

**AMIBES DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES
ET DÉNOMBREMENT DE COURBES**

[d'après G. Mikhalkin]

par Ilia ITENBERG

INTRODUCTION

Le nom *amibes* pour les objets que nous allons considérer a été introduit par I. M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky [8] en 1994. Des objets similaires surgissaient de temps en temps (voir, par exemple, [3]) avant l'apparition formelle des amibes sur la scène mathématique. (Il faut signaler que le terme *amibe* est utilisé aussi en logique, mais a une signification complètement différente.) Une amibe typique dans \mathbb{R}^2 est une région non bornée qui ressemble un peu au dessin d'une amibe biologique (voir la Figure 1).

Les amibes habitent dans l'intersection de plusieurs domaines des mathématiques tels que la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, la topologie, l'analyse complexe et la combinatoire. Elles permettent de visualiser des variétés algébriques et de les étudier par des méthodes non algébriques. Des résultats impressionnants ont été obtenus au cours de ces neuf années passées depuis l'introduction des amibes. Les premières observations fondamentales ont été faites par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky [8]. Les résultats concernant les amibes et provenant de leur traitement analytique sont essentiellement dus à M. Forsberg, M. Passare, H. Rullgård et A. Tsikh (voir [6, 26, 30, 31]). Les interprétations topologiques et la plupart des applications des amibes (en particulier, les relations avec la géométrie algébrique réelle) sont dues à G. Mikhalkin [19, 20, 21, 22, 23].

Le texte actuel est principalement consacré aux applications des amibes. Nous verrons d'abord des exemples d'utilisation des amibes en topologie des variétés algébriques réelles (voir le paragraphe 1.3). Les autres applications présentées concernent des questions de géométrie énumérative. Un rôle important dans ces applications énumératives est joué par les amibes *non archimédiennes*, (*i.e.* les amibes de variétés sur un corps valué non archimédien) qui ont été introduites par Kapranov [12]. Elles sont

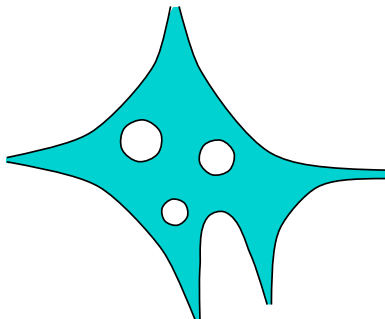


FIGURE 1. Une amibe

étroitement liées à un domaine relativement nouveau et très passionnant : la *géométrie algébrique tropicale* (voir, par exemple, [35]).

On peut déformer les amibes d'hypersurfaces complexes en amibes non archimédiennes. Ces amibes non archimédiennes sont des complexes polyédraux dans \mathbb{R}^n qui peuvent être considérés comme des variétés sur un semi-anneau tropical $(\max, +)$, et par conséquent, portent le nom de *variétés tropicales*. La déformation que l'on vient de mentionner est en rapport direct avec la déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs ([17, 18]), la construction du patchwork due à O. Viro (voir [37, 38] et [28]) et le passage à « *large complex limit* » (voir [16]). M. Kontsevich [16] a proposé d'utiliser les courbes tropicales dans des questions concernant le dénombrement de courbes passant par des points donnés sur une surface complexe. Ce programme a été mis en œuvre par Mikhalkin [22, 23].

Mikhalkin a découvert une correspondance qui fournit un lien direct entre la géométrie algébrique complexe et la géométrie tropicale. Cette correspondance permet de dénombrer certaines courbes nodales de genre donné qui passent par des points génériques donnés sur une surface torique. Formulé de manière informelle, le théorème de Mikhalkin affirme que le nombre de courbes en question est égal au nombre de leurs analogues tropicaux passant par des points génériques donnés dans \mathbb{R}^2 et comptés avec des multiplicités. En plus, Mikhalkin a trouvé un algorithme combinatoire pour dénombrer les courbes tropicales correspondantes.

La correspondance de Mikhalkin permet aussi de dénombrer les courbes réelles passant par des collections spécifiques de points réels sur une surface torique (bien entendu, avec les résultats dépendant du choix de la collection ; voir [22], [23]). Heureusement, une autre découverte importante est tombée à pic : celle faite par J.-Y. Welschinger (voir [41, 42]). Il a trouvé une façon d'attribuer des poids aux courbes réelles rationnelles, conçue pour rendre le nombre de courbes comptées avec poids indépendant de la configuration des points et produire des bornes inférieures

pour le nombre de courbes en question. Ainsi est apparu un autre type d'applications de la correspondance de Mikhalkin. Cette approche a déjà donné des résultats, en particulier, l'existence des courbes réelles rationnelles passant par des points réels donnés dans le plan projectif réel (voir [11] et le paragraphe 3.5).

Comme complément utile aux textes de Mikhalkin, le lecteur peut consulter le texte [32], où E. Shustin, inspiré par les résultats de Mikhalkin et la technique tropicale, donne une description et une preuve alternatives de la correspondance de Mikhalkin.

Le texte est organisé de la façon suivante. La section 1 contient la définition et une brève description des propriétés des amibes, ainsi que des applications de celles-ci à la topologie des variétés algébriques réelles.

La section 2 est consacrée à la géométrie algébrique tropicale. Le paragraphe 2.1 porte sur la déquantification des nombres réels strictement positifs. Le paragraphe 2.3 contient des notions de base concernant des variétés tropicales. La définition et les propriétés des amibes non archimédiennes sont présentées dans le paragraphe 2.4.

La section 3 porte sur des résultats énumératifs. Les paragraphes 3.1 et 3.4 sont consacrés aux formulations de questions énumératives (respectivement, complexes et réelles). Les analogues tropicaux des notions algèbro-géométriques nécessaires pour le théorème de correspondance sont présentés dans le paragraphe 3.2. Le théorème de correspondance lui-même fait l'objet du paragraphe 3.3. Le paragraphe 3.5 contient des formules combinatoires pour les nombres de courbes étudiés.

Finalement, la section 4 présente les idées des démonstrations des théorèmes principaux.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier M. Coste, V. Kharlamov, G. Mikhalkin, E. Shustin et O. Viro pour des discussions très utiles. L'auteur remercie G. Mikhalkin pour avoir mis à sa disposition une version préliminaire de [23].

1. AMIBES DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

1.1. Définition et propriétés de base

Soient n un entier strictement positif, et $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ une variété algébrique (pour un corps K quelconque, on pose $K^* = K \setminus \{0\}$). Considérons l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|). \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.1. — *L'amibe $\mathcal{A}(V)$ de V est l'image de V par l'application Log .*

Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont mis en évidence les propriétés suivantes des amibes.

- L'amibe $\mathcal{A}(V)$ est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n , et le complémentaire de $\mathcal{A}(V)$ est non vide.
- Si $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ est une hypersurface, alors chaque composante connexe du complémentaire de $\mathcal{A}(V) \subset \mathbb{R}^n$ est convexe.

La propriété de convexité des composantes connexes du complémentaire de l'amibe d'une hypersurface ne se transporte pas littéralement au cas des variétés de codimension plus élevée. Néanmoins, en codimension > 1 , il existe certaines généralisations de la propriété de convexité (voir, par exemple, [9]).

Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont aussi décrit le comportement des amibes à l'infini en termes d'amibes de dimensions plus petites. Soient Δ un polytope convexe à sommets entiers dans \mathbb{R}^n , et Tor_Δ la variété torique associée (voir, par exemple, [7]). La variété Tor_Δ est une compactification de $(\mathbb{C}^*)^n$ telle que l'action multiplicative de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur lui-même se prolonge sur Tor_Δ . Le complémentaire de $(\mathbb{C}^*)^n \subset \text{Tor}_\Delta$ se décompose en réunion des variétés toriques associées aux faces de Δ . Notons $\tilde{V} \subset \text{Tor}_\Delta$ la compactification de V .

Le polytope Δ détermine aussi une forme symplectique ω sur Tor_Δ . Cette forme est invariante par l'action du tore $(S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ formé par les (z_1, \dots, z_n) tels que $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$. Considérons l'application des moments correspondante $\mu : \text{Tor}_\Delta \rightarrow \Delta$ (voir, par exemple, [2]).

DÉFINITION 1.2. — *L'amibe compactifiée $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V})$ de \tilde{V} est $\mu(\tilde{V}) \subset \Delta$.*

Remarquons que l'application $\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ peut aussi être vue comme une application des moments (pour l'action de $(S^1)^n$ sur $(\mathbb{C}^*)^n$ muni de la forme symplectique $\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{dz_j}{z_j} \wedge \frac{d\bar{z}_j}{\bar{z}_j}$).

Les applications $\mu|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ et Log sont des submersions et ont les mêmes tores réels pour fibres. Par conséquent, $\mathcal{A}(V)$ peut être envoyé sur $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}) \cap \text{Int}(\Delta)$ (où $\text{Int}(\Delta)$ est l'intérieur de Δ) par un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur $\text{Int}(\Delta)$.

Soient Δ' une face de Δ , et $\text{Tor}_{\Delta'} \subset \text{Tor}_\Delta$ la variété torique associée à Δ' . Posons $\tilde{V}' = \tilde{V} \cap \text{Tor}_{\Delta'}$.

PROPOSITION 1.3 (Gelfand, Kapranov et Zelevinsky, [8]). — *On a*

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}') = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}) \cap \Delta'.$$

L'amibe d'une courbe $V \subset (\mathbb{C}^*)^2$ atteint l'infini par « tentacules » (voir la Figure 1). Chaque tentacule contient exactement un rayon, et tend vers ce rayon en s'approchant de l'infini. Le rayon contenu dans un tentacule est orthogonal à un côté de Δ (on dit que le tentacule est associé à ce côté de Δ). Le nombre de tentacules associés à un côté c est strictement positif et inférieur ou égal à la longueur entière de c , (*i.e.* au nombre de segments en lesquels c est divisé par ses points entiers).

1.2. Amibes d'hypersurfaces

Soit $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$ un polynôme complexe à n variables (ici $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ est un multi-indice, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ et $\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$), et $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ l'hypersurface définie par f dans $(\mathbb{C}^*)^n$. L'enveloppe convexe Δ des points $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ tels que $a_{\mathbf{i}} \neq 0$ s'appelle le *polytope de Newton* de f (on dit aussi que Δ est le polytope de Newton de V).

À chaque composante connexe du complémentaire de $\mathcal{A}(V)$ dans \mathbb{R}^n , on peut associer, d'une façon naturelle, un point entier de Δ .

THÉORÈME 1.4 (M. Forsberg, M. Passare et A. Tsikh, [6]). — *Il existe une fonction localement constante $\text{ind} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V) \rightarrow \Delta \cap \mathbb{Z}^n$ qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de $\mathcal{A}(V)$ sur des points entiers différents de Δ . En particulier, le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ est inférieur ou égal au nombre de points entiers de Δ .*

Remarque 1.5. — Mikhalkin a proposé une interprétation topologique de la démonstration du Théorème 1.4. Pour décrire une fonction ind ayant les propriétés formulées ci-dessus, choisissons un point x dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$. L'image réciproque de x par Log est un tore dont l'intersection avec V est vide. Pour chaque entier $1 \leq j \leq n$, considérons un j -ème méridien m_j de ce tore, *i.e.* un cercle le long duquel toutes les coordonnées sauf la j -ème sont constantes. Soit D_j un disque de bord m_j dans \mathbb{C}^n . Notons κ_j l'indice d'intersection de D_j et de l'adhérence de V dans \mathbb{C}^n . L'entier κ_j ne dépend pas du choix de m_j et D_j . L'application $\text{ind} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ associant à x le point $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ est localement constante et envoie des composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ sur des points entiers différents de Δ . On renvoie à [19] pour les détails.

La borne supérieure pour le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ formulée dans le Théorème 1.4 est atteinte : pour tout polytope convexe Δ à sommets entiers dans \mathbb{R}^n , il existe une hypersurface $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ de polytope de Newton Δ telle que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ soit égal au nombre de points entiers de Δ (voir, par exemple, [20]).

Un outil analytique très important dans l'étude des amibes est la *fonction de Ronkin*. Pour un polynôme $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$, la fonction de Ronkin $N_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$N_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(\mathbf{x})} \log |f(\mathbf{z})| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

(On considère ici la fonction $\log |f| : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en posant $\log(0) = -\infty$.) L'énoncé suivant est un corollaire du fait que $\log |f|$ est une fonction plurisousharmonique qui est pluriharmonique sur $(\mathbb{C}^*)^n \setminus V$ et strictement plurisousharmonique sur V .

PROPOSITION 1.6 (L. Ronkin, M. Passare et H. Rullgård, [29], [26])

La fonction de Ronkin N_f est convexe. Elle est affine sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ et strictement convexe sur $\mathcal{A}(V)$.

Remarquons que l'existence d'une fonction ayant les propriétés mentionnées dans la Proposition 1.6 implique que chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ est convexe.

Soit $\nabla N_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le gradient de N_f . D'après la Proposition 1.6, le gradient ∇N_f est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$. La proposition suivante peut être démontrée à l'aide de la formule de Jensen.

PROPOSITION 1.7 (M. Passare et H. Rullgård, [26]). — *On a*

$$\text{Int}\Delta \subset \nabla N_f(\mathbb{R}^n) \subset \Delta.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$, l'image $\nabla N_f(x)$ de x est un point entier de Δ . En plus, la restriction de ∇N_f à $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ coïncide avec la fonction ind du Théorème 1.4 et de la Remarque 1.5.

Puisque N_f est affine sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$, on peut définir une fonction N_f^∞ convexe et affine par morceaux en posant $N_f^\infty = \max_{\mathcal{F}} N_{\mathcal{F}}$, où \mathcal{F} parcourt toutes les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$, et $N_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction affine dont la restriction à \mathcal{F} coïncide avec N_f .

Passare et Rullgård [26] ont proposé la définition suivante.

DÉFINITION 1.8. — *Le squelette Sq de l'amibe $\mathcal{A}(V)$ est le lieu des coins de N_f^∞ , i.e. le sous-ensemble de \mathbb{R}^n où N_f^∞ n'est pas lisse.*

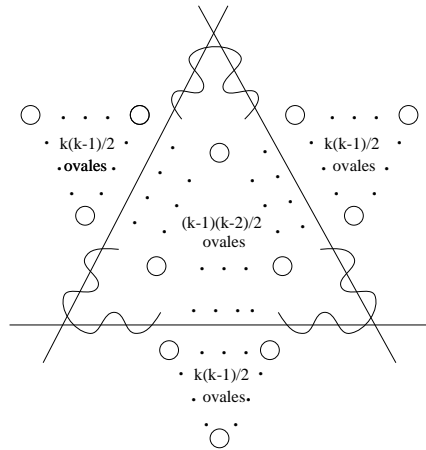
Clairement, Sq est un complexe polyédral qui est contenu dans $\mathcal{A}(V)$. En plus, le squelette Sq est un rétract par déformation de $\mathcal{A}(V)$ (voir [26] et [31]).

Nous interrompons ici la présentation des amibes. D'autres propriétés des ces objets remarquables peuvent être trouvées dans les articles de synthèse [20] et [25]. Nous allons nous intéresser aux applications des amibes.

1.3. Premières applications

Les premières applications significatives des amibes ont été proposées par Mikhalkin dans le cadre de la première partie du 16ème problème de Hilbert (voir [10]). Elles sont liées, en particulier, à la question sur les configurations possibles des composantes connexes (de l'ensemble des points réels) d'une courbe non singulière de degré donné dans le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$. Soient m un entier strictement positif, et $\mathbb{R}X$ une courbe non singulière de degré m dans $\mathbb{R}P^2$. Quels sont les types topologiques possibles de la paire $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}X)$? La réponse complète à cette question n'est connue que pour $m \leq 7$.

Le nombre de types topologiques réalisables par $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}X)$, où $\mathbb{R}X$ est une courbe non singulière de degré m , croît de façon exponentielle quand m tend vers l'infini

FIGURE 2. Le $(2k, 3)$ -type topologique maximal

(voir [13, 14] pour des résultats sur l'asymptotique de ce nombre). Beaucoup de restrictions importantes sur les types topologiques en question peuvent être trouvées, par exemple, dans les articles de synthèse [43], [39] et [5]. Le cas le plus restrictif et le plus intéressant est celui des courbes maximales. (Une courbe algébrique non singulière dans $\mathbb{R}P^2$ est dite *maximale* si le nombre de ses composantes connexes est maximal pour le degré donné. Ce nombre maximal est égal à $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ pour le degré m .) Le nombre de types topologiques des paires $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}X)$ réalisables par les courbes maximales de degré donné croît aussi de façon exponentielle quand le degré tend vers l'infini.

La situation change si on considère $\mathbb{R}P^2$ comme une compactification de $(\mathbb{R}^*)^2$, *i.e.* si on tient compte de la position d'une courbe étudiée par rapport aux trois droites qui forment $\mathbb{R}P^2 \setminus (\mathbb{R}^*)^2$.

Soient l_1, \dots, l_s des droites en position générique dans $\mathbb{R}P^2$.

DÉFINITION 1.9. — *On dit qu'une courbe $\mathbb{R}X$ de degré m dans $\mathbb{R}P^2$ est en position maximale par rapport à la collection l_1, \dots, l_s , si $\mathbb{R}X$ est maximale et s'il existe s arcs disjoints r_1, \dots, r_s sur une composante connexe de $\mathbb{R}X$ tels que, pour chaque $j = 1, \dots, s$, l'arc r_j a m points d'intersection avec l_j .*

Le type topologique d'une triade $(\mathbb{R}P^2; \mathbb{R}X, l_1 \cup \dots \cup l_s)$, où $\mathbb{R}X$ est une courbe de degré m en position maximale par rapport à l_1, \dots, l_s , s'appelle un (m, s) -type topologique maximal.

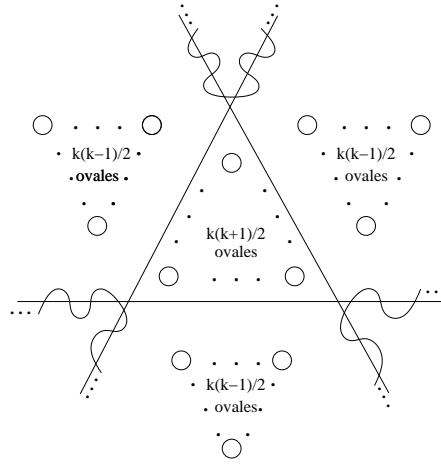


FIGURE 3. Le $(2k + 1, 3)$ -type topologique maximal

THÉORÈME 1.10 (Mikhalkin, [19]). — *Pour tout entier strictement positif m , il existe exactement un $(m, 3)$ -type topologique maximal; il est représenté sur les Figures 2 et 3 (cas m pair et m impair, respectivement). Il n'existe pas de (m, s) -type topologique maximal avec $s > 3$ et $m \geq 3$.*

La deuxième affirmation du Théorème 1.10 est un corollaire de la première. Pour démontrer la première affirmation, Mikhalkin considère une courbe $\mathbb{R}X$ de degré m en position maximale par rapport à trois droites l_1, l_2 et l_3 dans $\mathbb{R}P^2$, identifie le complémentaire de ces trois droites avec $(\mathbb{R}^*)^2$ (en prenant l_1, l_2 et l_3 pour des axes de coordonnées), et étudie l'amibe de la courbe correspondante V dans $(\mathbb{C}^*)^2$. (Puisqu'on considère maintenant $\mathbb{C}P^2$ comme une compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$, on va utiliser la notation $\mathbb{R}\tilde{V}$ pour $\mathbb{R}X$.) La démonstration est basée sur le résultat suivant : la condition de maximalité implique que le lieu critique de $\text{Log}|_V$ coïncide avec l'ensemble $\mathbb{R}V$ des points réels de V , et que la frontière de l'amibe $\mathcal{A}(V)$ coïncide avec $\text{Log}(\mathbb{R}V)$. En plus, pour chaque composante connexe \mathcal{F} de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(V)$, la description topologique de la fonction ind (voir la Remarque 1.5) permet de retrouver le quadrant de $(\mathbb{R}^*)^2$ contenant les points de $\mathbb{R}V$ qui sont envoyés par Log sur la frontière de \mathcal{F} (en fait, le quadrant est déterminé par les parités des coordonnées de $\text{ind}(x)$, où $x \in \mathcal{F}$). On renvoie à [19] et [20] pour les détails.

Le Théorème 1.10 a une généralisation qui s'applique à d'autres surfaces toriques (voir [19]). Il a aussi une version concernant des hypersurfaces de dimension plus élevée (voir [19]), mais, en l'état actuel, les énoncés du théorème deviennent plus faibles quand la dimension augmente.

Les courbes maximales de degré pair (respectivement, impair) dont la position par rapport aux axes de coordonnées est décrite sur la Figure 2 (respectivement, sur la Figure 3) s'appellent les *courbes simples de Harnack*. Elles ont beaucoup de propriétés géométriques remarquables. Par exemple, si $\mathbb{R}\tilde{V} \subset \mathbb{R}P^2$ est une courbe simple de Harnack, alors $\mathbb{R}V \subset (\mathbb{R}^*)^2$ n'a pas de point d'inflexion logarithmique réel, *i.e.* n'a pas de point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}V$ tel que $\text{Log}(\mathbf{x})$ soit un point d'inflexion de $\text{Log}(\mathbb{R}V)$ (voir [19]).

Les amibes des courbes simples de Harnack ont la plus grande aire parmi les amibes des courbes de degré donné dans $\mathbb{R}P^2$ (voir [24]). L'aire de l'amibe d'une courbe $V \subset (\mathbb{C}^*)^2$ est toujours finie et peut être majorée en termes du polygone de Newton de V . Passare et Rullgård [26] ont proposé la définition suivante : la *mesure de Monge-Ampère* sur $\mathcal{A}(V)$ est la tirée en arrière de la mesure de Lebesgue sur $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ par ∇N_f (où f est un polynôme définissant la courbe V). Le théorème suivant provient d'une comparaison des mesures de Lebesgue et de Monge-Ampère sur $\mathcal{A}(V)$.

THÉORÈME 1.11 (Passare et Rullgård, [26]). — *Soit $V \subset (\mathbb{C}^*)^2$ une courbe algébrique ayant le polygone de Newton Δ . Alors, $\text{Aire } \mathcal{A}(V) \leq \pi^2 \text{Aire } \Delta$.*

Ce théorème est spécifique au cas des amibes dans \mathbb{R}^2 , car la Proposition 1.3 implique que les amibes d'hypersurfaces dans $(\mathbb{C}^*)^n$, $n > 2$, ont en général un volume infini.

2. GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE TROPICALE

2.1. Déquantification des nombres réels strictement positifs

Considérons une famille de semi-anneaux $\{S_t\}$, $t \in (1, +\infty]$. Comme ensemble, chaque semi-anneau S_t coïncide avec \mathbb{R} . Les opérations d'addition et multiplication dans S_t sont définies de la manière suivante :

$$a \oplus_t b = \begin{cases} \log_t(t^a + t^b), & \text{si } t \neq +\infty, \\ \max\{a, b\}, & \text{si } t = +\infty ; \end{cases}$$

$$a \odot_t b = a + b.$$

Ces opérations dépendent de t de façon continue. Chaque semi-anneau S_t avec une valeur finie de t est isomorphe au semi-anneau \mathbb{R}_+^* des nombres réels strictement positifs (munis des opérations habituelles d'addition et multiplication) : l'application $x \mapsto \log_t x$ effectue un isomorphisme entre \mathbb{R}_+^* et S_t . Par contre, S_∞ n'est pas isomorphe à \mathbb{R}_+^* . C'est un semi-anneau idempotent qui s'appelle un *semi-anneau* $(\max, +)$ et noté \mathbb{R}_{trop} . Le semi-anneau \mathbb{R}_{trop} est un des semi-anneaux *tropicaux* (voir, par exemple, [27]). Les opérations \oplus_∞ et \odot_∞ dans \mathbb{R}_{trop} s'appellent l'*addition tropicale* et la *multiplication tropicale*, respectivement.

Le passage de valeurs finies de t à l'infini dans la famille $\{S_t\}$ s'appelle la *déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs* (voir [17] et [18]). Des déformations similaires sont connues dans plusieurs domaines des mathématiques. Comme il a été remarqué par O. Viro [36], la déquantification de Maslov est directement liée au patchwork, la méthode de construction de variétés algébriques réelles proposée par Viro il y a une vingtaine d'années (voir [37, 38] et [28]). La déquantification de Maslov est aussi directement liée au passage à « *large complex limit* » (voir [16]) qui fait dégénérer une structure complexe sur une variété (cf. la section 4). Toutes ces déformations fournissent un lien très important entre la géométrie algébrique et la géométrie des complexes polyédraux. C'est ce lien qui a été exploité par Mikhalkin pour obtenir les résultats énumératifs présentés dans la section 3.

Nous allons maintenant faire une brève description de la géométrie algébrique sur le semi-anneau \mathbb{R}_{trop} . Cette description étant orientée vers les problèmes énumératifs présentés par la suite est, bien sûr, incomplète. On renvoie à [35] pour une information plus complète sur les variétés tropicales.

2.2. Fonctions convexes affines par morceaux et transformée de Legendre

Soient n un entier strictement positif, I une collection finie de points entiers dans \mathbb{R}^n , et $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Notons $\Delta(I)$ l'enveloppe convexe de I . La fonction ν définit une subdivision de $\Delta(I)$ de la façon suivante. Considérons l'enveloppe convexe Γ_ν de l'ensemble $\{(i, i_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : i \in I, i_{n+1} \geq \nu(i)\}$. Le polyèdre Γ_ν se projette naturellement sur $\Delta(I)$. Les faces de Γ_ν qui se projettent de manière injective définissent une subdivision de $\Delta(I)$. Notons $S(I, \nu)$ cette subdivision.

La fonction $\hat{\nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{\nu}(\mathbf{x}) = \max_{i \in I} \{\langle i, \mathbf{x} \rangle - \nu(i)\}$, où $\langle i, \mathbf{x} \rangle$ est le produit scalaire standard de i et \mathbf{x} , s'appelle la *transformée de Legendre* de ν . C'est une fonction convexe affine par morceaux. Considérons le lieu des coins de $\hat{\nu}$. La subdivision $\widehat{S}(\hat{\nu})$ de \mathbb{R}^n définie par ce lieu des coins est duale de la subdivision $S(I, \nu)$. (Soient Υ un polyèdre de $S(I, \nu)$, et Υ_ν la face de Γ_ν qui se projette sur Υ . Le polyèdre dual de Υ est formé par les \mathbf{x} tels que $(\mathbf{x}, -1)$ appartienne au cône dual du cône de $\Upsilon_\nu \subset \Gamma_\nu$.) Un polyèdre dans $S(I, \nu)$ et le polyèdre correspondant dans $\widehat{S}(\hat{\nu})$ n'ont pas forcément de point commun, mais leurs enveloppes affines sont orthogonales (pour plus d'information sur la transformation de Legendre, voir, par exemple, [1]).

2.3. Variétés tropicales

Comme dans le paragraphe précédent, soient n un entier strictement positif, et I une collection finie de points entiers dans \mathbb{R}^n . Considérons un polynôme tropical $P(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} a_i \mathbf{x}^i$ en n variables x_1, \dots, x_n et à support dans I (ici $i = (i_1, \dots, i_n)$ est un multi-indice, $\mathbf{x}^i = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, les coefficients a_i sont des nombres réels, et les opérations d'addition et de multiplication sont tropicales). Par définition des opérations tropicales, $P(\mathbf{x})$ est le maximum des fonctions affines $\langle i, \mathbf{x} \rangle + a_i$ ($i \in I$), où le

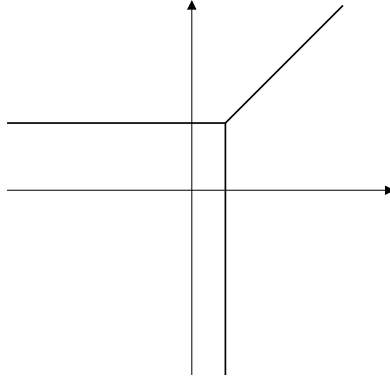


FIGURE 4. Une droite tropicale

signe « + » désigne l'addition habituelle. Donc, P est une fonction convexe affine par morceaux qui est la transformée de Legendre de la fonction $\nu : \mathbf{i} \mapsto -a_{\mathbf{i}}$.

L'*hypersurface tropicale* $T(P)$ définie par P est le lieu des coins de P (cf., par exemple, [21] et [35]). Autrement dit, $T(P)$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n pour lesquels le maximum des fonctions affines $\langle \mathbf{i}, \mathbf{x} \rangle + a_{\mathbf{i}}$ est réalisé par au moins deux fonctions. Bien sûr, $T(P)$ est complètement déterminée par la paire (I, ν) . Parfois, on dit que $T(P)$ est l'hypersurface tropicale associée à (I, ν) . L'enveloppe convexe $\Delta(I)$ de I s'appelle un *polytope de Newton* de $T(P)$. La définition des hypersurfaces tropicales peut être généralisée au cas de variétés tropicales arbitraires (voir, par exemple, [35]). Ici, on va se limiter aux courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 .

Une *droite tropicale* est la courbe tropicale définie par un polynôme tropical $ax + by + c$ (l'addition et la multiplication sont, bien sûr, tropicales). Une droite tropicale est une réunion de trois rayons ayant la même extrémité. Cette réunion peut être obtenue par une translation de la réunion des rayons $\{y = 0, x \leq 0\}$, $\{x = 0, y \leq 0\}$ et $\{x = y, x \geq 0\}$ (voir la Figure 4). En particulier, une droite tropicale est entièrement déterminée par la position de l'extrémité commune des rayons. Remarquons que deux droites tropicales génériques ont exactement un point en commun, et que, par deux points génériques du plan, on peut faire passer exactement une droite tropicale. Plus généralement, une courbe tropicale est dite *plane et projective de degré m* (où m est un entier strictement positif) si elle a le triangle à sommets $(0, 0)$, $(m, 0)$ et $(0, m)$ dans \mathbb{R}^2 pour polygone de Newton.

Soit P un polynôme tropical en deux variables. La courbe tropicale $T(P)$ définie par P est une réunion de segments et de demi-droites dans \mathbb{R}^2 . Associons à chaque segment et à chaque demi-droite de $T(P)$ un nombre entier strictement positif de la façon suivante. Soit e un segment ou une demi-droite de $T(P)$. Alors, e est la projection d'une arête de la surface affine par morceaux formée par le graphe de P . Cette arête

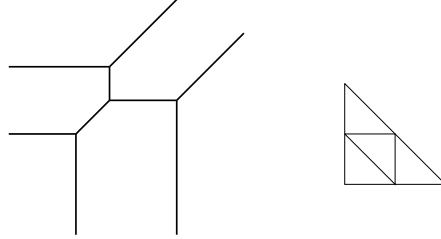


FIGURE 5. Une courbe tropicale et la subdivision correspondante

provient de l'intersection de deux plans. Soient $\langle \mathbf{i}^{(1)}, \mathbf{x} \rangle + a_{\mathbf{i}}^{(1)}$ et $\langle \mathbf{i}^{(2)}, \mathbf{x} \rangle + a_{\mathbf{i}}^{(2)}$ les deux fonctions affines correspondantes. Le poids associé à e est égal à la longueur entière du segment reliant $\mathbf{i}^{(1)}$ et $\mathbf{i}^{(2)}$. À partir de maintenant, on va toujours supposer que les segments et les demi-droites d'une courbe tropicale dans \mathbb{R}^2 sont munis des poids définis ci-dessus.

Les courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 peuvent être décrites de la manière suivante. Un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 est appelé un *graphe rectiligne* s'il peut être représenté comme une réunion finie de cellules fermées de dimension 0 (*sommets*) et de dimension 1 (*arêtes*) telles que

- chaque arête est un segment ou une demi-droite,
- la pente de chaque arête est rationnelle,
- le bord de chaque arête est une réunion de sommets,
- les intérieurs relatifs de cellules différentes sont disjoints.

Un graphe rectiligne est dit *pondéré* si chaque arête de ce graphe est munie d'un nombre entier strictement positif (ce nombre est appelé le *poids* de l'arête).

Chaque courbe tropicale dans \mathbb{R}^2 est un graphe rectiligne pondéré. En plus, on a la caractérisation suivante (voir, par exemple, [21]).

PROPOSITION 2.1. — *Un graphe rectiligne pondéré Γ représente une courbe tropicale si et seulement si, pour tout sommet v de Γ , on a $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$, où e_1, \dots, e_k sont les vecteurs entiers primitifs (i.e. non divisibles) sortant de v le long des arêtes de Γ , et α_i est le poids de l'arête correspondante à e_i ($i = 1, \dots, k$).*

Une généralisation de cette caractérisation des courbes tropicales au cas d'hyper-surfaces de dimension plus élevée peut être trouvée dans [21].

La même courbe tropicale peut être définie par différents polynômes tropicaux. Néanmoins, à partir d'une courbe tropicale (avec des poids associés aux segments et demi-droites), on peut reconstruire son polygone de Newton à translation près, ainsi que la subdivision $S(I, \nu)$ de $\Delta(I)$, une fois que le polygone de Newton $\Delta(I)$ est fixé. Pour une courbe tropicale T et son polygone de Newton Δ , notons $D_{\Delta}(T)$ la subdivision correspondante de Δ .

Le théorème tropical de Bernstein est une généralisation du fait que deux droites tropicales génériques ont exactement un point en commun. Avant de formuler le théorème, définissons la multiplicité d'un point d'intersection de deux courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 . Considérons un point d'intersection isolé d'un segment (ou d'un rayon) s_1 d'une courbe tropicale T_1 et d'un segment (ou d'un rayon) s_2 d'une courbe tropicale T_2 . Soient (a_i, b_i) un vecteur primitif le long de s_i , et α_i le poids de s_i ($i = 1, 2$). Alors, la *multiplicité* du point d'intersection de s_1 et s_2 est égale à $\alpha_1\alpha_2|a_1b_2 - a_2b_1|$.

Le théorème suivant est un corollaire du fait que la réunion de deux courbes tropicales génériques dans \mathbb{R}^2 forme une subdivision duale d'une subdivision mixte de la somme de Minkowski des polygones de Newton de ces courbes (voir [34] pour la définition d'une subdivision mixte).

THÉORÈME 2.2 (Théorème tropical de Bernstein, (voir, par exemple, [35]))

Le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de deux courbes tropicales génériques dans \mathbb{R}^2 est égal à l'aire mixte des polygones de Newton de ces courbes.

COROLLAIRE 2.3 (Théorème tropical de Bézout). — *Le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de deux courbes tropicales génériques planes et projectives de degrés m_1 et m_2 , respectivement, est égal à m_1m_2 .*

Le fait que, par deux points génériques du plan, on peut faire passer exactement une droite tropicale a aussi une généralisation : c'est le théorème de Mikhalkin d'énumération de courbes que l'on va présenter dans la section 3.

Pour terminer ce paragraphe, introduisons les courbes tropicales paramétrées. Soient $\bar{\Lambda}$ un graphe (abstrait) fini pondéré, et $\Lambda \subset \bar{\Lambda}$ le complémentaire des sommets de puissance 1 dans Λ . Une application propre $\theta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ s'appelle une *courbe tropicale paramétrée* si

- pour toute arête e de Λ , la restriction $\theta|_e$ est un plongement, et l'image $\theta(e)$ de e est contenue dans une droite ayant une pente rationnelle,
- pour tout sommet v de Λ , on a $\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$, où e_1, \dots, e_k sont les vecteurs entiers primitifs sortant de $\theta(v)$ le long des images des arêtes de Λ qui sont adjacentes à v , et α_i est le poids de l'arête correspondante à e_i ($i = 1, \dots, k$).

L'image $\theta(\Lambda)$ peut être vue comme un graphe rectiligne pondéré représentant une courbe tropicale. On dit que $\theta : \Lambda \rightarrow \theta(\Lambda)$ est une *paramétrisation* de la courbe tropicale $\theta(\Lambda)$.

2.4. Amibes non archimédiennes

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les courbes tropicales ont plusieurs propriétés en commun avec les courbes algébriques. Une des explications de ce phénomène est le fait que chaque courbe tropicale peut être vue comme l'amibe d'une courbe algébrique sur un corps valué non archimédien.

Soient K un corps avec une norme, n un entier strictement positif, et $V \subset (K^*)^n$ une variété algébrique. La définition de l'amibe se généralise facilement à cette situation : l'amibe $\mathcal{A}(V)$ est l'image de V par l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (K^*)^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|), \end{aligned}$$

où $|z_i|$ est la norme de z_i .

Une *valuation* (à valeurs réelles) d'un corps K est une fonction $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tous z et w dans K , on a $v(zw) = v(z) + v(w)$ et $v(z+w) \geq \min\{v(z), v(w)\}$. Un corps muni d'une valuation est dit *valué non archimédien*. Si K est un corps valué non archimédien et v est sa valuation, on définit la norme $|z|$ de $z \in K^*$ par $|z| = e^{-v(z)}$, et on pose $|0| = 0$. L'amibe d'une variété algébrique $V \subset (K^*)^n$ est l'image de V par l'application $\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (-v(z_1), \dots, -v(z_n))$.

Un exemple important d'un corps valué non archimédien est le corps $\cup_{l \geq 1} k((t^{1/l}))$ des séries de Puiseux sur un corps k . Les éléments de ce corps sont les séries formelles $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$ à coefficients dans k et à une variable t telles que $S \subset \mathbb{Q}$ soit minoré et contenu dans une suite arithmétique. La valuation est donnée par le plus petit r tel que $b_r \neq 0$. Si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, alors le corps des séries de Puiseux sur k est aussi algébriquement clos (voir, par exemple, [40]).

Un autre exemple est le corps \mathcal{K} des séries transfinies $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$ à coefficients complexes et exposants réels (ici $S \subset \mathbb{R}$ est un ensemble bien ordonné, *i.e.* chaque sous-ensemble de S contient un élément minimal). Ce corps est algébriquement clos. La valuation non archimédienne $v : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est encore une fois donnée par le plus petit r tel que $b_r \neq 0$.

Soit K un corps valué non archimédien algébriquement clos tel que $v(K^*) \supset \mathbb{Q}$. Considérons un polynôme $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$, où $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ est un multi-indice, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in (K^*)^n$, et $a_{\mathbf{i}} \in K^*$. Notons $V(f)$ l'hypersurface définie par f dans $(K^*)^n$. L'amibe $\mathcal{A}(V(f))$ de $V(f)$ peut être décrite de la façon suivante. Soit $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\nu(\mathbf{i}) = v(a_{\mathbf{i}})$, et soit $T(f)$ l'hypersurface tropicale associée à (I, ν) .

THÉORÈME 2.4 (M. Kapranov, [12]). — *L'adhérence de l'amibe $\mathcal{A}(V(f)) \subset \mathbb{R}^2$ coïncide avec l'hypersurface tropicale $T(f)$. Si la valuation $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective, alors $\mathcal{A}(V(f))$ coïncide avec $T(f)$.*

Remarque 2.5. — Le théorème de Kapranov montre en particulier que, contrairement au cas complexe, (l'adhérence de) l'amibe d'une hypersurface dans $(K^*)^n$ ne dépend que des valuations des coefficients d'un polynôme définissant l'hypersurface.

Un autre corollaire du théorème de Kapranov est le fait que les squelettes des amibes d'hypersurfaces complexes peuvent être vues comme des amibes d'hypersurfaces sur un corps valué non archimédien.

Les amibes non archimédiennes sont des limites dans la métrique de Hausdorff de certaines familles d'amibes de courbes complexes. Soient I une collection finie de points entiers dans \mathbb{R}^2 , et $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une famille de polynômes complexes $f_t(z, w) = \sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} t^{\nu(i,j)} z^i w^j$ à deux variables s'appelle une *famille de patchwork* (cf. [37, 38]). Notons V_t la courbe définie par f_t dans $(\mathbb{C}^*)^2$. Une famille de patchwork peut être vue comme un polynôme $f(z, w) = \sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} t^{\nu(i,j)} z^i w^j$ sur le corps \mathcal{K} des séries transfinies à coefficients complexes et exposants réels. Notons $V_{\mathcal{K}}$ la courbe définie par f dans $(\mathcal{K}^*)^2$. Pour $t > 1$, considérons l'application $h_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x/\log t, y/\log t)$.

PROPOSITION 2.6 (Mikhalkin, [21], Rullgård, [31]). — *L'amibe $\mathcal{A}(V_{\mathcal{K}}) \subset \mathbb{R}^2$ est la limite dans la métrique de Hausdorff des images $h_t(\mathcal{A}(V_t))$ des amibes $\mathcal{A}(V_t)$ quand t tend vers l'infini.*

3. RÉSULTATS ÉNUMÉRATIFS

Les résultats présentés dans cette section sont consacrés au dénombrement de courbes qui passent par des points fixés sur une surface algébrique.

3.1. Courbes complexes nodales

Soit Δ un polygone convexe à sommets entiers dans \mathbb{R}^2 . Notons $\iota(\Delta)$ le nombre de points entiers à l'intérieur de Δ , et $\phi(\Delta)$ le nombre de points sur la frontière de Δ diminué de 1. Considérons le système linéaire $\mathcal{L}(\Delta)$ des courbes dans $(\mathbb{C}^*)^2$ définies par les polynômes de Laurent complexes dont les polygones de Newton sont contenus dans Δ . Remarquons que $\mathcal{L}(\Delta)$ est un espace projectif complexe de dimension $\iota(\Delta) + \phi(\Delta)$, et qu'une courbe générique de $\mathcal{L}(\Delta)$ est non singulière de genre $\iota(\Delta)$.

Notons $\mathcal{L}_{\delta}(\Delta)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\Delta)$ formé par les courbes qui ont exactement δ points doubles non dégénérés et n'ont pas d'autres singularités dans $(\mathbb{C}^*)^2$. La clôture algébrique $\tilde{\mathcal{L}}_{\delta}(\Delta)$ de $\mathcal{L}_{\delta}(\Delta)$ dans $\mathcal{L}(\Delta)$ s'appelle une *variété de Severi*. Les courbes de $\mathcal{L}_{\delta}(\Delta)$ ont le genre $g = \iota(\Delta) - \delta$. (Pour une courbe $C = \cup_{i=1}^s C_i$, où C_i sont les composantes irréductibles de C , on pose le genre de C égal à la somme des genres des composantes C_i diminuée de $s - 1$. En particulier, le genre d'une courbe peut être strictement négatif.)

Posons $N_{\Delta}(g)$ égal au degré de $\tilde{\mathcal{L}}_{\delta}(\Delta)$ dans $\mathcal{L}(\Delta)$. Autrement dit, $N_{\Delta}(g)$ est le nombre de courbes appartenant à $\mathcal{L}(\Delta)$ qui passent par $g + \phi(\Delta)$ points génériques donnés dans $(\mathbb{C}^*)^2$ et qui ont le genre g (la dernière condition peut être remplacée par celle d'avoir $\delta = \iota(\Delta) - g$ points doubles). Puisque $\tilde{\mathcal{L}}_0(\Delta) = \mathcal{L}(\Delta)$, on a $N_{\Delta}(\iota(\Delta)) = 1$. Notons $N_{\Delta}^{\text{irr}}(g)$ le nombre de courbes *irréductibles* appartenant à $\mathcal{L}(\Delta)$ qui passent par $g + \phi(\Delta)$ points génériques donnés dans $(\mathbb{C}^*)^2$ et qui ont le genre g .

Pour un entier strictement positif m , considérons le triangle Δ_m à sommets $(0, 0)$, $(m, 0)$ et $(0, m)$ dans \mathbb{R}^2 . Le nombre $N_{\Delta_m}(g)$ (resp. $N_{\Delta_m}^{\text{irr}}(g)$) coïncide avec le nombre de courbes (resp. des courbes irréductibles) de degré m dans $\mathbb{C}P^2$ qui passent par $g + 3m - 1$ points génériques donnés et qui ont le genre g .

Les nombres $N_{\Delta_m}^{\text{irr}}(g)$ déterminent les nombres $N_{\Delta_m}(g)$ et inversement (voir, par exemple, [4]). Les nombres $N_{\Delta_m}^{\text{irr}}(g)$ sont les invariants de Gromov-Witten de $\mathbb{C}P^2$ (voir [15]). Une formule récursive pour calculer les nombres $N_{\Delta_m}^{\text{irr}}(0)$ a été démontrée par M. Kontsevich (voir [15]). L. Caporaso et J. Harris [4] ont donné un algorithme pour calculer les nombres $N_{\Delta_m}(g)$ pour un genre g arbitraire.

G. Mikhalkin a proposé une nouvelle formule pour $N_{\Delta_m}(g)$ qui se généralise immédiatement à une formule pour $N_{\Delta}(g)$, où Δ est un polygone convexe arbitraire à sommets entiers. Le théorème de Mikhalkin est basé sur une reformulation du problème énumératif présenté ci-dessus en un problème énumératif correspondant en géométrie tropicale.

3.2. Analogues tropicaux

Ce paragraphe contient un « dictionnaire » qui permet de retrouver des analogues tropicaux de certaines notions de la géométrie algébrique complexe, et en particulier des notions introduites dans 3.1 (un dictionnaire plus complet peut être trouvé dans [23]).

L'analogue tropical du polygone de Newton d'une courbe algébrique a déjà été introduit dans 2.3 : c'est le polygone de Newton d'une courbe tropicale. Nous allons nous intéresser aux analogues tropicaux des courbes irréductibles, des courbes nodales, des courbes non singulières, du genre d'une courbe, et des points génériques.

Une courbe tropicale T est dite *irréductible* si elle ne peut pas être représentée comme une réunion de courbes tropicales toutes différentes de T . Une courbe tropicale T est dite *élémentaire* si elle peut être paramétrée par une immersion $\theta : \Lambda \rightarrow T$ telle que tous les sommets de Λ aient la puissance 3, chaque point de T ait au plus deux images réciproques, et l'image de chaque sommet de Λ ait une seule image réciproque. Une courbe tropicale T ayant le polygone de Newton Δ est élémentaire si et seulement si la subdivision $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ de Δ (voir 2.3) vérifie les conditions suivantes :

- tout polygone de $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ est soit un triangle, soit un parallélogramme,
- tout point entier sur la frontière de Δ est un sommet de $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$.

Une telle subdivision $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ est aussi dite *élémentaire*. Les courbes tropicales élémentaires sont des analogues tropicaux des courbes complexes nodales.

Une courbe tropicale T de polygone de Newton Δ est dite *non singulière* si la subdivision $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ de Δ est une triangulation unimodulaire, *i.e.* si $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ est formée par des triangles de l'aire 1 (on normalise l'aire de telle façon que l'aire d'un triangle dont les seuls points entiers sont ses sommets soit égale à 1).

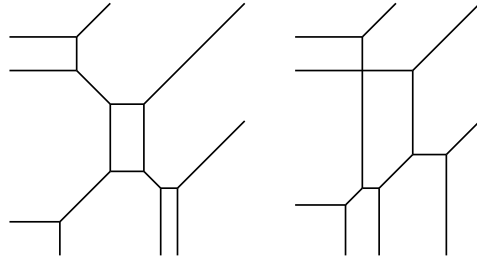


FIGURE 6. Une cubique tropicale non singulière et une cubique tropicale rationnelle

Soit T une courbe tropicale élémentaire ayant le polygone de Newton Δ . Le rang de T est la différence, diminuée de 1, entre le nombre de sommets de $\mathcal{D}_\Delta(T)$ et le nombre de parallélogrammes dans $\mathcal{D}_\Delta(T)$. Le rang d'une courbe tropicale élémentaire est un analogue de la dimension de la variété de Severi à laquelle appartient une courbe complexe nodale donnée.

Le genre d'une courbe tropicale paramétrée $\theta : \Lambda \rightarrow T$ est $1 - \dim H_0(\Lambda) + \dim H_1(\Lambda)$. Le genre $g(T)$ d'une courbe tropicale $T \subset \mathbb{R}^2$ est le genre minimal parmi toutes les paramétrisations de T . Si T est élémentaire, alors le genre de T est égal à la différence entre le nombre de sommets de $\mathcal{D}_\Delta(T)$ qui se trouvent à l'intérieur de Δ et le nombre de parallélogrammes dans $\mathcal{D}_\Delta(T)$. Cette observation est un analogue tropical de la formule de Riemann-Roch. On renvoie à [23] pour la formule de Riemann-Roch tropicale dans le cas de courbes tropicales dans \mathbb{R}^n .

Introduisons encore une caractéristique d'une courbe tropicale élémentaire T . La multiplicité $\zeta(T)$ (et la multiplicité $\zeta(\mathcal{D}_\Delta(T))$ de $\mathcal{D}_\Delta(T)$) est le produit des aires de tous les triangles dans $\mathcal{D}_\Delta(T)$.

On dit que des points x_1, \dots, x_k sont *tropicalement génériques* si toute courbe tropicale $T \subset \mathbb{R}^2$ passant par x_1, \dots, x_k et telle que $g(T) + \phi(\Delta(T)) = k$ (où $\Delta(T)$ est un polygone de Newton de T) vérifie les conditions suivantes : T est élémentaire, et aucun des points x_1, \dots, x_k ne coïncide avec un sommet de T .

Soient k un entier strictement positif, et Π un ensemble de k points tropicalement génériques dans \mathbb{R}^2 . Considérons la collection $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ des courbes tropicales élémentaires qui ont le polygone de Newton Δ , passent par tous les points de Π , et ont le rang k (la dernière condition peut être remplacée par celle d'avoir le genre $k - \phi(\Delta)$). Notons $\mathcal{T}_\Delta(\Pi)$ le nombre de courbes dans $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ comptées avec les multiplicités. *A priori*, le nombre $\mathcal{T}_\Delta(\Pi)$ dépend de la collection Π choisie. Le Théorème 3.1 du paragraphe suivant montre que $\mathcal{T}_\Delta(\Pi_1) = \mathcal{T}_\Delta(\Pi_2)$ pour des collections quelconques Π_1 et Π_2 de k points tropicalement génériques, et que le nombre $\mathcal{T}_\Delta(g) = \mathcal{T}_\Delta(\Pi)$ est l'analogue tropical de $N_\Delta(g)$, où $g = k - \phi(\Delta)$.

3.3. Théorème de correspondance

Soient, comme dans le paragraphe précédent, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un polygone convexe à sommets entiers, k un entier strictement positif, et Π un ensemble de k points tropicalement génériques dans \mathbb{R}^2 . Un des résultats centraux présentés dans ce texte est le théorème suivant de Mikhalkin.

THÉORÈME 3.1 (G. Mikhalkin, [23]). — *Les nombres $\mathcal{T}_\Delta(\Pi)$ et $N_\Delta(g)$, où $g = k - \phi(\Delta)$, sont égaux.*

Remarque 3.2. — La démonstration de Mikhalkin du Théorème 3.1 fournit plus que l'égalité des deux nombres : elle établit une bijection entre $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ (vu comme multi-ensemble) et l'ensemble des courbes complexes de genre g qui appartiennent à $\mathcal{L}(\Delta)$ et passent par une certaine collection de k points génériques dans $(\mathbb{C}^*)^2$. Une autre approche établissant une bijection entre ces deux ensembles a été proposée par E. Shustin [32].

3.4. Courbes réelles et invariant de Welschinger

Soient g un entier positif, et Ω une collection de $g + \phi(\Delta)$ points génériques dans $(\mathbb{R}^*)^2$. Posons $N_\Delta^{\mathbb{R}}(g, \Omega)$ égal au nombre de courbes réelles, (*i.e.* invariantes par rapport à la conjugaison complexe) de genre g dans $(\mathbb{C}^*)^2$ qui ont Δ pour polygone de Newton et passent par tous les points de Ω . De façon similaire, posons $N_\Delta^{\mathbb{R}, \text{irr}}(g, \Omega)$ égal au nombre de courbes réelles irréductibles de genre g dans $(\mathbb{C}^*)^2$ qui ont Δ pour polygone de Newton et passent par tous les points de Ω .

Contrairement au cas complexe, $N_\Delta^{\mathbb{R}}(g, \Omega)$ et $N_\Delta^{\mathbb{R}, \text{irr}}(g, \Omega)$ dépendent de la collection Ω choisie. Une question très intéressante et largement ouverte est celle de bonnes bornes inférieures et supérieures pour $N_\Delta^{\mathbb{R}}(g, \Omega)$ et $N_\Delta^{\mathbb{R}, \text{irr}}(g, \Omega)$. On renvoie à [33] pour plus d'information sur des questions de géométrie énumérative réelle.

Nous allons nous intéresser maintenant au cas $\Delta = \Delta_m$. Introduisons deux autres nombres associés à une collection Ω de $g + 3m - 1$ points génériques dans $\mathbb{R}P^2$. Soit $N_{\Delta_m}^{+, \text{irr}}(g, \Omega)$ (respectivement, $N_{\Delta_m}^{-, \text{irr}}(g, \Omega)$) le nombre de courbes réelles irréductibles de degré m et de genre g dans $\mathbb{C}P^2$ qui passent par tous les points de Ω et ont un nombre pair (respectivement, impair) de points doubles isolés (un point double est dit *isolé* s'il est localement défini par $x^2 + y^2 = 0$). Le nombre de Welschinger $W_m(g, \Omega)$ est la différence $N_{\Delta_m}^{+, \text{irr}}(g, \Omega) - N_{\Delta_m}^{-, \text{irr}}(g, \Omega)$.

THÉORÈME 3.3 (J.-Y. Welschinger, [41, 42]). — *Si $g = 0$, le nombre $W_m(g, \Omega)$ ne dépend pas du choix de la collection générique Ω .*

Remarque 3.4. — En fait, le Théorème 3.3 est un cas très particulier du théorème de Welschinger qui est formulé dans un cadre symplectique. On renvoie à [41, 42] pour l'énoncé général et la démonstration.

Le nombre $W_m(0, \Omega)$, où Ω est une collection de $3m - 1$ points génériques dans $\mathbb{R}P^2$, s'appelle un *invariant de Welschinger* et est noté W_m . La valeur absolue de l'invariant de Welschinger W_m fournit une borne inférieure pour le nombre de courbes rationnelles réelles de degré m passant par $3m - 1$ points génériques dans $\mathbb{R}P^2$ (les valeurs de W_m pour des petits m peuvent être trouvées dans le paragraphe 3.5).

Le théorème de Welschinger ne se généralise pas directement au cas $g > 0$: pour tout entier $m \geq 4$, il existe des collections génériques Ω_1 et Ω_2 de $3m$ points dans $\mathbb{R}P^2$ telles que $W_m(1, \Omega_1) \neq W_m(1, \Omega_2)$ (voir [11]).

La bijection mentionnée dans la Remarque 3.2 permet aussi d'exprimer l'invariant de Welschinger W_m en termes de courbes tropicales.

Soit T une courbe tropicale élémentaire ayant le polygone de Newton Δ . La courbe T et la subdivision correspondante $\mathcal{D}_\Delta(T)$ sont dites *impaires* si chaque triangle dans $\mathcal{D}_\Delta(T)$ a une aire impaire. La courbe T et la subdivision $\mathcal{D}_\Delta(T)$ sont dites *positives* (respectivement, *négatives*) si la somme des nombres de points entiers intérieurs dans tous les triangles de $\mathcal{D}_\Delta(T)$ est paire (respectivement, impaire). Notons $\mathcal{T}_\Delta^{+, \text{irr}}(\Pi)$ (respectivement, $\mathcal{T}_\Delta^{-, \text{irr}}(\Pi)$) le nombre de courbes impaires positives (respectivement, négatives) irréductibles dans $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ (comptées *sans* multiplicités).

THÉORÈME 3.5 (cf. [22, 23, 32]). — *L'invariant de Welschinger W_m est égal à la différence des nombres $\mathcal{T}_{\Delta_m}^{+, \text{irr}}(\Pi)$ et $\mathcal{T}_{\Delta_m}^{-, \text{irr}}(\Pi)$.*

Les Théorèmes 3.1 et 3.5 expriment les nombres $N_\Delta(g)$ et W_m en termes des nombres de certaines courbes tropicales, mais ils ne donnent pas de recettes pour calculer ces derniers nombres. Mikhalkin [22, 23] a proposé un algorithme combinatoire permettant de calculer les nombres en question. Cet algorithme est présenté dans le paragraphe suivant.

3.5. Algorithme combinatoire

Soit Δ un polygone convexe à sommets entiers dans \mathbb{R}^2 . Choisissons une fonction linéaire $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que sa restriction à \mathbb{Z}^2 soit injective. Notons p (respectivement, q) le point où λ atteint son minimum (respectivement, son maximum) sur Δ . Les sommets p et q divisent la frontière $\partial\Delta$ de Δ en deux parties $\partial\Delta_+$ et $\partial\Delta_-$.

Soit l un entier strictement positif. Un chemin $\gamma : [0, l] \rightarrow \Delta$ est dit *λ -admissible* si

- $\gamma(0) = p$ et $\gamma(l) = q$,
- la composition $\lambda \circ \gamma$ est injective,
- pour tout entier $0 \leq i \leq l - 1$, le point $\gamma(i)$ est entier, et $\gamma([i, i + 1])$ est un segment.

Le nombre l s'appelle la *longueur* de γ . Un chemin λ -admissible γ divise Δ en deux polygones : le polygone $\Delta_+(\gamma)$ borné par γ et $\partial\Delta_+$, et le polygone $\Delta_-(\gamma)$ borné par γ et $\partial\Delta_-$. (L'intérieur de $\Delta_\pm(\gamma)$ n'est pas forcément connexe et peut être vide.)

Définissons l'opération de *compression* de $\Delta_+(\gamma)$ de la façon suivante. Notons j le plus petit entier entre 1 et $l-1$ tel que $\gamma(j)$ soit un sommet de $\Delta_+(\gamma)$ avec un angle strictement inférieur à π . (Si un tel entier j n'existe pas, une compression de $\Delta_+(\gamma)$ n'est pas définie.) Une compression de $\Delta_+(\gamma)$ est le polygone $\Delta_+(\gamma')$, où γ' est ou bien le chemin défini par

$$\gamma'(i) = \gamma(i) \text{ pour } i < j, \text{ et } \gamma'(i) = \gamma(i+1) \text{ pour } i \geq j,$$

ou bien le chemin défini par

$$\begin{aligned} \gamma'(i) &= \gamma(i) \text{ pour } i \neq j, \text{ et } \gamma'(j) = \gamma(j-1) + \gamma(j+1) - \gamma(j), \\ &\text{(à condition que } \gamma(j-1) + \gamma(j+1) - \gamma(j) \in \Delta). \end{aligned}$$

Remarquons que γ' est aussi un chemin λ -admissible. Une suite de compressions qui commence par $\Delta_+(\gamma)$ et se termine par un polygone ayant l'intérieur vide (*i.e.* un polygone $\Delta_+(\bar{\gamma})$ tel que l'image de $\bar{\gamma}$ soit entièrement contenue dans $\partial\Delta_+$) définit une subdivision de $\Delta_+(\gamma)$ qui s'appelle une *subdivision de compression*. Une compression et une subdivision de compression de $\Delta_-(\gamma)$ sont définies de manière complètement similaire. Une paire $(\mathcal{S}_+(\gamma), \mathcal{S}_-(\gamma))$, où $\mathcal{S}_\pm(\gamma)$ est une subdivision de compression de $\Delta_\pm(\gamma)$, produit une subdivision de Δ . Notons $\mathcal{N}_\lambda(\gamma)$ la collection des subdivisions élémentaires de Δ qui peuvent être obtenues de cette façon à partir de γ .

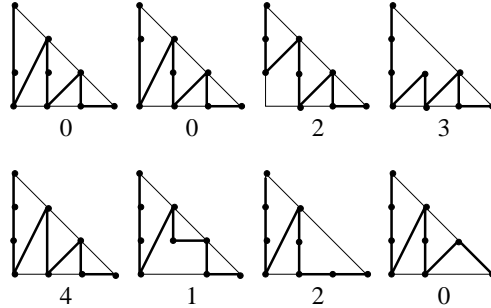
THÉORÈME 3.6 (G. Mikhalkin, [22, 23]). — *Soit $1 \leq k \leq \iota(\Delta) + \phi(\Delta)$ un entier. Alors, il existe une collection Π de k points tropicalement génériques dans \mathbb{R}^2 telle que l'application \mathcal{D}_Δ , qui associe à une courbe tropicale élémentaire T de polygone de Newton Δ la subdivision correspondante $\mathcal{D}_\Delta(T)$, établisse une bijection entre $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ et la réunion disjointe $\coprod_\gamma \mathcal{N}_\lambda(\gamma)$, où γ parcourt tous les chemins λ -admissibles de longueur k dans Δ . En particulier, $\mathcal{T}_\Delta(\Pi) = \sum_\gamma \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{N}_\lambda(\gamma)} \zeta(\mathcal{S})$, où $\zeta(\mathcal{S})$ est la multiplicité de \mathcal{S} .*

COROLLAIRE 3.7 (G. Mikhalkin, [22, 23]). — *Dans les notations du Théorème 3.6, on a $N_\Delta(g) = \sum_\gamma \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{N}_\lambda(\gamma)} \zeta(\mathcal{S})$, où $g = k - \phi(\Delta)$,*

La Figure 7 montre un calcul du nombre $N_{\Delta_3}(0)$. C'est le nombre de cubiques rationnelles passant par 8 points génériques dans $\mathbb{C}P^2$.

La Figure 8 montre un calcul du nombre $N_{\Delta_{2,3}}(1)$, où $\Delta_{2,3}$ est le rectangle à sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ et $(0,3)$ dans \mathbb{R}^2 . C'est le nombre de courbes de genre 1 et de bi-degré $(2,3)$ passant par 10 points génériques dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

Le Théorème 3.6 a aussi une version qui, pour une collection Π de k points tropicalement génériques choisis de façon appropriée (voir le paragraphe 4.3 pour une description de telles collections), permet de compter le nombre de courbes tropicales dans $\mathcal{C}_\Delta(\Pi)$ (vu comme multi-ensemble) correspondant aux courbes réelles via la bijection mentionnée dans la Remarque 3.2. On renvoie à [22, 23] pour les détails.

FIGURE 7. Calcul du nombre $N_{\Delta_3}(0)$

Pour une collection Π ayant les propriétés décrites dans le Théorème 3.6, notons $\mathcal{N}_\lambda^+(\gamma)$ (respectivement, $\mathcal{N}_\lambda^-(\gamma)$) le nombre de subdivisions impaires positives (respectivement, négatives) dans $\mathcal{N}_\lambda(\gamma)$ qui sont les images de courbes tropicales irréductibles par la bijection $\mathcal{D}_\Delta|_{\mathcal{C}_\Delta(\Pi)} : \mathcal{C}_\Delta(\Pi) \rightarrow \Pi_\gamma \mathcal{N}_\lambda(\gamma)$. L'énoncé suivant est un corollaire immédiat des Théorèmes 3.5 et 3.6.

PROPOSITION 3.8. — *L'invariant de Welschinger W_m est égal à $\sum_\gamma (\mathcal{N}_\lambda^+(\gamma) - \mathcal{N}_\lambda^-(\gamma))$, où γ parcourt tous les chemins λ -admissibles de longueur $3m - 1$ dans Δ_m .*

La Proposition 3.8 permet de calculer W_m pour des petites valeurs de m . Par exemple, en observant la Figure 7, on conclut presque immédiatement que $W_3 = 8$ (les nombres W_m pour $m \leq 3$ sont faciles à calculer par d'autres moyens : on a $W_1 = W_2 = 1$, et on peut obtenir l'égalité $W_3 = 8$ en calculant la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathbb{R}P^2$ à l'aide d'un pinceau de cubiques passant par 9 points réels ; voir [5]). Par contre, les valeurs $W_4 = 240$ et $W_5 = 18264$ ont été trouvées en utilisant la Proposition 3.8.

La Proposition 3.8 permet aussi d'obtenir une borne inférieure pour W_m , et, en particulier, de démontrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} W_m = +\infty$ et $W_m > 0$ pour tout entier $m \geq 1$ (voir [11]). Par conséquent, pour tout entier $m \geq 1$ et toute collection Ω de $3m - 1$ points dans $\mathbb{R}P^2$, il existe au moins une courbe rationnelle réelle de degré m passant par les points de Ω .

4. IDÉES DE DÉMONSTRATIONS

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les grandes lignes des démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.6. Les détails peuvent être trouvés dans [23].

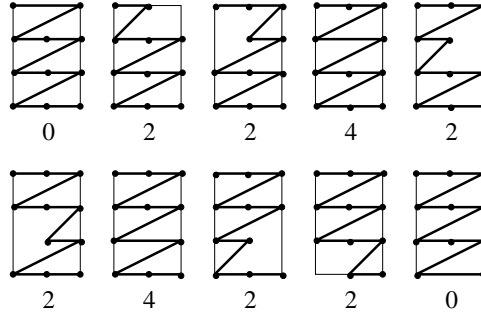


FIGURE 8. Calcul du nombre $N_{\Delta_{2,3}}(1)$

4.1. Déformation de la structure complexe et courbes J_∞ -holomorphes

Fixons un polygone convexe $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ à sommets entiers et un entier $0 \leq g \leq \iota(\Delta)$. Posons $k = g + \phi(\Delta)$, et choisissons des points génériques z_1, \dots, z_k dans $(\mathbb{C}^*)^2$ tels que les points $x_1 = \text{Log}(z_1), \dots, x_k = \text{Log}(z_k)$ soient tropicalement génériques. Rappelons que $N_\Delta(g)$ est le nombre de courbes de genre g dans $(\mathbb{C}^*)^2$ ayant le polygone de Newton Δ et passant par z_1, \dots, z_k .

Pour tout nombre réel $t > 0$, considérons le difféomorphisme $H_t : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2$ défini par

$$H_t : (z, w) \mapsto (|z|^{(1-t)/t} z, |w|^{(1-t)/t} w).$$

Ce difféomorphisme induit une nouvelle structure complexe J_t sur $(\mathbb{C}^*)^2$.

Une courbe C_t est holomorphe par rapport à J_t si et seulement si $C_t = H_t(C)$, où C est une courbe holomorphe par rapport à la structure complexe standard. Si C_t est une courbe holomorphe par rapport à J_t , le polygone de Newton de la courbe $H_t^{-1}(C_t)$ est aussi appelé le polygone de Newton de C_t . Si t est suffisamment générique, le nombre de courbes J_t -holomorphes de genre g ayant le polygone de Newton Δ et passant par z_1, \dots, z_k est égal à $N_\Delta(g)$. Remarquons que l'amibe d'une courbe J_t -holomorphe C_t est l'image de l'amibe de $H_t^{-1}(C_t)$ par l'homothétie $(x, y) \mapsto (x/t, y/t)$.

Il n'y a pas de limite (dans le sens habituel) des structures complexes J_t quand t tend vers l'infini. Néanmoins, on peut définir certaines courbes qui sont des limites de courbes J_t -holomorphes, $t \rightarrow \infty$.

Définissons l'application $v^{\mathbb{C}} : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ par $v^{\mathbb{C}}(b(t)) = e^{v(b(t)) + i \arg(b_m)}$, où \mathcal{K} est le corps des séries transfinies à coefficients complexes et exposants réels, et b_m est le coefficient du monôme ayant l'exposant $v(b(t))$ dans $b(t)$. Soient $W : (\mathcal{K}^*)^2 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2$ l'application définie par $W(b_1(t), b_2(t)) = (v^{\mathbb{C}}(b_1(t)), v^{\mathbb{C}}(b_2(t)))$, et $C_{\mathcal{K}} \subset (\mathcal{K}^*)^2$ une courbe algébrique.

DÉFINITION 4.1. — L'image $W(C_{\mathcal{K}}) \subset (\mathbb{C}^*)^2$ de $C_{\mathcal{K}}$ par W s'appelle une courbe J_∞ -holomorphe.

Le polygone de Newton de $W(C_{\mathcal{K}})$ est, par définition, le polygone de Newton de la courbe $C_{\mathcal{K}}$.

Soit $C_{\mathcal{K}} \subset (\mathbb{K}^*)^2$ une courbe définie par un polynôme

$$F(b_1(t), b_2(t)) = \sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} (b_1(t))^i (b_2(t))^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{K}^*$$

de polygone de Newton Δ . D'après le théorème de Kapranov (voir le Théorème 2.4), $\text{Log}(W(C_{\mathcal{K}}))$ est la courbe tropicale associée à la paire (I, ν) , où $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $\nu(i, j) = v(a_{i,j})$.

De façon géométrique, les courbes J_{∞} -holomorphes peuvent être décrites comme les complexes polyédraux de dimension 2 dans $(\mathbb{C}^*)^2$ qui se projettent par Log sur des courbes tropicales et qui ont les propriétés locales formulées ci-dessous.

Soient $T \subset \mathbb{R}^2$ une courbe tropicale, $x \in T$ un point, et U un voisinage convexe de x dans \mathbb{R}^2 tel que $T \cap U$ soit un cône sur x . Considérons la cellule de T (vue comme un graphe rectiligne) dont l'intérieur relatif contient x , et notons Δ' l'élément dual de cette cellule dans la subdivision $\mathcal{D}_{\Delta}(T)$ de Δ . Notons $\text{Ver}(\Delta')$ l'ensemble des sommets de Δ' .

On dit qu'un complexe polyédral $C_{\infty} \subset (\mathbb{C}^*)^2$ de dimension 2 est $(T \cap U)$ -compatible, si $\text{Log}^{-1}(U) \cap C_{\infty} = \text{Log}^{-1}(U) \cap \mathcal{W}$, où \mathcal{W} est une translation de $W(C_{\mathcal{K}})$, et $C_{\mathcal{K}} \subset (\mathbb{C}^*)^2$ est la courbe définie par un polynôme $\sum_{(i,j) \in \text{Ver}(\Delta')} a_{i,j} (b_1(t))^i (b_2(t))^j$, dont les valuations de tous les coefficients $a_{i,j}$ sont égales à 0.

THÉORÈME 4.2 (Mikhalkin, [23]). — *Soit $C_{\infty} \subset (\mathbb{C}^*)^2$ un complexe polyédral de dimension 2. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- C_{∞} est une courbe J_{∞} -holomorphe,
- $T = \text{Log}(C_{\infty})$ est une courbe tropicale et, pour tout point $x \in T$, il existe un voisinage ouvert convexe U de x tel que C_{∞} soit $(T \cap U)$ -compatible,
- il existe une suite $\{C_{t_s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ de courbes J_{t_s} -holomorphes telle que $\lim_{s \rightarrow \infty} t_s = \infty$ et C_{∞} soit la limite dans la métrique de Hausdorff des courbes C_{t_s} .

4.2. Correspondance entre courbes J_t -holomorphes et courbes J_{∞} -holomorphes

Soit C_{∞} une courbe J_{∞} -holomorphe. Comme dans le cas des courbes tropicales, on peut localement « normaliser » C_{∞} en considérant une *paramétrisation* de C_{∞} par une surface \tilde{C}_{∞} (i.e. une application $\psi : \tilde{C}_{\infty} \rightarrow C_{\infty}$ ayant certaines propriétés locales ; on renvoie à [23] pour la définition), et définir le genre de C_{∞} comme le genre minimal de \tilde{C}_{∞} parmi toutes les paramétrisations $\tilde{C}_{\infty} \rightarrow C_{\infty}$. (Le genre de \tilde{C}_{∞} est égal à $1 + \sum_C (g(C) - 1)$, où C parcourt toutes les composantes connexes de \tilde{C}_{∞} , et $g(C)$ est le genre de C .) Pour un nombre réel $\varepsilon > 0$, notons $TN_{\varepsilon}(C_{\infty})$ le ε -voisinage de C_{∞} dans $(\mathbb{C}^*)^2$.

Notons \mathcal{H}_t (respectivement, \mathcal{H}_∞) la collection des courbes J_t -holomorphes (respectivement, des courbes J_∞ -holomorphes) de genre g qui ont le polygone de Newton Δ et passent par les points z_1, \dots, z_k .

En utilisant les caractérisations des courbes J_∞ -holomorphes données dans le Théorème 4.2, on peut démontrer le théorème suivant qui établit, pour t suffisamment grand, une bijection entre les collections \mathcal{H}_t et \mathcal{H}_∞ .

THÉORÈME 4.3 (Mikhalkin, [23]). — *Soit $C_\infty \in \mathcal{H}_\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un nombre réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t > t_0$, la collection \mathcal{H}_t ait une et une seule courbe entièrement contenue dans $TN_\varepsilon(C_\infty)$. L'application $\mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_t$ définie de cette façon (pour tout t suffisamment grand) est une bijection.*

Le Théorème 3.1 est un corollaire du Théorème 4.3 et des résultats ci-dessous.

LEMME 4.4 (Mikhalkin, [23])

(1) *Si $C_\infty \subset (\mathbb{C}^*)^2$ est une courbe J_∞ -holomorphe et $T = \text{Log}(C_\infty)$, alors le genre de T est inférieur ou égal au genre de C_∞ .*

(2) *Toute courbe tropicale de genre $\leq g$ ayant le polygone de Newton Δ et passant par x_1, \dots, x_k est élémentaire et a le genre g .*

THÉORÈME 4.5 (Mikhalkin, [23]). — *Le nombre de courbes J_∞ -holomorphes dans \mathcal{H}_∞ qui se projettent par Log sur la même courbe tropicale élémentaire T est égal à la multiplicité $\zeta(T)$ de T .*

4.3. Idée de la démonstration du Théorème 3.6

Pour démontrer le Théorème 3.6, Mikhalkin choisit une collection très particulière de k points x_1, \dots, x_k dans \mathbb{R}^2 . Soit L une droite orthogonale aux lignes de niveau de la fonction $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Remarquons que L a une pente irrationnelle. Les points x_1, \dots, x_k sont choisis sur L un par un : x_1 est un point arbitraire sur L , et si les points x_1, \dots, x_j ($1 \leq j \leq k-1$) sont déjà choisis, on choisit un point x_{j+1} sur L de telle façon que $\lambda(x_{j+1}) \gg \lambda(x_i)$ pour tout entier $1 \leq i \leq j$. Remarquons que les points x_1, \dots, x_k sont tropicalement génériques ! Le dénombrement des courbes tropicales élémentaires de genre g ayant Δ comme polygone de Newton et passant par les points x_1, \dots, x_k choisis mène facilement à l'algorithme présenté dans le paragraphe 3.5 (voir [23] pour les détails).

RÉFÉRENCES

- [1] V.I. ARNOL'D – *Mathematical methods of classical mechanics*, Nauka, Moscou, 1974, en russe ; traduction anglaise : Graduate Texts in Mathematics vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.

- [2] M.F. ATIYAH – « Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry », *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* **26** (1983), p. 121–133.
- [3] G.M. BERGMAN – « The logarithmic limit set of an algebraic variety », *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), p. 459–469.
- [4] L. CAPORASO & J. HARRIS – « Counting plane curves of any genus », *Invent. Math.* **131** (1998), p. 345–392.
- [5] A. DEGTYAREV & V. KHARLAMOV – « Topological properties of real algebraic varieties : Rokhlin’s way », *Russian Math. Surveys* **55** (2000), no. 4, p. 735–814.
- [6] M. FORSBERG, M. PASSARE & A. TSIKH – « Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas », *Adv. in Math.* **151** (2000), p. 45–70.
- [7] W. FULTON – *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [8] I. GELFAND, M.M. KAPRANOV & A.V. ZELEVINSKY – *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [9] A. HENRIQUES – « An analogue of convexity for complements of amoebas of varieties of higher codimensions », Prépublication, Berkeley, 2001.
- [10] D. HILBERT – « Mathematische Probleme », *Arch. Math. Phys. (3)* **1** (1901), p. 213–237.
- [11] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV & E. SHUSTIN – « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves », *Internat. Math. Res. Notices* **49** (2003), p. 2639–2653.
- [12] M.M. KAPRANOV – « Amoebas over non-Archimedean fields », Prépublication, 2000.
- [13] V. KHARLAMOV & S. OREVKOV – « Asymptotic growth of the number of classes of real plane algebraic curves as the degree grows », *Zapiski Nauchn. Semin. POMI* **266** (2000), p. 218–233, en russe ; traduction anglaise : *J. of Math. Sciences* **113** (2003), p. 666–674.
- [14] ———, « The number of trees half of whose vertices are leaves and asymptotic enumeration of plane real algebraic curves », Prépublication arXiv : [math.AG/0301245](https://arxiv.org/abs/math/0301245), 2003.
- [15] M. KONTSEVITCH & YU. MANIN – « Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry », *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), p. 525–562.
- [16] M. KONTSEVITCH & YA. SOIBELMAN – « Homological mirror symmetry and torus fibrations », Prépublication arXiv : [math.SG/0011041](https://arxiv.org/abs/math/0011041), 2000.
- [17] G.L. LITVINOV & V.P. MASLOV – « The correspondence principle for Idempotent Calculus and some computer applications », in *Idempotency* (J. Gunawardena, éd.), Cambridge University Press, Cambridge, 1998, p. 420–443.
- [18] G.L. LITVINOV, V.P. MASLOV & A.N. SOBOLEVSKII – « Idempotent Mathematics and Interval Analysis », Prépublication arXiv : [math.SC/9911126](https://arxiv.org/abs/math/9911126), 1999.
- [19] G. MIKHALKIN – « Real algebraic curves, moment map and amoebas », *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 309–326.
- [20] ———, « Amoebas of algebraic varieties », Prépublication arXiv : [math.AG/0108225](https://arxiv.org/abs/math/0108225), 2001.

- [21] ———, « Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces », Prépublication arXiv : [math.GT/0205011](https://arxiv.org/abs/math.GT/0205011), 2002.
- [22] ———, « Counting curves via lattice paths in polygons », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **336** (2003), p. 629–634.
- [23] ———, « Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 », Prépublication arXiv : [math.AG/0312530](https://arxiv.org/abs/math.AG/0312530), 2003.
- [24] G. MIKHALKIN & H. RULLÅRD – « Amoebas of maximal area », *Internat. Math. Res. Notices* **9** (2001), p. 441–451.
- [25] G. MIKHALKIN & O. VIRO – « Amoebas of algebraic varieties », en préparation.
- [26] M. PASSARE & H. RULLÅRD – « Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope », Prépublication, Université de Stockholm, 2000.
- [27] J.-E. PIN – « Tropical semirings », in *Idempotency (Bristol 1994)*, Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 50–69.
- [28] J.-J. RISLER – « Construction d'hypersurfaces réelles [d'après Viro] », in *Sém. Bourbaki (1992/93)*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, 1993, exp. n° 763, p. 69–86.
- [29] L. RONKIN – « On zeroes of almost periodic functions generated by holomorphic functions in a multicircular domain », in *Complex Analysis in Modern Mathematics*, Fazis, Moscou, 2000, p. 243–256.
- [30] H. RULLÅRD – « Stratification des espaces de polynômes de Laurent et la structure de leurs amibes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), p. 355–358.
- [31] ———, « Polynomial amoebas and convexity », Prépublication, Université de Stockholm, 2001.
- [32] E. SHUSTIN – « Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative geometry », Prépublication arXiv : [math.AG/0211278](https://arxiv.org/abs/math.AG/0211278), 2002.
- [33] F. SOTTILE – « Enumerative Real Algebraic Geometry », Prépublication arXiv : [math.AG/0107179](https://arxiv.org/abs/math.AG/0107179), 2001.
- [34] B. STURMFELS – « On the Newton polytope of the resultant », *J. Algebraic Combin.* **3** (1994), p. 207–236.
- [35] ———, *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [36] O. VIRO – « Dequantization of real algebraic geometry on a logarithmic paper », in *Proceedings of the European Congress of Mathematicians (2000)*.
- [37] ———, « Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves », in *Proc. Leningrad Int. Topological Conf., Leningrad, 1982*, Nauka, Leningrad, 1983, en russe, p. 149–197.
- [38] ———, « Gluing of plane real algebraic curves and construction of curves of degrees 6 and 7 », *Lect. Notes in Math.*, vol. 1060, Springer, Berlin etc., 1984, p. 187–200.
- [39] ———, « Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years », *Russian Math. Surveys* **41** (1986), no. 3, p. 55–82.
- [40] R. WALKER – *Algebraic curves*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1950.

- [41] J.-Y. WELSCHINGER – « Invariants of real rational symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **336** (2003), p. 341–344.
- [42] ———, « Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry », Prépublication arXiv : [math.AG/0303145](https://arxiv.org/abs/math/0303145), 2003.
- [43] G. WILSON – « Hilbert’s sixteenth problem », *Topology* **17** (1978), no. 1, p. 53–73.

Ilia ITENBERG

IRMA

Université Louis Pasteur

7, rue René Descartes

F-67084 Strasbourg cedex

E-mail : itenberg@math.u-strasbg.fr

