LIONEL SCHWARTZ

La conjecture de Sullivan

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 638, p. 101-112

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__101_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 638
Novembre 1984

LA CONJECTURE DE SULLIVAN
d'après H. MILLER

par Lionel SCHWARTZ

En 1970 ([19]), D. Sullivan a formulé une conjecture sur le type d'homotopie de l'ensemble des points fixes F d'une involution σ triangulable opérant sur un espace localement compact X . Elle s'énonce comme suit : le 2-complété profini de F est faiblement homotopiquement équivalent au 2-complété profini de l'espace des applications équivariantes $C^{\mathbb{Z}/2}(S^{\infty}, X_{\sigma})$, où S^{∞} est muni de l'involution antipodale t et $X_{\sigma} = S^{\infty} \times X$ est muni de $t \times \sigma$. Le cas où X est un produit $Y \times Y$ avec σ échangeant les facteurs est facile à prouver. Mais si σ est l'identité, on est ramené à montrer que l'espace des applications pointées de $\mathbb{R}P^{\infty}$ dans un espace X de dimension finie est faiblement contractile. En 1982 ([13]), H. Miller démontre cette dernière conjecture si $X = S^n$; en 1983, il obtient le :

THÉORÈME 0.1 ([14]). Soient G un groupe discret dont tous les sous-groupes de type fini sont finis (on dira localement fini), X un CW-complexe de dimension finie connexe. Alors, l'espace des applications pointées du classifiant de G , BG , dans X est faiblement contractile.

A. Zabrodsky a démontré en corollaire le :

THÉORÈME 0.2. Soit W un CW-complexe connexe tel que les groupes $\pi_i(W)$ soient localement finis et nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Si X est un CW-complexe connexe de dimension finie, alors l'espace des applications pointées de W dans X est faiblement contractile.

La stratégie de démonstration du théorème 0.1 consiste à se ramener au cas où l'espace est simplement connexe. On remarque pour cela, en utilisant la K-théorie, qu'une application de BG (G localement fini) dans X (de dimension finie) se relève au revêtement universel. Puis, on montre que (0.1), avec X simplement connexe, résulte du :

THÉORÈME 0.3 ([14]). Soient p un nombre premier, X un espace nilpotent dont l'homologie mod p est nulle en tous degrés assez grands, alors l'espace des applications pointées de $B\mathbb{Z}/p$ dans X est faiblement contractile.

La preuve de ce théorème constitue le coeur de la démonstration. Elle repose sur l'analyse d'une suite spectrale d'Adams "instable" construite par A. Bousfield et D. Kan. H. Miller démontre que les termes $E_2^{s,t}$ de cette suite sont tous triviaux. Il utilise à cette fin le fait remarquable que $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ <u>est un module injectif dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod</u> $\mathcal{A}$. Miller observe dans [13] que ceci résulte directement de [6] (pour p = 2), où G. Carlsson montre que $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ est facteur direct dans une limite inverse de $\mathcal{A}$-module, chacun de ces modules s'interprétant comme la cohomologie "du dual d'un spectre de Brown-Gitler". Il étend le résultat à $p \neq 2$ dans [14].

Dans les paragraphes 1 à 6, on va donner quelques détails sur la preuve du théorème 0.3, puis on donnera des applications : à une conjecture de Serre sur les groupes d'homotopie des espaces finis (§7), aux applications entre espaces classifiants (§8).

<u>Notations</u>. $\mathcal{E}_{gr}$ désignera la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués positivement,

$\mathcal{S}_*$ " la catégorie des ensembles simpliciaux pointés,

$C_*(W,X)$ " l'espace des fonctions de W dans X dans $\mathcal{S}_*$ ([12]),

$\mathcal{A}$ " l'algèbre de Steenrod mod 2,

$\mathcal{M}$ " la catégorie des $\mathcal{A}$-modules gradués à gauche, avec les flèches de degré zéro.

Si M est un module gradué, on définit ΣM par $(\Sigma M)^i = M^{i-1}$ avec la structure évidente, $\Sigma^t M = \Sigma(\Sigma^{t-1}M)$.

Dans ces notes, "espace" signifiera ensemble simplicial. On traitera du cas p = 2, et la cohomologie sera toujours comprise à coefficients mod 2, sauf mention du contraire.

§ 1. LE TERME $E_2^{s,t}$ DE LA SUITE SPECTRALE DE BOUSFIELD-KAN.

En 1972 (!), A. Bousfield et D. Kan ont donné dans [5] (p. 285) une condition suffisante pour que l'espace total d'un espace cosimplicial(†) soit k-connexe. L'espace total d'un espace cosimplicial(†) est la limite inverse d'une tour de fibrations dans $\mathcal{S}_*$. Leur résultat s'exprime en demandant la nullité des termes $E_2^{s,t}$, $0 \leq t-s \leq k$, d'une suite spectrale associée à cette tour de fibrations.

Supposons maintenant donnés des espaces pointés connexes W et X tels que X soit fibrant et nilpotent, que $\tilde{H}^*(W, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \cong \{0\}$. Sous ces conditions, l'espace $C_*(W,X)$ est faiblement homotopiquement équivalent à l'espace total d'un certain espace

(†) supposé fibrant.

cosimplicial si $\tilde{H}^*(X)$ et $\tilde{H}^*(W)$ sont finis en chaque degré ([8], [14] 1.4). Le terme $E_2^{s,t}$ de la suite spectrale considérée est isomorphe ([4]) à un groupe (ensemble, si $t = s = 0$) $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(X), \Sigma^t\tilde{H}^*(W))$, $0 \leq s \leq t$, qu'on va définir. Mais d'abord, sous les hypothèses précédentes, énonçons le :

<u>THÉORÈME 1.1</u> ([14]). <u>Si</u> $W = B\mathbf{Z}/2$ <u>et si</u> X <u>est un espace dont la cohomologie est bornée</u> (<u>nulle en tous degrés assez grands</u>), <u>alors</u> $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(X), \Sigma^t\tilde{H}^*(B\mathbf{Z}/2)) = \{0\}$, $t \geq s \geq 0$.

Ce qui démontre le théorème 0.3.

La cohomologie réduite d'un espace est, comme celle d'un spectre ([1]), un $\mathcal{G}$-module à gauche. Mais c'est un objet portant une structure beaucoup plus riche. Introduisons les définitions suivantes :

<u>Définition 1.2</u>. <u>Un</u> $\mathcal{G}$-<u>module</u> M <u>sera dit instable si</u>, <u>pour</u> $x \in M$, $Sq^i x = 0$ <u>dès que</u> $i > |x|$. <u>On notera</u> $\mathcal{U}$ <u>la sous-catégorie pleine de</u> $\mathcal{M}$ <u>dont les objets sont les modules instables</u>.

<u>Définition 1.3</u>. <u>Une</u> $\mathcal{G}$-<u>algèbre instable est un objet</u> K <u>de</u> $\mathcal{U}$ <u>ayant une structure de</u> $\mathbb{F}_2$-<u>algèbre satisfaisant à la formule de Cartan et à la relation</u> $Sq^{|x|}x = x^2$ <u>pour tout</u> $x \in K$. <u>On notera</u> $\mathcal{K}$ <u>la catégorie des</u> $\mathcal{G}$-<u>algèbres instables connexes sans unité</u>, <u>avec les morphismes évidents</u>.

La catégorie $\mathcal{U}$ est abélienne, $\mathcal{K}$ n'est pas additive. La cohomologie réduite d'un espace est un objet de $\mathcal{K}$ ([18]).

Une application $f : W \to X$ induit un homomorphisme f^* appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(X), \tilde{H}^*(W))$. Si f^* est nul, la cohomologie de la cofibre C_f de f est une extension de $\Sigma\tilde{H}^*(W)$ par $\tilde{H}^*(X)$, on a la "suite exacte" d'algèbres :

$$0 \longrightarrow \Sigma\tilde{H}^*(W) \longrightarrow \tilde{H}^*(C_f) \longrightarrow \tilde{H}^*(X) \longrightarrow 0 \quad ,$$

le produit de $\Sigma\tilde{H}^*(W)$ étant le produit trivial, le produit de tout élément de $\Sigma\tilde{H}^*(W)$ par tout élément de $\tilde{H}^*(C_f)$ étant nul.

Avec ces hypothèses, il est facile de voir que, comme dans le cas "abélien", ces extensions sont classées à isomorphie près dans un groupe qu'on notera $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(X), \Sigma\tilde{H}^*(W))$. Etant donné $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{K})$ ayant un produit trivial, on généralise en définissant les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,C)$ de $\mathcal{K}$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. Comme la catégorie $\mathcal{K}$ n'est pas additive, on fait appel à [3] et à [7] pour définir les foncteurs dérivés.

A cette fin, il nous faut d'abord une notion d'objet libre dans $\mathcal{K}$. Il est facile de montrer que le foncteur oubli $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{E}^+_{gr}$ (graduation strictement positive) a un adjoint à gauche $\mathcal{G}$ donné par $\mathcal{G}(E) = \tilde{H}^*(\prod_{n>0} K(E^n,n))$:

$$(1.4) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}(E),C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^+_{gr}}(E,\mathcal{O}(C)) .$$

Les objets libres seront ceux de la forme $\mathcal{G}(E)$. L'adjonction détermine des transformations naturelles η : $G = \mathcal{G}\mathcal{O} \to \mathrm{Id}$ et ν : $G \to G^2$ satisfaisant à $\eta_G.\nu = G\eta.\nu = \mathrm{Id}$ et $\nu_G.\nu = \nu.G\nu$. Le triplet (G,η,ν) est un cotriple sur $\mathcal{K}$ [3] . Il nous permet de définir une "résolution" standard d'un objet C de $\mathcal{K}$:

à C , on associe l'objet simplicial augmenté $G.(C)$ donné par : $G.(C)_n = G^{n+1}C$, $d_i = G^i\eta_{G^{n-i}}$, $s_j = G^j\nu_{G^{n-j}}$, $0 \le i, j \le n$. L'augmentation $\epsilon : G.(C)_0 \to C$ est induite par η .

Notons qu'une situation analogue,dans une catégorie abélienne, fournit une résolution "standard" de tout objet de la catégorie.

Pour tout foncteur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{K}$ vers une catégorie abélienne, on peut former le complexe de chaînes $(\mathcal{F}(G.(C)_n), \sum_0^n(-1)^i\mathcal{F}d_i)$.

<u>Définition 1.5</u>. <u>Les foncteurs dérivés à gauche de</u> $\mathcal{F}$ <u>par rapport à</u> G <u>de</u> $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{K})$ <u>sont les groupes d'homologie de ce complexe</u>. <u>On les notera</u> $L_n^G\mathcal{F}(C)$.

La suspension ΣM , d'un objet M de $\mathcal{U}$, détermine avec le produit trivial un objet de $\mathcal{K}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,\Sigma M)$ est à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. <u>On a donc des dérivés qu'on notera</u> $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{K}}(-,\Sigma M)$.

Pour démontrer le théorème 1.1, on montre d'abord le :

<u>LEMME 1.6</u>. <u>Si</u> C <u>objet de</u> $\mathcal{K}$ <u>est borné</u> (1.1), $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(C,\Sigma^t\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)) = \{0\}$.

En effet, l'opération $Sq^{2^k i}.Sq^{2^{k-1}i}. \dots .Sq^i$ est non nulle sur le générateur $\Sigma^t u^i$ de $\Sigma^t H^i(B\mathbb{Z}/2)$, alors qu'elle est nulle sur C pour k grand.

Il nous reste à montrer que $E_2^{s,t} = \{0\}$ pour $s \geq 1$; ceci se fait en se ramenant dans la catégorie $\mathcal{U}$. L'idée de Miller est de construire une suite spectrale séparant les effets de la structure de module instable de $\tilde{H}^*(X)$ de ceux de la structure d'algèbre.

§ 2. DEUX SUITES SPECTRALES À LA GROTHENDIECK.

Soient $C \in \mathcal{O}b(\mathcal{K})$ et $M \in \mathcal{O}b(\mathcal{U})$, alors :

<u>THÉORÈME 2.1</u>. <u>Il existe une suite spectrale homologique convergeant vers</u> $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{K}}(C,\Sigma M)$ <u>de terme</u> $E^2_{i,j}$ <u>isomorphe à</u> $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}(L_j^G(\Sigma^{-1}Q)(C),M)$.

<u>Preuve</u>. Le module des indécomposables de C , $Q(C)$ est dans $\mathcal{U}$, en fait c'est une suspension dans $\mathcal{U}$ car on est en caractéristique 2 (voir §5). Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(-,\Sigma M)$ factorise donc en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,M) \circ \Sigma^{-1}Q(-)$. On construit alors un

bicomplexe de chaînes en partant d'une résolution de C , au sens du §1, on lui applique $\Sigma^{-1}Q$, on obtient un complexe de chaînes dans $\mathcal{U}$. On obtient un bicomplexe en formant des résolutions standards dans $\mathcal{U}$ de chaque terme $\Sigma^{-1}Q(G.(C)_n)$, enfin on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,M)$. En filtrant par rapport au premier degré, on obtient une suite spectrale dont le terme $E^2_{i,j}$ est celui du théorème. En filtrant par rapport au second degré, la suite spectrale dégénère en E^2 avec $E^2_{i,0} = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{K}}(C,\Sigma M)$, $E^2_{i,j} = \{0\}$ sinon. Ceci parce que le foncteur $\Sigma^{-1}Q$ transforme les objets libres de $\mathcal{K}$ en objets projectifs de $\mathcal{U}$. En effet :

Définition 2.2 ([18]). *On note* $F(n)$ *l'objet "libre" en un générateur* i_n , *de degré* n, *de* $\mathcal{U}$. *Il est caractérisé par la formule d'adjonction* : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n),M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{F}_2,M^n)$. Une $\mathbb{F}_2$-base en est donnée par les classes $Sq^I i_n$, I admissible, $e(I) \leq n$.

Or, il résulte de [16] que $\Sigma^{-1}Q\tilde{H}^*(K(\mathbb{Z}/2,n)) = F(n-1)$. Notons enfin que tout objet projectif de $\mathcal{U}$ est somme directe de modules $F(n)$.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-algèbres commutatives sans unité. Le foncteur oubli de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}^+_{gr}$ a pour adjoint à gauche le foncteur "algèbre symétrique". On définit comme au §1 un cotriple S' sur $\mathcal{C}$, puis des foncteurs dérivés $L^{S'}_n Q(-)$.

THÉORÈME 2.3. Soit $C \in \mathcal{K}$, *on a un isomorphisme dans* $\mathcal{E}_{gr}$: $L^G_n Q(C) \cong L^{S'}_n Q(C)$.

Dans le terme de droite, C est considéré comme objet de $\mathcal{C}$. La preuve s'effectue encore en construisant un bicomplexe de chaînes, et en observant que le foncteur oubli de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$ transforme objets libres de $\mathcal{K}$ en objets libres de $\mathcal{C}$; en effet ([16]), $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n))$ est polynômial.

La preuve de 1.4 se réduit alors à :

THÉORÈME 2.4 ([6], [14]). *Le module* $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)$ *est injectif dans la catégorie* $\mathcal{U}$.

THÉORÈME 2.5 ([14]). *Si* N *est borné,* $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(N,\Sigma^t\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)) = \{0\}$ *pour tout* s *et* $t \geq 0$.

THÉORÈME 2.6 ([14]). *Soit* $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *bornée, alors, pour tout* $n \geq 0$, $L^{S'}_n Q(C)$ *est borné*.

§ 3. INJECTIVITÉ DE $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)$ DANS LA CATÉGORIE $\mathcal{U}$.

Ce résultat remarquable est essentiellement démontré par G. Carlsson dans [6] où il l'applique à la résolution de la conjecture de Segal. Dans [14] , H. Miller retravaille la preuve et l'étend au cas $p \neq 2$.

La première étape consiste à construire des objets injectifs de $\mathcal{U}$. A cette fin, considérons un foncteur contravariant $\mathcal{J} : \mathcal{U} \to \mathcal{E}$. Définissons un objet $R(\mathcal{J})$ de $\mathcal{U}$ par : $R(\mathcal{J})^k = \mathcal{J}(F(k))$ (définition 2.2). L'opération $\theta \in \mathcal{G}$ agissant comme $\mathcal{J}(u_\theta)$ où $u_\theta : F(k+|\theta|) \to F(k)$, est déterminée par $u_\theta(i_{k+|\theta|}) = \theta . i_k$. L'instabilité est facile à vérifier. Il y a une transformation naturelle $\gamma_{\mathcal{J}} : \mathcal{J}(-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,R(\mathcal{J}))$ (voir définition 2.2). On démontre facilement le :

LEMME 3.1. La transformation $\gamma_{\mathcal{J}}$ est une équivalence si (et seulement si) le foncteur $\mathcal{J}$ est exact à droite et transforme somme directe en produit.

Prenons $\mathcal{J} = H_n$ défini par $H_n(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(M^n, \mathbb{F}_2)$. Notons $J(n) = R(H_n)$. Comme H_n est exact à gauche, $J(n)$ est injectif dans $\mathcal{U}$. Notons que $H_n(J(n)) = F(n)^n = \mathbb{Z}/2$; on notera ξ_n le générateur, il s'identifie à l'identité de $J(n)$. Pour une interprétation géométrique de $J(n)$, on renvoie à [9] et [14]. La structure de $\mathcal{G}$-module des $F(n)$ détermine par dualité des applications $\mathcal{G}$-linéaires (à gauche) $.\theta : J(n+|\theta|) \to J(n)$, $\theta \in \mathcal{G}$. L'application $.\theta$ est aussi donnée (lemme 3.1) par la forme linéaire de $J(n+|\theta|)^n$ dans $J(n+|\theta|)^{n+|\theta|} \cong \mathbb{F}_2$ donnée par l'action de θ. On aura besoin de la :

PROPOSITION 3.2 (suite exacte de Mahowald). On a, dans la catégorie $\mathcal{U}$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Sigma J(n-1) \longrightarrow J(n) \xrightarrow{.Sq^{n/2}} J(n/2) \longrightarrow 0 \quad ,$$

avec $J(n/2)$ et $Sq^{n/2}$ nuls si $n \not\equiv 0\ (2)$.

Preuve. On définit un foncteur $D : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ par :

$$(3.3) \qquad (DM)^k = \begin{cases} M^{k/2} , & k \text{ pair} \\ \{0\} , & \text{sinon} \end{cases} \qquad Sq^i(Dx) = \begin{cases} D(Sq^{i/2}x) , & i \text{ pair} \\ 0 , & \text{sinon} \end{cases}$$

en notant Dx l'élément de $(DM)^{2k}$ correspondant à x de M^k. L'application $\lambda : DM \to M$ définie par $\lambda(Dx) = Sq^{|x|}x$ est $\mathcal{G}$-linéaire, car M est instable. Si $M = F(k)$, Coker λ s'identifie à $\Sigma F(k-1)$, d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow DF(k) \longrightarrow F(k) \longrightarrow \Sigma F(k-1) \longrightarrow 0 \quad .$$

La proposition 3.2 s'obtient en appliquant le foncteur H_n. Définissons alors $X = \varprojlim (J(2^q), .Sq^{2^q})$. On a :

LEMME 3.4. Le module X est injectif dans la catégorie $\mathcal{U}$.

En effet, toute limite inverse d'injectifs localement finis de $\mathcal{U}$ est un injectif de $\mathcal{U}$.

Rappelons que $H^*(B\mathbb{Z}/2) = \mathbb{F}_2[u]$, $|u| = 1$. Soit γ_q de $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)$ dans $J(2^q)$ l'application associée (lemme 3.1) à l'élément non nul de $H_{2^q}(\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2))$.

Les applications γ_q déterminent $\gamma : \widetilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2) \to X$. On va montrer que γ a un inverse $\mathcal{G}$-linéaire à gauche, ce qui prouvera le théorème 2.4.

Introduisons L'espace vectoriel bigradué J_*^* défini par $J_k^\ell = J(k)^\ell$, k , $\ell \geq 0$; l'objet J_*^* porte :

(1) Une structure de $\mathcal{G}$-module instable induite par celle des $J(k)$;

(2) Une application de $\mathcal{G}$-module $\Lambda : J_*^* \hookleftarrow$, envoyant J_k^ℓ dans $J_{k/2}^\ell$, induite par $. Sq^{k/2} : J(k) \to J(k/2)$ (avec les conventions de 3.2) ;

(3) Une structure d'algèbre bigraduée : le produit $J(n) \otimes J(m) \to J(n+m)$ est donné par l'élément non nul de $H_{n+m}(J(n) \otimes J(m))$.

Le produit satisfait à la formule de Cartan, Λ est multiplicative et on vérifie que $Sq^k y = (\Lambda y)^2$, $y \in J_\ell^k$.

Notons ϵ_0 le générateur de $J_1^1 \cong \mathbb{F}_2$; on déduit de 3.2 que $J_{2^i}^1 \cong J_1^1$. Soit ϵ_i un générateur de $J_{2^i}^1$. Donc $\Lambda \epsilon_i = \epsilon_{i-1}$, $i \geq 1$, et $Sq^1 \epsilon_i = \epsilon_{i-1}^2$. Enfin, on remarquera que l'inclusion $\Sigma J_{n-1}^* \hookrightarrow J_n^*$ (3.2) est l'application de J_{n-1}^* dans J_n^* donnée par la multiplication par ϵ_0 . Ceci détermine la structure de J_*^* :

PROPOSITION 3.6. L'algèbre bigraduée J_*^* est isomorphe à $T_*^* = \mathbb{F}_2[x_i , i \geq 0]$, x_i de bidegré $(1, 2^i)$ par l'application associant ϵ_i à x_i .

Preuve. On remarque qu'on a pour les modules T_k^* des suites exactes analogues à celles de 3.2. On fait alors une récurrence sur k en considérant les diagrammes évidents.

Considérons maintenant l'algèbre bigraduée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}[\frac{1}{2}]$, $\hat{T}_*^* = \mathbb{F}_2[x_i , i \in \mathbb{Z}]$, x_i de bidegré $(1, 2^i)$. Elle est limite inverse des algèbres ${}_q\hat{T}_*^* = \mathbb{F}_2[x_i , i > -q]$ qui portent chacune une structure de $\mathcal{G}$-module et une opération Λ vérifiant les propriétés énoncées.

Ces structures passent à $\hat{T}_*^*$. Soit ψ_q l'application de $\mathcal{G}$-module donnée par :

$$\hat{T}_1^* \xleftarrow{\ \cong\ } \hat{T}_{2^q}^* \twoheadrightarrow T_{2^q}^* \cong J(2^q) .$$

La première application associe $\Pi x_{j-q}^{\alpha_j}$ à $\Pi x_j^{\alpha_j}$, la seconde annule tout monôme contenant un x_i avec $i < 0$. Ceci détermine ψ , $\mathcal{G}$-linéaire de $\hat{T}_1^*$ dans X . On a :

LEMME 3.7. L'application ψ est un isomorphisme.

L'injectivité est facile ; la surjectivité résulte de celle des ψ_q et de ce que $J(2^q)^i \cong J(2^{q-1})^i$ pour $0 \leq i \leq q$, qu'on démontre à l'aide de 3.2.

Soit enfin $\delta : \hat{T}_1^* \to \widetilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2)$ donnée par $\delta(\prod_1^r x_i^{\alpha_i}) = u^{\Sigma \alpha_i}$.

LEMME 3.8. L'application δ est $\mathcal{G}$-linéaire et $\delta . \gamma = \mathrm{Id}$.

Preuve. La $\mathcal{A}$-linéarité résulte de la formule de Cartan. Enfin, une application $\mathcal{A}$-linéaire φ de $\tilde{H}^*(B\mathbf{Z}/2)$ dans lui-même telle que $\varphi(u) = u$ est l'identité.

§ 4. PREUVE DU THEOREME 2.5.

On déduit 2.5 de 2.4 de la manière suivante. Le foncteur $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ a un adjoint à gauche Ω ; on a donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,\Sigma^n M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,M) \circ \Omega^n(-)$. (Le module $\Sigma\Omega N$ est le conoyau de la flèche $\lambda : DN \to N$ introduite dans la preuve de 3.2 .)

On construit une suite spectrale à la Grothendieck de terme $E^2_{s,t} = \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Omega^n_t L, M)$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathcal{U}}(L,\Sigma^n M)$, où Ω^n_t est le t-ème foncteur dérivé à gauche de Ω^n. Il suffit alors d'observer grâce à [16] que $\Omega^n_t(N)$ est borné dès que N l'est, puis on applique 1.6 et 2.4.

§ 5. LE CAS $p > 2$

Si $p > 2$, on doit modifier la preuve, en effet le module des indécomposables d'une algèbre instable n'est pas une suspension. Or $Q\tilde{H}^*(K(\mathbf{Z}/p,n),\mathbf{Z}/p)$ n'est pas un objet projectif dans la catégorie $\mathcal{U}_p$ des $\mathcal{A}_p$-modules instables (ici $\mathcal{A}_p$ désigne l'algèbre de Steenrod mod p). Un $\mathcal{A}_p$-module est dans $\mathcal{U}_p$ si $\beta^\epsilon P^i x = 0$ dès que $\epsilon + 2i > |x|$. On ne peut donc appliquer 2.1 sans modifications. Dans un erratum, Miller observe que, par contre, $Q\tilde{H}^*(K(\mathbf{Z}/p,n),\mathbf{Z}/p)$ est projectif dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{V}_p$ de $\mathcal{U}_p$ des modules M tels que $P^i x = 0$ dès que $2i \geq |x|$ pour $x \in M$. Le théorème 2.1 devient alors : "Il existe une suite spectrale homologique convergeant vers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{V}_p}(C,\Sigma M)$ de terme $E^2_{i,j}$ isomorphe à $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{V}_p}(L^G_j(Q)(C),\Sigma M)$ ". La démonstration du §3 se modifie facilement pour montrer que $\Sigma\tilde{H}^*(B\mathbf{Z}/p,\mathbf{Z}/p)$ est injectif dans $\mathcal{U}_p$ et donc dans $\mathcal{V}_p$. Enfin, il faut retravailler un peu le foncteur Ω du §4.

§ 6. LE THEOREME D'ANNULATION DE L'HOMOLOGIE DE QUILLEN.

Il reste à démontrer le théorème 2.6. A cette fin, Miller identifie les groupes $L^{S'}_* Q(C)$ à l'homologie de Quillen de C ([2] , [15]) ; or

THÉORÈME 6.1 ([2]). Soit C une k-algèbre graduée, commutative. Si Q(C) est de dimension finie en chaque degré et borné, alors il en est de même pour $L^{S'}_n Q(C)$, $n \geq 0$.

Ce résultat est suffisant dans le cas où on s'est placé, ($H^*(X)$ de dimension finie en chaque degré). Pour obtenir 0.3 sans cette restriction, on doit travailler en homologie ([14]). On a alors besoin d'un résultat bornant les foncteurs dérivés des primitifs d'une coalgèbre. Miller l'obtient par dualisation du

THÉORÈME 6.2. Soit C une algèbre graduée commutative sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Si $\mathrm{Tor}^C_*(k,k)$ a b/p pour borne exponentielle, $L^{S'}_* Q(C)$ a b pour borne exponentielle.

Un espace vectoriel bigradué $M_{n,i}$ a b pour borne exponentielle si $M_{n,i} = 0$ pour $i > bp^n$. L'indice i, dans les cas envisagés, est la graduation interne. Si $C_i = 0$ pour $i > b$, par la bar construction, $\mathrm{Tor}_*^C(k,k)$ à b/p pour borne exponentielle, ce qui donne 2.6. Le théorème 6.2 résulte d'une proposition plus générale sur les algèbres simpliciales graduées. Elle s'énonce comme suit :

PROPOSITION 6.3. *Soit $X_\bullet$ une k-algèbre graduée commutative simpliciale, k de caractéristique $p > 0$. Si $\pi_0(X_\bullet) = k$ et $\pi_*(X_\bullet)$ a b pour borne exponentielle, alors $H_*^Q(X_\bullet)$ a aussi b pour borne exponentielle.*

Ici $\pi_*(X_\bullet)$ désigne l'homologie du complexe de chaînes associé à $X_\bullet$. Pour démontrer ce résultat, Miller construit une suite spectrale convergeant vers l'homologie de Quillen de $X_\bullet$, $H_*^Q(X_\bullet)$. Cette proposition ne pouvant s'appliquer à l'algèbre simpliciale constante C, Miller l'applique à $\overline{W}C$, où $\overline{W}$ est le foncteur d'Eilenberg-Mac Lane. Ce foncteur joue le rôle d'une suspension dans la catégorie des algèbres graduées simpliciales : on a $H_s^Q(\overline{W}X_\bullet) = H_{s-1}^Q(X_\bullet)$. Il suffit alors d'observer que $\pi_*(\overline{W}C) = \mathrm{Tor}_*^C(k,k)$.

On notera également que Miller déduit de ces résultats, en utilisant [16], une ligne d'annulation pour la suite spectrale de Bousfield-Kan [4] :

PROPOSITION 6.4 ([13]). *Soit $F^\bullet\pi_*(X)$ la filtration associée à la suite spectrale d'Adams instable de Bousfield-Kan. Si $H_i(X) = 0$ pour $i > c$, alors, pour tout $k > p^s c - s$, $\pi_k(X) = F^{s+1}\pi_k(X)$.*

§ 7. LA CONJECTURE DE SERRE.

Dans [16], J.-P. Serre démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1. *Soit X un CW-complexe simplement connexe dont l'homologie (entière) est bornée et de type fini. Si $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Z}/2)$ est non triviale, le groupe $\pi_n(X)$ contient un élément de 2-torsion ou un élément indivisible d'ordre infini pour une infinité d'entiers n.*

Serre conjecturait que $\pi_n(X)$ devait contenir de la 2-torsion pour une infinité d'entiers n. En fait, Mc Gibbon et J. Neisendorfer ont démontré :

THÉORÈME 7.2 ([11]). *Soit X un CW-complexe simplement connexe dont l'homologie réduite (mod p, p premier) est bornée et non triviale. Alors, le groupe $\pi_n(X)$ contient un élément de p-torsion pour une infinité d'entiers n.*

Preuve de 7.1 et 7.2. S'il n'y a de la p-torsion et des éléments p-indivisibles dans $\pi_n(X)$ que pour un nombre fini d'entiers, la fibre théorique de $X_{(p)} \to X_{(0)}$ ($X_{(p)}$ désigne la localisation en p, $X_{(0)}$ le rationnalisé) vérifie les hypothèses du thèorème 0.2 pour l'espace but et source, il est donc contractile. Il y a contradiction. Supposons que, pour n assez grand, $\pi_n(X_{(p)})$ ne contienne pas de torsion. Pour N assez grand, $X' = \Omega^N X_{(p)}$ n'a pas de torsion dans son homotopie.

Mc Gibbon et Neisendorfer montrent alors que X est homotopiquement équivalent à $K(\pi_1(X'),1) \times K(\pi_2(X'),2) \times X'\langle 2\rangle$, où $X'\langle i\rangle$ est le revêtement i-connexe de X'. Le fait que $K(\pi_1(X'),1)$ scinde est facile. Puis, on montre que l'application canonique $X'\langle 1\rangle \to K(\pi_2(X'),2)$ a une section. Les obstructions à son existence sont nulles. En effet, celles au relèvement de $K(\pi_2(X'),2) \to K(\pi_2(X')\otimes \mathbb{Q},2)$ à $X'\langle 1\rangle_{(0)}$ le sont, car $X'\langle 1\rangle_{(0)}$ est un produit de $K(\mathbb{Q},n)$ étant un H-espace rationnel. Les obstructions initiales qui sont dans $H^{n+1}(K(\pi_2(X',2),\pi_n(X'\langle 2\rangle))$ sont envoyées injectivement sur celles du second problème dans $H^{n+1}(K(\pi_2(X'),2),\pi_n(X'\langle 2\rangle)\otimes \mathbb{Q})$ grâce aux hypothèses. D'où le résultat.

Comme $\pi_2(X')$ contient un élément p-indivisible, on a une contradiction.

§ 8. GÉNÉRALISATIONS ET PROBLÈMES.

La question naturelle à poser est de calculer les classes d'homotopie d'applications pointées de $B\mathbb{Z}/2$ dans un espace X, la conjecture étant que ([13]) :

$$(8.1) \qquad [B\mathbb{Z}/2,X] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(X),\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2))$$

au moins pour X 1-connexe et si $\tilde{H}^*(X)$ est fini en chaque degré.

Le théorème de Miller entraîne la validité de (8.1) pour $X = \Omega^n Y$, Y fini, modulo quelques remarques sur $\tilde{H}^*(\Omega^n Y)$. Par ailleurs :

THÉORÈME 8.2 ([13]). Si $X = BS^3$, alors :

$$[B\mathbb{Z}/2,BS^3] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\tilde{H}^*(BS^3),\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/2))$$

Miller démontre ce résultat sous l'hypothèse plus générale que X est simplement connexe et que sa cohomologie est de la forme $U(M)$ ([17]), c'est-à-dire l'objet de $\mathcal{K}$ librement engendré par l'objet M de $\mathcal{U}$. Malheureusement cette condition est rarement vérifiée ; A. Zabrodsky démontre néanmoins :

THÉORÈME 8.3 ([20]). Soit une application $f : B\mathbb{Z}/2 \to BG$, où G est un groupe de Lie compact ; alors, si f induit zéro en K-théorie connexe, f est homotopiquement triviale.

COROLLAIRE 8.4 ([20]). Soit G un groupe de Lie compact connexe, alors un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur BG est trivial si et seulement s'il est stablement trivial.

Le théorème 8.3 peut se démontrer en utilisant la suite spectrale de Bousfield-Kan. Le passage au corollaire utilise des résultats de W. Meier, E. Friedländer et G. Mislin.

Dans une autre direction, on a, à l'aide de [9] :

THÉORÈME 8.5 (J. Lannes et S. Zarati). La conjecture 8.1 est vraie pour les espaces de lacets infinis.

Il semble que la suite spectrale de Bousfield-Kan permette d'étendre ce résultat au cas d'un espace de lacets.

Remerciements. Je tiens à remercier ici H. Miller pour les nombreuses lettres que nous avons échangées, J. Lannes, S. Zarati et M. Zisman pour l'aide qu'il m'ont apportée dans la préparation de cet exposé. Je dois entre autres à J. Lannes et S. Zarati la version de la preuve de Carlsson-Miller sur l'injectivité de $H^*(B\mathbb{Z}/2)$ présentée au § 3. Je remercie B. Barbichon pour sa patience et son soin dans la dactylographie de ces pages.

RÉFÉRENCES

[1] J.F. ADAMS - Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974.

[2] M. ANDRE - Homologie des algèbres commutatives, Springer-Verlag, 1974

[3] M. BARR, J. BECK - Homology and standard constructions, Lecture notes in Math. 80 (1969), 245-335.

[4] A. BOUSFIELD, D. KAN - The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring, Topology, vol. 11 (1972), 79-106.

[5] A. BOUSFIELD, D. KAN - Homotopy limits, completions and localizations, Lecture notes in Math. 304 (1972).

[6] G. CARLSSON - G.B. Segal's burnside ring conjecture for $(\mathbb{Z}/2)^k$, Topology 22 (1983), 83-103.

[7] A. DOLD, D. PUPPE - Homologie nicht-additiver Funktoren, Ann. Inst. Fourier 11 (1961), 201-312.

[8] E. DROR, W.P. DWYER, D. KAN - An arithmetic square for virtually nilpotent spaces, Ill. J. Math. 21 (1977), 245-254.

[9] J. LANNES - Sur le n-dual du n-ème spectre de Brown-Gitler, Preprint (1984).

[10] J. LANNES, S. ZARATI - Invariants de Hopf..., C.R. Acad. Sci. Paris, t. 296 (1983), 695-698.

[11] C. Mc GIBBON, J. NEISENDORFER - On the homotopy groups of a finite dimensional space, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 253-257.

[12] P. MAY - Simplicial objects in algebraic topology, Univ. Chicago Press (1967).

[13] H. MILLER - Massey-Peterson towers and maps from classifying spaces, Lecture Notes in Math. 1051 (1984), 401-417.

[14] H. MILLER - The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, Ann. of Math. 120 (1984), 39-87.

[15] D. QUILLEN - On the homology of commutative rings, Proc. Symp. Pure Math. 17 (1960), 65-87.

[16] J.-P. SERRE - Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac Lane, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 198-232.

[17] W. SINGER - Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra, J. Pure and Appl. Alg. 11 (1977), 83-101.

[18] N. STEENROD - Cohomology operations, Ann. of Math. Studies, n° 50, Princeton Univ. Press (1962).

[19] D. SULLIVAN, Geometric Topology, part I, M.I.T. Press (1970).

[20] A. ZABRODSKY, Maps between classifying spaces (to appear).

Lionel SCHWARTZ

LP 13 du CNRS
Université Paris XI
Mathématique, bâtiment 425
91405 ORSAY cedex