JEAN-YVES CHEMIN

Explosion géométrique pour certaines équations d'ondes non linéaires

Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki, exp. nº 850, p. 7-20

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1998-1999__41__7_0>

Séminaire BOURBAKI
51ème année, 1998-99, n° 850

Novembre 1998

EXPLOSION GÉOMÉTRIQUE POUR CERTAINES ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES [d'après Serge Alinhac]

par **Jean-Yves CHEMIN**

1. INTRODUCTION

Le problème de l'apparition de singularités dans les équations aux dérivées partielles non linéaires est le problème qui domine leur étude. Que ce soit dans l'étude des systèmes d'Euler ou de Navier-Stokes (compressible ou incompressible), de l'équation de Schrödinger non linéaire ou des équations d'ondes non linéaires, on ne peut manquer d'être confronté à ce problème. La littérature consacrée à ce sujet est immense.

Dans ce texte, nous allons exposer les progrès récemment effectués dans la compréhension de l'apparition de singularités dans les équations d'ondes non linéaires. Commençons par préciser le cadre dans lequel nous allons travailler. Nous nous restreindrons au cas modèle de l'équation suivante, dans l'espace $\mathbf{R}^{1+d}$,

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - \Delta u - \displaystyle\sum_{0\leq j,k\leq d} g^{j,k}(\nabla u)\partial_j\partial_k u & = & 0 \\ (u, \partial_t u)_{|t=0} & = & \epsilon(u_0, u_1) \end{array}\right.$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont des fonctions indéfiniment différentiables à support dans la boule de centre 0 et de rayon M, et ϵ est un (petit) paramètre strictement positif. On supposera de plus que les fonctions $g^{j,k}$ sont des fonctions linéaires de leurs arguments; la notation ∇u désignant bien sûr le vecteur $(\partial_t u, \partial_{x_1} u \cdots, \partial_{x_d} u)$. Le terme

$$\sum_{1\leq j,k\leq d} g^{j,k}(\nabla u)\partial_j\partial_k u$$

doit être compris comme le premier terme d'un développement limité, la pertinence de ce point de vue est assurée par le fait que l'on regarde de petites données initiales.

2. MÉTHODE D'ÉNERGIE ET MINORATION DU TEMPS DE VIE

Il est classique que l'équation (E) est localement bien posée pour des données (u_0, u_1) appartenant à l'espace $H^s \times H^{s-1}$ pour s strictement supérieur à $d/2+2$. En suivant par exemple [23], on démontre, en utilisant des estimations d'énergie que, si u est solution de l'équation (E), alors

$$\frac{d}{dt}|\nabla u(t)|^2_{H^{s-1}} \leq C\|\nabla^2 u(t)\|_{L^\infty}|\nabla u(t)|^2_{H^{s-1}}. \tag{1}$$

L'inclusion de Sobolev assure que l'on a

$$\frac{d}{dt}|\nabla u(t)|^2_{H^{s-1}} \leq C|\nabla u(t)|^3_{H^{s-1}}.$$

Par intégration, il vient que

$$T \leq \frac{C}{|\nabla u(0)|_{H^{s-1}}} \Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} |\nabla u(t)|^2_{H^{s-1}} \leq 2|\nabla u(0)|^2_{H^{s-1}}.$$

Ainsi donc, le temps maximal d'existence T_ϵ est minoré par $C\epsilon^{-1}$. De plus, l'inégalité (1) implique que

$$|\nabla u(t)|^2_{H^{s-1}} \leq C|\nabla u(0)|^2_{H^{s-1}} \exp\Big(\int_0^t \|\nabla^2 u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

On en déduit alors que

$$T_\epsilon < \infty \Longrightarrow \int_0^{T_\epsilon} \|\nabla^2 u(\tau)\|_{L^\infty} d\tau = \infty.$$

Remarque.– L'équation (E) possède une propriété d'invariance par changement d'échelle, c'est-à-dire que, si u est solution de (E) sur un intervalle de temps $[0,T]$, alors la fonction

$$u_\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\lambda}u(\lambda t, \lambda x)$$

est solution de (E) sur l'intervalle $[0, T\lambda^{-1}]$.

Les méthodes d'énergie exposées ci-dessus font fi des propriétés particulières de l'équation des ondes. C'est sous l'impulsion de S. Klainermann que ces propriétés ont été utilisées de manière systématique pour améliorer le temps d'existence de solutions régulières notamment dans les travaux de S. Klainerman (voir [20]–[22]), et aussi F. John (voir [17]–[18]), F. John et S. Klainerman (voir [19]) et L. Hömander (voir [15]).

La propriété utilisée par S. Klainermann est l'invariance de l'équation des ondes sous l'action du groupe de Lorentz. Ceci l'a conduit à introduire les champs de vecteurs suivants.

Définition 2.1. — On désigne par $\mathcal{Z}$ la famille de champs de vecteurs suivants :

$$Z_j \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_j\,,\ Z_{0,j} \stackrel{\text{déf}}{=} x_j\partial_t + t\partial_j \quad \text{et, pour } 1 \leq j < k \leq d, \quad Z_{j,k} \stackrel{\text{déf}}{=} x_j\partial_k - x_k\partial_j$$

ainsi que du champ radial $\rho \overset{\text{déf}}{=} t\partial_t + (x|\partial)$. De plus, si k est un entier positif, $\mathcal{Z}^k u$ désigne la famille formée par u et ses dérivées d'ordre au plus k par rapport aux éléments de la famille $\mathcal{Z}$.

Remarques.– Les champs de vecteurs $(Z_{0,j}, Z_{j,k}, \rho)$ forment une famille génératrice du C^∞-module des champs de vecteurs indéfiniment différentiables et tangents au cône

$$\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+d} \ / \ t^2 - |x|^2 = 0\}.$$

De plus, ces champs de vecteurs vérifient les propriétés de commutation suivantes

$$[Z_{0,j}, \Box] = [Z_{j,k}, \Box] = 0 \quad \text{et} \quad [\rho, \Box] = 2\Box. \tag{2}$$

L'intérêt de ces champs de vecteurs réside pour nous dans l'estimation de Sobolev à poids suivante.

PROPOSITION 2.1. — *Il existe une constante C telle que, pour toute fonction régulière u, on ait, pour tout point (t,x) de $\mathbf{R}^{1+d}$,*

$$|(1+|t|+|x|)^{d-1}(1+||t|-|x||)\nabla u(t,x)|^2 \leq C\|\mathcal{Z}^{[\frac{d}{2}]+1}u(t,\cdot)\|^2_{\dot H^1},$$

où $\|a(t,\cdot)\|^2_{\dot H^1} \overset{\text{déf}}{=} \|\nabla a(t,\cdot)\|^2_{L^2}$.

Pour simplifier la démonstration de cette proposition, nous supposerons que $d = 2$ et que le support de u est inclus dans $\mathcal{B} \overset{\text{déf}}{=} \{(t,x) \in \mathbf{R}^3 \ / \ |x| \leq M+t\}$. Pour démontrer cette estimation, commençons par observer que, si la fonction u est à support compact en (t,x), alors il s'agit de l'estimation de Sobolev usuelle. On peut donc supposer que $|t|+|x| \geq 1$. Il convient alors de distinguer deux zones.

Supposons tout d'abord que le support de la fonction u est inclus dans l'ensemble des (t,x) tels que $|x| \notin \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t\right]$. Soit a une fonction indéfiniment différentiable à support dans cet ensemble. L'inégalité de Sobolev classique implique que

$$|(t^2-|x|^2)a(t,x)| \leq Ct\|\partial_1\partial_2((t^2-|x|^2)a(t,x))\|_{L^2}.$$

Le fait que

$$\partial_j = \frac{t}{(t^2-|x|^2)}Z_{0,j} - \frac{x_j}{(t^2-|x|^2)}\rho + \sum_{k=1}^{d} \frac{x_k}{(t^2-|x|^2)}Z_{j,k}$$

implique que

$$\partial_1\partial_2((t^2-|x|^2)a(t,x)) = \sum_{|I|\leq 2} \alpha_I Z^I a\,;$$

où les fonctions α_I sont indéfiniment différentiables homogènes de degré 0. Il en résulte que

$$|(t^2-|x|^2)a(t,x)| \leq Ct\|\mathcal{Z}^2 a(t)\|_{L^2},$$

et donc comme $|x| \notin \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t\right]$, on a

(3) $$|(t^2 - |x|^2)^{\frac{1}{2}} a(t,x)| \leq C\|\mathcal{Z}^2 a(t)\|_{L^2}.$$

Considérons maintenant une fonction a à support dans $\left\{(t,x) \,/\, |x| \in \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t\right]\right\}$. On redresse alors le cône Γ en posant

$$b(t,\sigma,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} a(t,x) \quad \text{où} \quad \sigma \stackrel{\text{déf}}{=} r - t$$

et où (r,ω) désigne les coordonnées polaires. Un calcul des plus élémentaires montre que

$$\begin{aligned} \rho a &= (t\partial_t + \sigma\partial_\sigma) b \quad \text{et} \\ \sum_{k=1}^{2} \frac{x_k}{|x|} Z_{0,k} a &= ((t+\sigma)\partial_t - \sigma\partial_\sigma) b. \end{aligned}$$

Il en résulte que

(4) $$\sigma\partial_\sigma = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \alpha_{\mathcal{Z}} Z$$

où les $\alpha_{\mathcal{Z}}$ désignent des fonctions de (t,σ,ω) bornées ainsi que toutes leurs dérivées. Soit φ une partition de l'unité dyadique sur $\mathbf{R}$. L'inclusion de Sobolev classique implique que

$$|\varphi(2^{-p}\sigma) b(t,\sigma,\omega)| \leq C 2^{\frac{p}{2}} \|\partial_q \partial_\omega (\varphi(2^{-p}\cdot) b)\|_{L^2}.$$

Vu la définition de φ, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{p}{2}} |\varphi(2^{-p}\sigma) b(t,\sigma,\omega)| &\leq C t^{\frac{1}{2}} 2^p \|\partial_\sigma \partial_\omega (\varphi(2^{-p}\cdot) b)\|_{L^2} \\ &\leq C t^{\frac{1}{2}} \|\sigma\partial_\sigma \partial_\omega (\varphi(2^{-p}\cdot) b)\|_{L^2} \\ &\leq C t^{\frac{1}{2}} (\|\sigma\partial_\sigma \varphi(2^{-p}\cdot)\partial_\omega b\|_{L^2} + \|\varphi(2^{-p}\cdot)\sigma\partial_\sigma\partial_\omega b\|_{L^2}) \\ &\leq C t^{\frac{1}{2}} (\|\partial_\omega b\|_{L^2} + \|\sigma\partial_\sigma\partial_\omega b\|_{L^2}). \end{aligned}$$

La relation (4) implique que

$$t^{\frac{1}{2}} |\varphi(2^{-p}\sigma)|\sigma|^{\frac{1}{2}} b(t,\sigma,\omega)| \leq C\|\mathcal{Z}^2 a(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

Lorsque $|\sigma| \leq 1$, il suffit d'observer que

$$\partial_\sigma = \frac{1}{r}\rho - \frac{t}{r}\partial_t\,,$$

puis d'appliquer l'inégalité de Sobolev standard. On applique alors l'inégalité ci-dessus et l'inégalité (3) à la fonction ∇u et l'on trouve que

$$|(1+|t|+|x|)^{d-1}(1+||t|-|x||)\nabla u(t,x)|^2 \leq C\|\mathcal{Z}^{[\frac{d}{2}]+1}\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

Comme, pour tout élément Z de la famille $\mathcal{Z}$, le commutateur $[Z,\partial_j]$ vaut ∂_k ou bien 0, la proposition est démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. — *On a les minorations suivantes pour le temps d'existence maximal* T_ϵ. *Si* $d \geq 4$, *alors* $T_\epsilon = +\infty$, *si* $d = 3$, $T_\epsilon \geq \exp\left(\frac{C}{\epsilon}\right)$ *et si* $d = 2$, $T_\epsilon \geq \frac{C}{\epsilon^2}$.

Pour démontrer ce théorème, nous procédons par estimation d'énergie dans les espaces de Sobolev construits à l'aide des champs de vecteurs de la famille $\mathcal{Z}$. Soit s un entier supérieur ou égal à $d+5$. On pose alors

$$\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|I|\leq s} \|\nabla \mathcal{Z}^I u(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

La formule de Leibnitz et les propriétés de commutation (2) impliquent que

$$\Box \mathcal{Z}^I u = \sum_{0\leq j,k\leq d} g^{j,k}(\nabla u)\partial_j\partial_k \mathcal{Z}^I u = F_I \tag{5}$$

où F_I est de la forme

$$F_I = \sum_{\substack{J+K=I\\ J\neq 0}} \nabla(\mathcal{Z}^J u)\nabla^2(\mathcal{Z}^K u).$$

Estimons la norme L^2 de F_I. Comme $J+K=I$, ou bien $|J| \leq s/2$, ou bien $|K| < s/2$. Dans le premier cas, on écrit que

$$\|\nabla(\mathcal{Z}^J u(t,\cdot))\nabla^2(\mathcal{Z}^K u(t,\cdot))\|_{L^2} \leq \|\nabla(\mathcal{Z}^J u(t,\cdot))\|_{L^\infty}\|\nabla^2(\mathcal{Z}^K u(t,\cdot))\|_{L^2}.$$

Comme $J \neq 0$ et que $s \geq d+5$, il vient, en appliquant la proposition 2.1 que

$$\|\nabla(\mathcal{Z}^J u(t,\cdot))\nabla^2(\mathcal{Z}^K u(t,\cdot))\|_{L^2} \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Si maintenant $|K| < s/2$, l'estimation est analogue ; d'où l'inégalité

$$\|F_I(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2. \tag{6}$$

L'estimation d'énergie usuelle assure que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \exp - \int_0^t \|\nabla^2 u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty} d\tau\right) \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{d-1}{2}}}\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^3.$$

Considérons de manière classique le réel $\underline{T}_\epsilon$ défini par

$$\underline{T}_\epsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\Big\{T < T_\epsilon \,/\, \sup_{t\leq T}\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq 4\epsilon\|\mathcal{Z}^s u(0,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\Big\}.$$

La proposition 2.1 implique alors que, pour tout $T < \underline{T}_\epsilon$, on a, si c est assez petit,

$$M_s^2(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t\leq T}\|\mathcal{Z}^s u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \leq \left(\epsilon\|\mathcal{Z}^s u(0,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + CM_s^3(T)\int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{d-1}{2}}}\right)$$
$$\times \exp\left(C\epsilon\|\mathcal{Z}^s u(0,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{d-1}{2}}}\right).$$

Le théorème en résulte immédiatement.

Remarques.– Cette méthode n'est pas économe en régularité sur les données initiales. Elle est basée en grande partie sur un effet dispersif de l'équation des ondes. Une autre façon d'utiliser cela consiste à s'appuyer sur des effets liés à l'estimation de Strichartz. On peut démontrer, en suivant par exemple la démarche de Ginibre et Velo (voir par exemple [14]) que les solutions de $\Box u = 0$ vérifient

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla u_{|t=0}\|_B$$

où B est un espace de Besov du type "$d-2$ dérivées dans L^1". Malheureusement, cette inégalité ne peut être utilisée, car les normes de type L^1 ne sauraient être propagées par des équations de type onde.

Néammoins, en utilisant des effets de type Strichartz, on peut démontrer (voir [13] et [24]) qu'en dimension deux d'espace, si $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$ avec $s > \frac{23}{8}$, alors

$$T_\epsilon \geq \frac{C(\|(u_0,u_1)\|_{H^s\times H^{s-1}}}{\epsilon^{\frac{8}{7}}}\cdot$$

3. UN CAS MODÈLE TRÈS SIMPLE D'APPARITION DE SINGULARITÉS : L'ÉQUATION DE BURGER'S

Il s'agit maintenant d'être capable de prédire si des singularités peuvent effectivement apparaître, c'est-à-dire si le théorème 2.2 ci-dessus est optimal. Il est un cas modèle très simple où l'on sait prédire exactement quand la singularité apparaît et quelle est la nature de celle-ci ; c'est l'équation modèle dite de Burger's

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \quad \text{et} \quad u_{|t=0} = u_0$$

dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Ce modèle a le mérite d'être tout à la fois très simple, de fournir un modèle d'explosion qui sera transposable au cas de l'équation des ondes quasilinéaire (E), et d'intervenir techniquement dans la démonstration du théorème 4.1.

La très classique méthode des caractéristiques nous dit que le graphe de la solution est l'ensemble

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{déf}}{=} \{(t, x + tu_0(x), u_0(x))\,,\ (t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}\},$$

tant que cet ensemble est un graphe, c'est-à-dire tant que $1 + tu_0'(x)$ reste strictement positif. Si par exemple la donnée initiale u_0 est de classe C^2 à support compact, il existe nécessairement un tel point. Le temps maximal d'existence d'une solution régulière est alors donné par

$$T = \min -\frac{1}{u_0'(x)}\cdot$$

De plus, en dérivant l'équation, on trouve que

$$\partial_t \partial_x u + u \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 = 0,$$

ce qui assure que, par intégration le long des lignes de flot :

$$\partial_x u(t, x + t u_0(x)) = \frac{\partial_x u_0(x)}{1 + t \partial_x u_0(x)}.$$

Soit x_0 un point tel que

$$T = -\frac{1}{u_0'(x_0)}.$$

On voit immédiatement que

$$\partial_x u(t, x_0 + t u_0(x_0)) = \frac{T}{T - t}. \tag{7}$$

La solution u est constante sur les courbes caractéristiques, ce qui peut s'écrire

$$u(t, \phi(t, x)) = v(t, x)$$

où ϕ et v vérifient les sytèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \phi(t, x) & = & u_0(x) \\ \phi(0, x) & = & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v(t, x) & = & 0 \\ v(0, x) & = & u_0(x). \end{array} \right. \tag{8}$$

Les singularités de la solution correspondent aux points où $\partial_x \phi$ s'annule sans que $\partial_x u_0$ ne s'annule.

Supposons que x_0 soit l'unique minimum non dégénéré de u_0' (la valeur de u_0' en ce point est alors strictement négative puisque u est supposée à support compact). Alors la fonction ϕ vérifie, pour tout $t \leq T$,

$$(H_0) \left\{ \begin{array}{l} \partial_x \phi(t, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \partial_x \phi(t, x) = 0 \Longleftrightarrow (t, x) = (T, x_0), \\ \\ \partial_x \partial_t \phi(T, x_0) < 0\,, \ \partial_x^2 \phi(T, x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x^3 \phi(T, x_0) > 0. \end{array} \right.$$

Une telle singularité est une singularité de type cusp.

Cette vision du problème est à la base du concept d'explosion géométrique (et de la démonstration du théorème d'explosion 4.1).

4. ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Dans toute la suite, nous supposerons que la dimension d vaut 2. Le théorème 4.1 ci-dessous montre que l'ordre de grandeur du temps d'existence T_ϵ obtenu par les méthodes d'énergie ci-dessus est le bon.

Pour simplifier, on supposera que l'équation (E) est de la forme

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - \Delta u - \partial_t u \partial_t^2 u & = & 0 \\ (u, \partial_t u)_{|t=0} & = & \epsilon(u_0, u_1) \end{array} \right.$$

Avant d'énoncer le théorème, définissons la quantité qui gouverne le temps d'existence.

DÉFINITION 4.1. — On appelle premier profil associé aux données intiales (u_0, u_1), et l'on désigne par $R^{(1)}$ la fonction définie par

$$R^{(1)}(\sigma,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{s\geq\sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}}(R(s,\omega,u_1) - \partial_s R(s,\omega,u_0))ds,$$

où R désigne la transformation de Radon

$$R(s,\omega,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{(x|\omega)=s} v(x)dx.$$

Le théorème qui suit précise non seulement le temps d'existence, mais estime la solution près du point d'explosion.

THÉORÈME 4.1. — *Supposons que la fonction $\partial_\sigma^2 R^{(1)}$ ait un unique minimum négatif et non dégénéré en (σ_0, ω_0) et posons*

$$\tau_0 \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma_0,\omega_0)}.$$

– *Le temps d'existence T_ϵ satisfait*

$$T_\epsilon = \frac{\tau_0}{\epsilon^2} + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

– *De plus, il existe une constante C (dépendant de (u_0,u_1)) et une famille $(x_\epsilon)_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ telle que $\big||x_\epsilon| - T_\epsilon\big| \leq C$ et telle que, pour $\tau_0' < \tau_0$, on ait, en posant $I_\epsilon \stackrel{déf}{=} [\tau_0'\epsilon^{-2}, T_\epsilon]$,*

(9) $$\|\nabla u\|_{L^\infty(I_\epsilon\times\mathbf{R}^2)} \leq C\epsilon^2.$$

– *Pour tout α strictement positif, il existe C_α tel que*

(10) $$\|\nabla^2 u\|_{L^\infty((I_\epsilon\times\mathbf{R}^2)\cap\mathcal{D}_\epsilon^\alpha)} \leq C\epsilon^2 \quad \textit{avec} \quad \mathcal{D}_\epsilon^\alpha \stackrel{déf}{=} \mathbf{R}^{1+2}\backslash B((T_\epsilon,x_\epsilon),\alpha\epsilon^{-2}).$$

– *Enfin, on a*

(11) $$\|\nabla^2 u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\epsilon - t} \quad \textit{et} \quad \|\partial_t^2 u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{C(T_\epsilon - t)}.$$

Remarques.– Les inégalités (11) nient de manière "critique" l'appartenance de $\nabla^2 u$ à l'espace $L^1([0,T_\epsilon];L^\infty)$. Elles ont une analogie frappante avec l'inégalité (7).

De plus, la quantité $\sup\limits_{t\in[0,T_\epsilon[} (T_\epsilon - t)\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ est invariante par le changement d'échelle de l'équation.

La démonstration de ce résultat est l'aboutissement d'une longue série d'articles de S. Alinhac (les références [1] à [12]). La très grande technicité de la preuve nous interdit bien sûr d'en donner le détail. Nous nous contenterons d'en expliquer les grandes lignes et les idées fortes.

Tout d'abord, il convient de faire une analyse asymptotique par rapport au paramètre ϵ pour dégager l'allure de la solution bien avant l'apparition de la singularité. Cette analyse asymptotique permet alors de ramener le problème à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (dépendant de ϵ), la solution construite présentant une singularité en un point. La résolution de cette équation aux dérivées partielles se fait par une procédure d'éclatement.

5. ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

L'analyse asymptotique qui sert de base à la démonstration est faite dans [3] (on pourra aussi consulter [15]). Nous allons exposer ici de manière heuristique les idées importantes de la preuve.

Tout d'abord, les estimations de Sobolev à poids de la proposition 2.1 nous disent qu'à l'intérieur du cône de lumière, c'est-à-dire dans la zone où $t-r$ est assez grand, la quantité $\nabla^2 u$ est mieux contrôlée, et donc que les singularités ne sauraient apparaître dans cette zone. Il convient donc de se concentrer sur le bord du cône de lumière, c'est-à-dire dans la zone où $-C \leq r-t \leq M$.

Dans cette zone, il convient de s'intéresser particulièrement à l'allure de la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \Box u^{(1)} & = \ 0 \\ (u, \partial_t u) & = \ \epsilon(u_0, u_1). \end{cases}$$

Il est bien connu (voir par exemple [16]) qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$u^{(1)} = \frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F\big(r-t, \omega, \frac{1}{r}\big).$$

Les propriétés de l'équation des ondes en dimension 2 d'espace n'impliquent pas que F soit à support compact, mais simplement que F vérifie des propriétés de type symbole, c'est-à-dire que

$$|\partial_\sigma^\alpha \partial_\omega^\beta \partial_z^\gamma F(\sigma, \omega, z)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}+\gamma-\alpha}.$$

Une formule de Taylor en $z=0$ implique que

$$u^{(1)} \sim \frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \Big(R^{(1)}(r-t,\omega) + \frac{1}{r} R^{(2)}(r-t,\omega) \cdots + \frac{1}{r^k} R^{(k+1)}(r-t,\omega) + \cdots \Big)$$

où les $R^{(k)}$ vérifient des propriétés de type symbole

$$|\partial_\sigma^\alpha \partial_\omega^\beta R^{(k+1)})(\sigma, \omega)| \leq C_{k,\alpha,\beta}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}+k-\alpha}.$$

On en déduit donc que, au bord du cône, c'est-à-dire dans la zone où $-C \leq r-t \leq M$, la solution $u^{(1)}$ du problème linéaire est proche de

$$\frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} R^{(1)}(r-t, \omega),$$

et ce, dès que t est assez grand, par exemple de l'ordre de ϵ^{-1}.

Suivant alors une idée d'optique géométrique, on cherche la solution u sous la forme d'un profil modulé, c'est-à-dire sous la forme

$$u_\epsilon = \frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} G_\epsilon(r-t,\omega,\epsilon t^{\frac{1}{2}}),$$

la variable $\tau \overset{\text{déf}}{=} \epsilon t^{\frac{1}{2}}$ étant appelée "temps lent".

Un calcul immédiat montre que, si u est solution exacte de (E), alors la fonction G_ϵ est solution exacte de

$$\partial_\sigma\partial_\tau G_\epsilon + \partial_\sigma G_\epsilon(\partial_\sigma^2 G_\epsilon) + \epsilon \sum_{0\leq j,k\leq d} P_\epsilon^{j,k}(\sigma,\omega,\tau,G_\epsilon,\nabla G_\epsilon)\partial_j\partial_k G_\epsilon = 0, \tag{12}$$

les $P^{j,k}$ étant des fonctions indéfiniment différentiables de leurs arguments (uniformément en ϵ) dans la zone où $-C\leq r-t\leq M$.

Les méthodes d'énergie utilisant la famille de champs de vecteurs $\mathcal{Z}$ permettent de penser que, tant que $t\leq \epsilon^{-2}\tau_0'$, avec $\tau_0'<\tau_0$ et près du bord du cône d'onde, la solution u se comporte comme

$$\frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} G^{(1)}(r-t,\omega,\epsilon t^{\frac{1}{2}})$$

où $G^{(1)}$ est solution, non pas de l'équation (12), mais de l'équation

$$\begin{cases} \partial_\sigma\partial_\tau G^{(1)} + \partial_\sigma G^{(1)}(\partial_\sigma^2 G^{(1)}) & = & 0 \\ \partial_\sigma G^{(1)}_{|\tau=0}(\sigma,\omega) & = & R^{(1)}(\sigma,\omega). \end{cases}$$

Remarquons que le temps de vie de cette équation de Burger's en $\partial_\sigma G^{(1)}$ est exactement $-\dfrac{1}{\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma_0,\omega_0)}\cdot$ C'est ainsi qu'il est démontré dans [15] que

$$\liminf_{e\to 0} \epsilon^2 T_\epsilon \geq \tau_0 = -\frac{1}{\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma_0,\omega_0)}\cdot$$

Ainsi, la bonne équation pour le profil modulé G_ϵ apparaît être

$$(EP_\epsilon)\begin{cases} \partial_\sigma\partial_\tau G_\epsilon + \partial_\sigma G_\epsilon(\partial_\sigma^2 G_\epsilon) & = & -\epsilon^2 \displaystyle\sum_{0\leq j,k\leq d} P_\epsilon^{j,k}(\sigma,\omega,\tau,G_\epsilon,\nabla G_\epsilon)\partial_j\partial_k G_\epsilon \\ \partial_\sigma G_{\epsilon|\tau=\tau_0'}(\sigma,\omega) & = & G^{(1)}(\sigma,\omega,\tau_0') + \epsilon L_\epsilon(\sigma,\omega). \end{cases} \tag{13}$$

où L est une fonction indéfiniment différentiable (uniformément en ϵ).

6. LE THÉORÈME D'EXPLOSION GÉOMÉTRIQUE

Le théorème 4.1 est un corollaire du théorème plus précis suivant.

THÉORÈME 6.1.— *Pour tout entier k supérieur ou égal à 3, il existe un réel strictement positif ϵ_k et un réel strictement positif C_0 et un ouvert relativement compact V de $\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}$ tels que, pour tout $\epsilon\in]0,\epsilon_k[$, l'ensemble*

$$V_\epsilon \overset{\text{déf}}{=} V\cap(\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1\times]-\infty,\epsilon^2 T_\epsilon])$$

soit non vide. Il existe de plus trois familles (ϕ_ϵ), (v_ϵ) *et* (w_ϵ), *uniformément de classe* C^k *sur* V_ϵ *et une famille* $(\widetilde{M}_\epsilon)$ *de points, avec* $\widetilde{M}_\epsilon = (\sigma_\epsilon, \omega_\epsilon, \epsilon^2 T_\epsilon) \in V_\epsilon$, *vérifiant les propriétés suivantes.*

– *La fonction* ϕ_ϵ *vérifie*

$$(H)\left\{\begin{array}{c} \partial_s\phi_\epsilon \geq 0 \quad \text{et} \quad \partial_s\phi_\epsilon(s,\sigma,\omega) = 0 \Longleftrightarrow (s,\sigma,\omega) = \widetilde{M}_\epsilon \\ \\ \partial_s\partial_\tau\phi_\epsilon(\widetilde{M}_\epsilon) < 0\,, \ \partial_{s,\omega}\partial_s\phi_\epsilon(\widetilde{M}_\epsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \partial^2_{s,\omega}\partial_s\phi_\epsilon(\widetilde{M}_\epsilon) \gg 0. \end{array}\right.$$

– *On a de plus*

$$\partial_s w_\epsilon = (\partial_s\phi)v_\epsilon \quad \text{et} \quad \partial_s v_\epsilon(\widetilde{M}_\epsilon) \neq 0.$$

– *Posons maintenant*

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(s,\omega,\tau) &\overset{\text{déf}}{=} (\phi_\epsilon(s,\omega,\tau),\omega,\tau)\,, \\ x_\epsilon &\overset{\text{déf}}{=} (\sigma_\epsilon + T_\epsilon)\omega_\epsilon \quad \text{et} \\ \overline{M}_\epsilon &\overset{\text{déf}}{=} \left(|x_\epsilon| - T_\epsilon, \frac{x_\epsilon}{|x_\epsilon|}, \epsilon^2 T_\epsilon\right). \end{aligned}$$

Il existe alors un réel strictement positif α *tel que*

$$\forall (t,x) \in]-\infty, T_\epsilon] \cap B((T_\epsilon, x_\epsilon), \alpha\epsilon^{-2})\,, \ u = \frac{\epsilon}{r^{\frac{1}{2}}} G_\epsilon(r - t, \omega, \epsilon t^{\frac{1}{2}}),$$

la fonction G_ϵ *étant définie sur un voisinage de* $\overline{M}_\epsilon$ *dans* $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^1 \times]-\infty, \epsilon^2 T_\epsilon]$ *par*

$$G_\epsilon(\Phi_\epsilon) = w_\epsilon.$$

Remarque.– Les conditions (H) sont les analogues exactes des conditions (H_0) ; la singularité est de type cusp.

La démonstration de ce théorème n'est, compte tenu de l'analyse asymptotique précédemment exposée, rien d'autre que la résolution de l'équation (EP_ϵ).

7. L'ÉCLATEMENT D'UN SYSTÈME SUR UN EXEMPLE MODÈLE

Plutôt que de résoudre le système (EP_ϵ) général, nous allons exposer le cas modèle suivant :

$$\partial_\sigma\partial_\tau G + \partial_\sigma G(\partial^2_\sigma G) + \epsilon^2\partial^2_\omega G = 0.$$

Si l'on pose $G_1 \overset{\text{déf}}{=} \partial_\sigma G$ et $G_2 \overset{\text{déf}}{=} \partial_\omega G$, on trouve que l'équation ci-dessus est équivalente au système suivant

$$(EPM_\epsilon)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_\tau G_1 + G_1\partial_\sigma G_1 + \epsilon^2\partial^2_\omega G_2 &=& 0 \\ \partial_\sigma G_2 - \partial_\omega G_1 &=& 0. \end{array}\right.$$

La procédure d'éclatement consiste à rechercher (G_1, G_2) sous la forme

$$(G_1, G_2)(\Phi) = (v_1, v_2) \quad \text{avec} \quad \Phi(X, Y, T) = (\sigma = \phi(X, Y, T), \omega = Y, \tau = T),$$

ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_T \phi - v_1 - \epsilon^2 (\partial_Y \phi)^2 & = & 0 \\ \partial_T v_1 - \epsilon^2 \partial\phi \partial_Y v_1 + \epsilon^2 \partial_Y v_2 & = & 0 \\ \partial_X v_2 - \partial_X \phi \partial_Y v_1 + \partial_Y \phi \partial_X v_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{array}{rcl} \phi(X, Y, 0) & = & X \\ v_1(X, Y, 0) & = & \partial_X G \\ v_2(X, Y, 0) & = & \partial_Y G \quad \text{et} \end{array}$$

$$\phi(0, X, Y) = v_1(0, Y, Y) = v_2(0, Y, T) = 0.$$

Lorsque $\epsilon = 0$, le lecteur aura reconnu l'écriture "éclatée" de l'équation de Burger's donnée par (8). Lorsque ϵ est strictement positif, le système ci-dessus est l'éclaté du système (EPM_ϵ).

THÉORÈME 7.1. — *Sous l'hypothèse que $\partial_\sigma^2 G$ admet un unique minimum strictement négatif et non dégénéré, alors pour tout entier pair s assez grand et pour tout μ strictement supérieur à 1, il existe, pour ϵ assez petit, un temps $\widetilde{T}_\epsilon$ et un domaine V_ϵ de forme analogue à celui du théorème 6.1, tels qu'il existe trois fonctions ϕ_ϵ, $v_{1,\epsilon}$ et $v_{2,\epsilon}$ définies sur V_ϵ solutions du système ci-dessus. La fonction ϕ_ϵ vérifie :*

$$\sup_{\substack{\epsilon \\ j \leq 4}} \sum_{2k+\ell \leq s} \int_0^{\widetilde{T}_\epsilon} (\widetilde{T}_\epsilon - T)^\mu |\partial_X^k \partial_Y^\ell \partial_T^j \phi_\epsilon(X, Y, T)|^2 dX dY dT < \infty,$$

le système donnant les régularités correspondantes de $v_{1,\epsilon}$ et $v_{2,\epsilon}$.

De plus, ϕ_ϵ vérifie les conditions (H).

Les principales difficultés rencontrées dans la démonstration sont les suivantes. Tout d'abord, le linéarisé devient instable lorsque $\partial_X \phi$ devient négatif. Ceci empêche de résoudre le système au-delà du moment où $\partial_X \phi$ devient négatif. Mais ce moment est bien sûr une inconnue du problème. Il s'agit donc d'un problème à frontière libre.

La première étape consiste à se ramener à un problème sur un domaine fixe, ensuite on met en place une procédure à la Nash-Moser qui nécessite une étude détaillée de l'opérateur linéarisé.

Les détails sont donnés dans [9] pour le cas modèle étudié ici, dans [10] pour l'équation (EP_ϵ) et dans [11] pour l'équivalent de l'équation (EP_ϵ) dans le cas des équations (E) générales.

Références

[1] S. Alinhac - Une solution approchée en grands temps des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux, *Communications in Partial Differential Equations* **17** (1992), 447–490.

[2] S. Alinhac - Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux, *Inventiones Mathematicae* (1993), 627–678.

[3] S. Alinhac - Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'onde quasi-linéaires en dimension deux, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **26** (1995), 529–565.

[4] S. Alinhac - Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyberboliques quasilinéaires en dimension un d'espace I, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **22** (1995), 493–515.

[5] S. Alinhac - Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyberboliques quasilinéaires en dimension un d'espace II, *Duke Mathematical Journal* **73** (1994), 543–560.

[6] S. Alinhac - Explosion géométrique pour des systèmes quasilinéaires, *American Journal of Mathematics* **117** (1995), 987–1017.

[7] S. Alinhac - Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux I, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **28** (1995), 225–251.

[8] S. Alinhac - Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux II, *Duke Mathematical Journal* **73** (1994), 543–560.

[9] S. Alinhac - Explosion des solutions d'une équation d'ondes quasi-linéaire en deux dimensions d'espace, *Communications in Partial Differential Equations* **21** (1996), 923–969.

[10] S. Alinhac - Blow up of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions I, *à paraître dans Annals of Mathematics*, 1998.

[11] S. Alinhac - Blow up of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II, *à paraître dans Acta Matematica.*

[12] S. Alinhac - Stability of geometric blowup, *Prépublication de l'Université Paris-Sud* 97–86.

[13] H. Bahouri et J.-Y. Chemin - Inégalités de Strichartz et équations d'ondes quasilinéaires, *Séminaire Équations aux dérivées Partielles de l'École Polytechnique*, 1997–1998.

[14] J. Ginibre et G. Velo - Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *Journal of Functional Analysis* **133** (1995), 50–68.

[15] L. Hörmander - The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations, *Lecture Notes in Mathematics* **1256**, Springer Verlag (1986), 214–280.

[16] L. Hörmander - *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques et Applications **26**, Springer, 1996.

[17] F. John - Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions, Mat. Apl. Comput. **4** (1985), 3–18.

[18] F. John - Existence for large times of strict solutions of non linear wave equations in three space dimensions, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **40** (1987), 79–109.

[19] F. John et S. Klainerman - Almost global existence to non linear wave equations in three space dimensions, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **37** (1984), 443–455

[20] S. Klainerman - Global existence for nonlinear wave equations, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **33** (1980), 43–101.

[21] S. Klainerman - Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation *Communications in Pure and Applied Mathematics* **38** (1985), 321–332.

[22] S. Klainerman - The null condition and global existence to non linear wave equations, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **38** (1985), 631–641.

[23] A. Majda - *Compressible fluids flows and systems of conservation laws*, Springer Applied Mathematical Sciences **53** (1984).

[24] D. Tataru - Stichartz estimates for operators with nonsmooth coefficients and the nonlinear wave equation, *prépublication.*

[25] C. Zuily - Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaires, in *Séminaire Bourbaki Volume 1993/1994*, Astérisque **227** (1995), 107–144.

Jean-Yves CHEMIN

Analyse Numérique, Case 187
Université Pierre et Marie CURIE
4 Place Jussieu
F-75230 Paris Cedex 05, France
Télécopie : (33) 01 44 27 72 00
E-mail : `chemin@ann.jussieu.fr`