta+1}(X^o,X_\beta)) E_{\overline{X}_\beta}(x_o)$$

avec $E_{\overline{X}_\beta}(x_o) = 1$ si $\overline{X}_\beta = \{x_o\}$.

2.3 THEOREME (Dubson [6], [7]).– $Eu_X(x_o) = E_X(x_o)$.

En utilisant les relations entre multiplicités polaires et obstruction locale d'Euler, on peut en déduire :

2.4 THEOREME (Lê-Teissier [21]).–

$$\chi_{d_{\alpha_o}+1}(X,X_{\alpha_o}) - \chi_{d_{\alpha_o}+2}(X,X_{\alpha_o}) =$$

$$\sum_{\overline{X}_\alpha \supsetneq X_{\alpha_o}} (-1)^{d_\alpha - d_{\alpha_o} - 1} m_o(P_{d_\alpha - d_{\alpha_o} - 1}(\overline{X}_\alpha, x_o))(1 - \chi_{d_\alpha+1}(X,X_\alpha)) .$$

3. <u>Equimultiplicité</u>.

Nous rassemblons ici dans un même énoncé des résultats de Dade, Hironaka, Teissier, Schickhoff. Nous renvoyons à [22] pour un exposé détaillé (voir aussi [32]).

3.1 THEOREME .- <u>Soit</u> X <u>un espace analytique complexe réduit de dimension pure</u> d, Y <u>un sous-espace lisse de</u> X. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) X <u>est équimultiple le long de</u> Y.

(ii) <u>Le morphisme</u> $(e_Y^{-1}(Y)_{red} \to Y$, <u>projection sur</u> Y <u>du réduit du diviseur exceptionnel de l'éclatement de</u> Y <u>dans</u> X, <u>est équidimensionnel</u>.

(iii) <u>Si</u> $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$, <u>il existe une projection linéaire</u> π <u>de</u> X <u>sur</u> $\mathbb{C}^d$, <u>transverse à</u> X <u>telle que l'espace réduit sous-jacent à</u> $\pi^{-1}(\pi(Y))$ <u>est égal à</u> Y.

3.2 <u>Note</u> .- (i) est équivalent à (iii) sous la simple hypothèse : Y irréductible.

3.3 <u>Conséquence</u> .- Si X est réduit de dimension pure d, Z un fermé analytique de X, il existe un ouvert analytique U de Z le long duquel la multiplicité de X est constante. En bref, nous dirons que l'équimultiplicité est une condition stratifiante.

4. Caractérisation numérique des stratifications de Whitney.

4.1 THEOREME (Teissier) -- Soit (X,x_o) un germe d'espace analytique complexe réduit de dimension pure d, et Y un germe de sous-espace lisse de X de dimension t.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple (X^o,Y) vérifie les conditions de Whitney en x_o (resp. la condition (w)).

(ii) La suite $(M_o(X,y),\dots,M_{d-1}(X,y))$ des multiplicités polaires générales est constante le long de Y au voisinage de x_o.

4.1.1 Remarque -- La preuve de ce théorème fournit en fait une troisième condition équivalente à (i) et (ii) (voir [10], [32])

(iii) Le diviseur exceptionnel réduit $|A_Y|$ de l'éclatement $e_Y : E_Y C(X) \to C(X)$ de l'image inverse de Y dans C(X) est équidimensionnel sur Y.

En dépit de l'analogie entre 1.3 et 1.3bis, il n'est pas vrai (voir [10]) en général que (i) et (ii) sont équivalentes à

(iv) Le diviseur exceptionnel réduit $|D_Y|$ de l'éclatement $e_Y : E_Y N(X) \to N(X)$ de l'image inverse de Y dans N(X) est équidimensionnel sur Y.

4.2.1 Note -- Dans le cas où X est une hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ d'équation f, Hironaka s'était interrogé sur l'équivalence de propriétés analogues à (i), (ii) (sous la forme de la Remarque 1.6) et (iii) formulées plutôt (sauf pour (i)) en termes du morphisme $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ (voir § 6). Il a établi que (iv) implique (i) (voir [12] et [5]). Teissier et Briançon-Speder ont prouvé l'équivalence de (i) et (ii) lorsque X est une hypersurface et Sing $X = Y$ avec $\dim Y = 1$.

4.2 Corollaire -- Si Z est un fermé de X l'ensemble des points de Z où le couple (X^o,Z^o) vérifie les conditions de Whitney est un ouvert analytique de Z.

4.3 Corollaire -- Il existe un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}(T_{x_o}Y)$, tel que pour toute courbe lisse Y_1 de Y telle que $T_{x_o}Y_1$ est élément de cet ouvert, on a l'équivalence entre :

(X^o,Y) vérifie les conditions de Whitney (resp. la condition (w)) en x_o

et (X^o,Y_1) " " " " ".

4.4 Corollaire -- Il existe un ouvert de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}/T_{x_o}Y)$ tel que pour toute hypersurface lisse H contenant Y et telle que $T_{x_o}H/T_{x_o}Y$ est dans l'ouvert considéré, le couple $((X\cap H)^o,Y)$ satisfait les conditions de Whitney en x_o s'il en est de même pour (X^o,Y).

(Cette assertion a été démontrée dans la catégorie sous-analytique avec la restriction dim $Y = 1$ par V. Navarro [25].)

4.5 Indications sur la démonstration de 4.1. On suppose que Y est un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$.

4.5.1 L'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence du théorème 3.1 sur l'interprétation géométrique de l'équimultiplicité et du fait que la cohomologie de $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^{n-t}$ est engendrée en degré n-1 par les produits $\ell^{n-d+k}.h^{d-k-1}$.

4.5.2 Pour ((iii)$\Rightarrow$(i)), on utilise :

Fait (Hironaka) .- Le quotient $\delta(T_{x_0}Y, T_xX)/d(x,Y)$ des fonctions distances (voir § 0) remonté au normalisé $\overline{E_Y C(X)}$ est égal au maximum des valeurs absolues de t sections méromorphes de $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-t}}(1)$ muni d'une métrique hermitienne. Les pôles de ces sections sont contenus dans le diviseur exceptionnel $\overline{A}_Y$ et comme $\overline{E_Y C(X)}$ est normal et propre sur X la condition (w) est équivalente à l'holomorphie des sections, soit encore au fait qu'elles sont localement bornées sur un ouvert de Zariski de chaque composante de $\overline{A}_Y$.

Ceci permet de montrer que (w) est vérifiée génériquement sur Y et en fait partout puisque $(A_Y)_{red}$ n'a aucune composante se projetant sur un fermé strict de Y.

4.5.3 (i)$\Rightarrow$(iii). Comme (i) équivaut à (ii), il suffit de montrer que les variétés polaires sont équimultiples le long de toute droite Y_1 de Y passant par x_0. D'autre part, lorsque (X^0,Y) vérifie les conditions de Whitney, il en est de même pour (X^0,Y_1). On se ramène donc à dim $Y = 1$.

Nous donnons une démonstration qui se sépare de celle de [32].

Puisque les conditions de Whitney sont réalisées en x_0, A_0 fibre en x_0 du diviseur exceptionnel A_Y est contenue dans la variété d'incidence I de $\check{\mathbb{P}}^{n-1}\times\mathbb{P}^{n-1}$. Montrer (ii) c'est montrer que : dim $A_0 \leq n-1-\dim Y_1 = n-2$. Or la cohomologie de I en degré n-1 est engendrée par les classes des cycles $\sigma(V_i)\times\mathbb{P}(V_i)$ $(1\leq i\leq n)$ associés à un drapeau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ (§ 1). On est donc amené à prouver que pour $0\leq k\leq d-1$, le cône normal à Y dans $P_k(X,x_0,\mathcal{F})$ est transverse à V_{n-d+k}.

Cette transversalité, plus forte que celle de $C_0(P_k(X,x_0,\mathcal{F}))$ et de $V_{n-d+k+1}$, et qui nécessite dim $Y = 1$, est une conséquence de [9] prop. 1(ou de [32], chap. V, lemme-clé pour $k = d-1$).

On peut également démontrer que ((iii) $\Rightarrow$ (i)) en utilisant la constance des caractéristiques évanescentes le long des strates de Whitney.

5. Conséquences.

5.1 Stratification de Whitney canonique d'un espace analytique complexe ([20]). Le théorème 4.1 montre que la stratification par la constance des multiplicités polaires générales (qui existe d'après § 3) est une stratification de Whitney moins fine que toute stratification de Whitney.

5.2 Réciproque du théorème de Thom-Mather (premier théorème d'isotopie). Suivant [21] nous considérons pour un couple de strates X_α, X_β, $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et un point x de X_α les conditions suivantes $(0 \leq k \leq d_\beta - d_\alpha)$:

$\overline{X}_\beta$ est topologiquement trivial en codimension k le long de X_α en x, i.e. :

Dans un plongement de $(\overline{X}_\beta, x)$ dans $(\mathbb{C}^{d_\alpha} \times \mathbb{C}^p, 0)$ où (X_α, x) s'identifie à $(\mathbb{C}^{d_\alpha} \times \{0\}, 0)$, il existe un ouvert dans la grassmannienne Grass(p-k,p) tel que, pour $\mathbb{C}^{p-k}$ élément de cet ouvert, il existe un nombre positif ε_0 tel que pour tout ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe η_ε tel que pour tout η, $0 < \eta \leq \eta_\varepsilon$, on a un homéomorphisme de paires

$$[B_\varepsilon \cap (B_\eta \times \mathbb{C}^{p-k}), (B_\eta \times \mathbb{C}^{p-k}) \cap \overline{X}_\beta \cap B_\varepsilon]$$
$$\longrightarrow [(B_\varepsilon \cap \{0\} \times \mathbb{C}^{p-k}), B_\varepsilon \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^{p-k}) \cap \overline{X}_\beta] \times B_\eta$$

compatible avec la projection $(\mathbb{C}^{d_\alpha} \times \mathbb{C}^{p-k}, 0) \to (\mathbb{C}^{d_\alpha}, 0)$.

5.3 THEOREME (Lê-Teissier [21]) -- Soit X un espace analytique réduit de dimension pure d et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification analytique complexe de X. Si pour tout triplet (x, X_α, X_β), $x \in X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et pour tout k, $0 \leq k \leq d_\beta - d_\alpha$, $\overline{X}_\beta$ est topologiquement trivial en codimension k le long de X_α en x, alors la stratification X_α est une stratification de Whitney.

(Voir [21] pour d'autres réciproques.)

6. Quelques résultats pour un morphisme analytique ([11], [14], [25], [28]).

6.0 Soit un germe de morphisme $f : (X, x_0) \to (S, s_0)$ et un plongement relatif $(X, x_0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \times (\mathbb{C}^p, 0)$. On suppose que f est à fibres de dimension pure d et qu'il existe un ouvert X^0 sur lequel f est de corang minimum d. Nous notons $T_x X_{f(x)}$ l'espace tangent à x à la fibre $f^{-1}(f(x))$ du morphisme f.

6.1 Définition [35] -- Un couple de strates (X_α, X_β), $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ sur lesquelles la restriction de f est lisse satisfait la condition A_f de Thom en x_0 $(x_0 \in X_\alpha)$ si pour toute suite de points $(x_i)_i$ dans X_β et toute suite $(y_i)_i$ dans X_α convergeant toutes deux vers x_0 et telles que $\lim T_{x_i}(X_\beta)_{f(x_i)}$ et $\lim T_{y_i}(X_\alpha)_{f(y_i)}$ existent, on a

$$\lim T_{y_i}(X_\alpha)_{f(y_i)} \subset \lim T_{x_i}(X_\beta)_{f(x_i)} .$$

On dispose également (voir § 0) d'une version uniforme de la condition A_f que l'on note W_f ([25]).

6.2 Définition -- Dans le cadre défini par (6.1), le couple (X_α, X_β) vérifie W_f en x_0, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ et une constante positive C tels que, pour tout x dans $X_\beta \cap \mathcal{V}$ et y dans $X_\alpha \cap \mathcal{V}$ on a

$$\delta(T_y X_{f(y)}, T_x X_{f(x)}) \leq C\ d(x,y) \quad .$$

La première difficulté est qu'un morphisme f n'admet pas toujours de stratification vérifiant la condition A_f (voir [28]), même s'il est plat. (Exemple (Lê) : $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ donné par $x^2 - y^2z, y$.)

6.3 THEOREME ([11]) .- <u>Sous les hypothèses de</u> (6.0) <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>L'espace conormal relatif est équidimensionnel au-dessus de</u> S.

ii) <u>Pour tout fermé analytique</u> Z <u>dans</u> X, <u>il existe un ouvert de Zariski non vide de</u> Z <u>où le couple</u> (X^o, Z^o) <u>vérifie la condition</u> W_f .

6.3.1 <u>Note</u> .- L'espace conormal relatif $C_f X$ est l'adhérence dans $X \times \check{\mathbb{P}}^n$ du fibré projectif $\mathbb{P}(T_f^* \mathbb{C}^{n+1})$.

6.3.2 <u>Remarque</u> .- Hironaka [14] a montré que la condition analogue à 6.3, i) pour la modification de Nash relative est une condition suffisante pour que 6.3, ii) soit vrai en remplaçant W_f par A_f .

Comme dans [32] et de manière analogue au § 1, on définit les variétés polaires locales relatives du morphisme f . On a alors le théorème suivant :

6.4 THEOREME ([11]) .- <u>Soit</u> f <u>un morphisme vérifiant les hypothèses</u> 6.0, <u>et soit</u> (Y, x_o) <u>un sous-espace lisse de</u> (X, x_o) . <u>Si les variétés polaires relatives de</u> f <u>sont équimultiples le long de</u> Y <u>le couple</u> (X^o, Y) <u>vérifie la condition</u> W_f <u>en</u> x_o .

La réciproque est vraie si $f(Y) = s_o$.

Le théorème 6.4 permet de démontrer le résultat suivant ([28]) :

6.5 THÉORÈME (Sabbah) .- <u>Soit</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme propre entre espaces analytiques complexes. Il existe un éclatement</u> $\tilde{S} \to S$, <u>tel que le morphisme image inverse</u> $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{S}$ <u>admette une stratification vérifiant la condition</u> W_f <u>et telle que les stratifications induites sur</u> $\tilde{X}$ <u>et</u> $\tilde{S}$ <u>vérifient</u> w .

RÉFÉRENCES

[1] J.P. BRASSELET, M.H. SCHWARTZ, Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, Astérisque 82-83 (1981), 93-147.

[2] J. BRIANÇON, J.P. HENRY, Equisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées, Bull. S.M.F. 108, 2 (1980), 259-281.

[3] J. BRIANÇON, J.P. SPEDER, Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant, Ann. Inst. Fourier 26, 2 (1976), 153-163.

[4] J.L. BRYLINSKI, A.S. DUBSON, M. KASHIWARA, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. (26/10/81), p. 410.

[5] G. CANUTO, J.P. SPEDER, Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney, Ann. Sc. Norm. Pisa, série III, 27 (1973).

[6] A.S. DUBSON, Classes caractéristiques des variétés singulières, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (1978), p. 237.

[7] A.S. DUBSON, Calcul des invariants numériques des singularités et des applications, prepubl. S. Th. Math. Universität Bonn, 1981.

[8] G. GONZALEZ-SPRINBERG, L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson, Astérisque 82-83 (1981), 7-32.

[9] J.P. HENRY, M. MERLE, Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires, Actes de la conférence de La Rabida, à paraître aux Springer Lecture Notes.

[10] J.P. HENRY, M. MERLE, Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, à paraître dans Proc. A.M.S. Symposium on Singularities, Arcata, 1981.

[11] J.P. HENRY, M. MERLE, C. SABBAH, Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique, Prépubl. Centre de Maths. Ecole Polytechnique, Août 1982.

[12] H. HIRONAKA, Equivalences and deformations of isolated singularities, Woods Hole Seminar in Algebraic Geometry, 1964.

[13] H. HIRONAKA, Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1970).

[14] H. HIRONAKA, Stratifications and flatness, Real and complex singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.

[15] S. KLEIMAN, On the transversality of a general translate, Compositio Math. 28 (1974), 287-297.

[16] S. KLEIMAN, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Maths. 84 (1966).

[17] LÊ D.T., Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 261-270.

[18] LÊ D.T., Topological use of polar curves, Proc. A.M.S. Symp. Vol. 29 (1974), 507-512.

[19] LÊ D.T., Vanishing cycles on analytic sets, Proc. Conf. on algebraic analysis, R.I.M.S. Kyoto, Juillet 1975.

[20] LÊ D.T., B. TEISSIER, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, Ann. of Maths. 114 (1981), 457-491.

[21] LÊ D.T., B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, II, à paraître dans Proc. A.M.S. Symp. on Singularities, Arcata 1981.