

**CLASSES DE COHOMOLOGIE POSITIVES DANS LES VARIÉTÉS
KÄHLÉRIENNES COMPACTES**

[d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell...]

par **Olivier DEBARRE**

1. INTRODUCTION

Soit X une variété⁽¹⁾ complexe compacte. On dit qu'une forme différentielle ω de type $(1, 1)$ sur X est définie positive si la forme hermitienne h définie par

$$h(x, y) = \omega(x, iy) - i\omega(x, y)$$

l'est, c'est-à-dire si elle définit une métrique hermitienne sur X . Lorsque ω est de plus fermée, on dit que h définit une métrique de Kähler sur X . La classe de cohomologie de Dolbeault de ω dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est dite classe de Kähler, et ces classes forment un premier cône⁽²⁾ convexe ouvert $\text{Kah}(X)$ dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Si L est un fibré en droites holomorphe sur X , la courbure d'une métrique hermitienne sur L est une forme différentielle réelle fermée de type $(1, 1)$ dont un multiple représente la première classe de Chern de L . Pour que cette classe soit une classe de Kähler, il faut et il suffit que L soit *ample*.

Mais les éléments de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ sont aussi les classes des *courants* réels fermés de type $(1, 1)$ sur X , pour lesquels on a une notion similaire, mais plus faible, de positivité (cf. § 3.1). Les classes correspondantes forment un second cône convexe fermé, plus grand, dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$; on le note $\text{Pef}_{\text{tr}}(X)$. Lorsqu'on a affaire à la première classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe sur X , cette seconde notion de positivité correspond à la positivité du courant de courbure d'une métrique singulière sur L , ou encore, du point de vue algébrique, au fait que les puissances tensorielles positives de L ont « beaucoup » de sections holomorphes⁽³⁾.

⁽¹⁾Toutes nos variétés seront toujours, sauf mention explicite du contraire, supposées lisses et connexes.

⁽²⁾Un cône est une partie stable par multiplication par \mathbf{R}^{+*} .

⁽³⁾La positivité est en fait un peu plus faible que cette propriété. La différence entre les deux est essentielle et source de moult difficultés.

L'étude, lorsque X est une variété kählérienne compacte, de la géométrie de ces deux cônes est l'objet de cet exposé.

Les premières classes de Chern des fibrés en droites holomorphes sur X engendrent un sous-espace vectoriel de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, qui peut être strict ; on le note $N^1(X, \mathbf{R})$. Ses éléments sont dits classes « algébriques ». Les traces de nos deux cônes sur $N^1(X, \mathbf{R})$ sont notées $\text{Amp}(X)$ (cône *ample*) et $\text{Pef}(X)$ (cône *pseudo-effectif*) respectivement. Lorsque X est projective, le cône dual de $\text{Amp}(X)$ dans l'espace vectoriel dual $N^1(X, \mathbf{R})^\vee$ est le cône fermé engendré par les classes de courbes algébriques de X , aussi dit « cône de Mori » de X , dont on sait qu'il reflète une grande partie de la géométrie de X .

Ces cônes ont été étudiés à l'aide de techniques de géométrie algébrique (qui ne donnent accès qu'aux classes algébriques, mais sont souvent aussi valables sur certaines variétés singulières) et, plus récemment, de techniques d'analyse complexe, qui permettent de traiter toutes les classes, mais sur les variétés lisses uniquement. Pour donner un exemple, on sait depuis longtemps caractériser de façon numérique (c'est-à-dire en termes de nombres d'intersection) les classes amples : c'est le célèbre critère de Nakai. Ce n'est que récemment que la caractérisation analogue des classes de Kähler sur les variétés kählériennes compactes (lisses) a été démontrée par Demailly et Păun (§ 2.4).

Un autre problème, de nature algébrique celui-ci, résolu récemment est la description du cône dual de $\text{Pef}(X)$ dans $N^1(X, \mathbf{R})^\vee$: Boucksom, Demailly, Păun et Peternell ont montré qu'il est engendré par les classes de courbes mobiles, c'est-à-dire dont les déformations recouvrent X (§ 4.2). La démonstration fait intervenir plusieurs constructions qu'il m'a paru utile de détailler.

La première est celle de « volume » d'une classe. Pour les classes algébriques, par exemple pour la première classe de Chern d'un fibré en droites L sur X , il s'agit essentiellement d'une mesure asymptotique de la dimension de l'espace des sections des puissances tensorielles positives de L (cf. § 5.1 et § 5.3 pour l'extension aux classes transcendentes). On définit ainsi une fonction continue $\text{vol} : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^+$ dont la nature reste mystérieuse.

Le second ingrédient est la décomposition de Zariski. Celui-ci exprime, lorsque X est une *surface* algébrique, toute classe algébrique comme la somme d'une classe nef (limite d'amples) de même volume et d'une classe effective dite négative, orthogonale à la partie nef, dite positive (§ 5.2). Cette décomposition a des implications si importantes qu'on a longtemps – et vainement – tenté de l'étendre en dimension supérieure. Nakayama a montré que ce n'est pas possible, même si l'on permet des modifications.

On peut néanmoins montrer l'existence d'une décomposition « approchée » (th. 5.3 et 5.4) qui suffit pour démontrer la caractérisation du cône dual de $\text{Pef}(X)$ mentionnée plus haut. Il s'agit d'une décomposition *sur une modification de X* en la somme d'une

classe ample de volume proche et d'une classe effective, qui est alors automatiquement « presque orthogonale » (en un sens convenable) à la première.

Je termine en décrivant dans le § 7 une autre extension du résultat de Zariski en dimension supérieure, due à Nakayama pour les classes algébriques, puis à Boucksom en général : la décomposition de Zariski divisorielle. Il s'agit d'une décomposition en la somme d'une classe nef « en codimension 1 » de même volume et d'une classe « exceptionnelle ».

Les applications de ces résultats sont multiples. Même si de nombreux exemples montrent que la situation en dimension supérieure est infiniment plus compliquée que ce qui se passe sur les surfaces, Huybrechts et Boucksom ont montré, comme conséquence des résultats et techniques présentés ici, que tout se passe admirablement bien pour les variétés hyperkähleriennes (définies dans l'exemple 2.4), où une forme bilinéaire définie par Beauville et Bogomolov joue le rôle du produit d'intersection sur les surfaces. Nous expliquons leurs résultats sous forme d'une série d'exemples.

Voici une autre conséquence importante du théorème de dualité (cor. 4.3) : pour qu'une variété projective ne soit pas recouverte par des courbes rationnelles, il faut et il suffit que sa classe canonique soit dans l'adhérence du cône effectif. On s'attend alors à ce qu'un multiple de la classe canonique soit effectif. C'est peut-être le moment de parler de cette classe, qui est la grande absente de ces notes. Mori et Kawamata ont su montrer l'importance et la spécificité de cette classe et l'utiliser avec brio dans leurs théorèmes du cône et de rationalité. De nombreux exemples exhibent des classes pathologiques, mais on pense (ou on espère) que la classe canonique devrait se comporter raisonnablement. Beaucoup de travail reste à faire dans cette direction !

La littérature qui concerne les questions abordées ici étant en général bien écrite, il m'a paru inutile de la recopier (à deux exceptions près). J'ai préféré donner à ces notes la forme d'un survol, en présentant les deux points de vue, algébrique et analytique, l'un après l'autre, le tout assaisonné de nombreux exemples.

Je remercie pour leurs précieux conseils Arnaud Beauville, Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Daniel Huybrechts, Robert Lazarsfeld, Mihai Păun et Mihnea Popa.

Dans tout l'exposé, X est une variété complexe compacte de dimension n .

2. CÔNE AMPLE ET CÔNE DE KÄHLER

2.1. Quelques définitions

Soit L un fibré en droites sur X (toujours sous-entendu *holomorphe*); on note $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel de ses sections holomorphes. Le fibré L est ample s'il existe un plongement de X dans un espace projectif \mathbf{P}^N tel que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)$ se restreint à X

en une puissance tensorielle positive de L . L'amplitude est une propriété numérique : elle ne dépend que de la première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbf{R})$ (cf. § 2.4).

Un *diviseur* sur X est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_E t_E E$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces analytiques irréductibles de X . Il est dit *effectif* lorsque tous les coefficients sont positifs; on écrit alors $D \geq 0$. Il est dit *premier* si une seule hypersurface irréductible apparaît dans D et qu'elle a coefficient 1; on confond alors souvent D avec cette hypersurface. On considérera aussi des \mathbf{Q} -diviseurs (on permet des coefficients rationnels), et même des \mathbf{R} -diviseurs. On note $[D]$ le diviseur obtenu en prenant la partie entière de ses coefficients, c'est-à-dire $\sum_E [t_E] E$; le *support* de D est la réunion des hypersurfaces irréductibles de X affectées d'un coefficient non nul dans D . Les composantes irréductibles d'un diviseur sont par définition celles de son support.

Toute fonction méromorphe f sur X a un diviseur (celui de ses pôles et zéros), noté $\text{div}(f)$; les diviseurs de ce type sont dits *principaux*. Deux diviseurs sont *linéairement équivalents* si leur différence est principale.

À tout diviseur D sur X , on associe un fibré en droites sur X , noté L_D , dont les sections sur un ouvert U de X sont les fonctions f méromorphes sur U dont le diviseur satisfait $\text{div}(f) + D|_U \geq 0$. Inversement, toute section méromorphe non nulle s d'un fibré en droites L a un diviseur D_s , et L est isomorphe à L_{D_s} . On dit que D est *ample* si L_D l'est. On notera aussi $H^0(X, D)$ au lieu de $H^0(X, L_D)$. Si D' est un autre diviseur, $L_{D'}$ est isomorphe à L_D si et seulement si D' est linéairement équivalent à D . L'ensemble $|D|$ des diviseurs linéairement équivalents à D s'identifie à l'espace projectif $\mathbf{P}(H^0(X, D))$.

Tout diviseur D a une classe de cohomologie $[D] \in H^2(X, \mathbf{R})$, et $c_1(L_D) = [D]$. Noter que l'addition des diviseurs se traduit par le produit tensoriel des fibrés en droites associés, et l'opposé par le dual.

On note ω_X le *fibré* (en droites) *canonique* sur X , c'est-à-dire le déterminant de son fibré cotangent, et K_X un *diviseur canonique*, c'est-à-dire vérifiant $L_{K_X} \simeq \omega_X$ (il n'est défini qu'à équivalence linéaire près).

2.2. Classes amples et classes de Kähler

Une métrique hermitienne h sur X est donnée dans des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) sur X par

$$h = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

où (h_{jk}) est une matrice hermitienne de fonctions locales sur X de classe \mathcal{C}^∞ à valeurs dans \mathbf{C} , définie positive en chaque point. On lui associe la forme différentielle réelle $\omega = -\text{Im}(h)$, de type $(1, 1)$, donnée localement par

$$\omega = i \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Une forme de ce type est dite *définie positive*. On dit que la métrique h (ou la 2-forme ω) est une métrique *de Kähler* si ω est une forme différentielle *fermée*. S'il existe une telle métrique sur la variété X , celle-ci est dite *kählérienne*. Via la théorie de Hodge, toute forme de Kähler ω a une classe de cohomologie de de Rham⁽⁴⁾

$$[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \subset H^2(X, \mathbf{R}).$$

L'ensemble des classes de (formes de) Kähler est un cône convexe ouvert

$$\text{Kah}(X) \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R}).$$

On fait maintenant intervenir la structure entière de $H^2(X, \mathbf{R})$. Le groupe abélien libre de type fini

$$N^1(X) = H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \cap (\text{Im}(H^2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{R})))$$

est appelé groupe de Néron–Severi de X . Le théorème de Hodge nous dit que c'est l'ensemble des premières classes de Chern des fibrés en droites sur X .

Si X est une sous-variété d'un espace projectif (on dit qu'elle est *projective*), la restriction à X de la forme de Fubini–Study est une forme de Kähler sur X dont la classe est entière, c'est-à-dire dans $N^1(X)$. Inversement, si $N^1(X)$ contient une classe de Kähler, le théorème de plongement de Kodaira entraîne que la variété X est projective (donc algébrique par le théorème de Chow). Plus précisément, si $N^1(X, \mathbf{R})$ est le sous-espace vectoriel réel de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ engendré par $N^1(X)$, le cône

$$\text{Amp}(X) = \text{Kah}(X) \cap N^1(X, \mathbf{R})$$

est le cône engendré par les classes (de diviseurs) *amples* sur X .

2.3. Classes nefes

Si X est projective, on montre que les éléments de $\overline{\text{Amp}}(X)$ sont les classes de fibrés en droites *numériquement effectifs* (ou nefes) sur X , c'est-à-dire ceux dont le degré sur toute courbe est positif. Un fibré en droites nef L a des propriétés cohomologiques asymptotiques particulières : il vérifie le théorème de Fujita ([33], Theorem 1.4.40)

$$h^i(X, L^{\otimes m}) = O(m^{n-i}) \quad \text{pour tout } i \geq 0,$$

qui entraîne, avec le théorème de Riemann–Roch,

$$(1) \quad h^0(X, L^{\otimes m}) = \frac{c_1(L)^n}{n!} m^n + O(m^{n-1}).$$

⁽⁴⁾Une grande partie des constructions de cet exposé peuvent être faites sur une variété complexe compacte générale, pas nécessairement kählérienne, au prix de complications techniques. L'espace de cohomologie de Dolbeault $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est remplacé par

$$H_{\partial\bar{\partial}}^1(X, \mathbf{R}) = \{\text{formes de type } (1, 1) \text{ réelles } d\text{-fermées}\} / \{\text{formes de type } (1, 1) \text{ réelles } \partial\bar{\partial}\text{-exactes}\}.$$

Je renvoie à [6] et [8] les lecteurs intéressés.

Par extension, lorsque X n'est que kählérienne, les éléments de $\overline{\text{Kah}}(X)$ sont aussi dits nef. L'estimation (1) reste valable ; c'est une conséquence des inégalités de Morse holomorphes de Demailly ([15]).

En toute généralité, on dira qu'une classe $\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est nef si, une forme réelle ω de type $(1, 1)$ définie positive (non nécessairement fermée) sur X étant fixée, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une forme ω_ε dans ξ , réelle de type $(1, 1)$, telle que $\omega_\varepsilon + \varepsilon\omega$ est positive.

2.4. Caractérisation numérique du cône de Kähler

Le critère de Nakai–Moishezon–Kleiman (cf. [33], 1.2.B, pour une démonstration et un historique) caractérise numériquement le cône ample : un fibré en droites L sur une variété projective X est ample si et seulement si

$$c_1(L)^{\dim(Y)} \cdot [Y] > 0 \text{ pour toute sous-variété algébrique } Y \text{ de } X.$$

La caractérisation correspondante des classes amples de $N^1(X, \mathbf{R})$ (non nécessairement entières) est un joli théorème de Campana et Peternell ([12]).

Les deux résultats suivants généralisent ces critères aux classes transcendentes.

THÉORÈME 2.1 (Demailly–Păun, [19]). — *Soit X une variété kählérienne compacte. Le cône $\text{Kah}(X)$ est une composante connexe de l'ensemble des classes $\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ qui vérifient*

$$(2) \quad \int_Y \xi^{\dim(Y)} > 0 \text{ pour toute sous-variété analytique } Y \text{ de } X.$$

La classe d'une forme de Kähler ω vérifie ces propriétés : $\int_X \omega^n$ n'est autre que le volume de la variété X pour la métrique associée ; il est donc strictement positif. De même, la restriction de ω à une sous-variété analytique Y de X est encore une forme de Kähler, de sorte que $\int_Y \omega^{\dim(Y)}$ est aussi strictement positif.

SCHÉMA DE PREUVE — On veut montrer que le cône de Kähler est fermé dans l'ensemble des classes vérifiant la propriété (2). On utilise quelques concepts de la théorie des courants définis dans le § 3.

Soit ω une forme de Kähler sur X . Étant donnée une sous-variété analytique Y de X de codimension p , on construit tout d'abord une famille $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de formes de Kähler dans la même classe que ω , qui a la propriété que tout courant T limite faible de (ω_ε^p) quand ε tend vers 0 vérifie $T \geq cT_Y$, avec $c > 0$.

Soit ξ une forme réelle de type $(1, 1)$ dont la classe est dans l'adhérence de $\text{Kah}(X)$, donc nef, et qui vérifie $\int_X \xi^n > 0$.

Le théorème de Yau montre que l'on peut résoudre l'équation de Monge–Ampère

$$(\xi + \varepsilon\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon)^n = c_\varepsilon\omega_\varepsilon^n$$

dès que $c_\varepsilon = \int_X (\xi + \varepsilon\omega)^n / \int_X \omega^n$. La forme $\alpha_\varepsilon = \xi + \varepsilon\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$ a même classe que $\xi + \varepsilon\omega$. Le fait que l'on ait $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} c_\varepsilon > 0$ permet de montrer que toute limite faible T

de (α_ε^p) quand ε tend vers 0, qui est donc dans la classe $[\xi]^p$, vérifie encore $T \geq cT_Y$, avec $c > 0$.

En appliquant cette construction au cas où Y est la diagonale de $X \times X$, on construit un courant de Kähler dans $[\xi]$. On peut dire que le théorème de Yau permet de trouver dans $[\xi]$ un courant strictement positif partout sous une hypothèse de stricte positivité en moyenne.

En raisonnant par récurrence sur n , on montre ensuite que l'hypothèse (2) entraîne que la restriction de $[\xi]$ à toute sous-variété analytique propre de X contient une forme de Kähler. On conclut, en utilisant un résultat antérieur de Păun, que la classe $[\xi]$ elle-même contient une forme de Kähler.

Pour les détails, je renvoie le lecteur à l'article original [19] ou à [18]. \square

Exemple 2.2 (Tores complexes). — Soit X un tore complexe, c'est-à-dire le quotient de \mathbf{C}^n par un réseau Γ . L'espace $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ s'identifie à l'espace vectoriel réel des formes hermitiennes sur \mathbf{C}^n , et $N^1(X)$ au groupe de celles qui sont entières sur Γ . Le cône $\text{Kah}(X)$ est le cône des formes hermitiennes définies positives.

Lorsque Γ est « très général », on a $N^1(X) = 0$ et X ne contient aucune sous-variété analytique autre qu'elle-même et ses sous-ensembles finis. La condition du théorème se réduit à $\int_X \xi^n > 0$, ce qui signifie que la forme hermitienne associée est non dégénérée.

L'ensemble des classes vérifiant cette propriété n'est donc pas nécessairement connexe, mais il l'est si X est projective, comme on peut le déduire de la variante suivante du théorème.

COROLLAIRE 2.3. — Soient X une variété kählérienne compacte et ω une forme de Kähler sur X . Le cône $\text{Kah}(X)$ est l'ensemble des classes $\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ telles que

$$\int_Y \xi^k \wedge \omega^{\dim(Y)-k} > 0 \text{ pour toute sous-variété analytique } Y \\ \text{de } X \text{ et tout } k \in \{1, \dots, \dim(Y)\}.$$

PREUVE — L'hypothèse entraîne que $t\omega + \xi$ vérifie la condition du théorème 2.1 pour tout $t \geq 0$. Sa classe reste donc dans la même composante connexe. Comme c'est une forme de Kähler pour $t \gg 0$, il en est de même pour ξ . \square

Buchdahl ([10], cor. 15) et Lamari ([31], [32]), indépendamment, avaient auparavant démontré ce critère pour toutes les surfaces complexes compactes, même non kählériennes, en utilisant des métriques de Gauduchon (c'est-à-dire des métriques dont la $(1, 1)$ -forme associée ω vérifie $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$).

Exemple 2.4 (Variétés hyperkähleriennes). — Une variété X est dite *hyperkählienne* si elle est compacte, kählérienne, simplement connexe, et que l'espace vectoriel des 2-formes holomorphes sur X est de dimension 1, engendré par une forme σ qui est non dégénérée en chaque point ([2], [24]). Ce sont les analogues en toute dimension (paire) des surfaces K3. L'espace vectoriel $H^2(X, \mathbf{R})$ est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée q_X dite de Beauville–Bogomolov qui généralise le produit

d'intersection pour une surface $K3$ ⁽⁵⁾. Elle est entière sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ et sa signature sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est $(1, h^{1,1}(X) - 1)$. Le cône $\text{Kah}(X)$ est contenu dans

$$\{\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \mid q_X(\xi, \xi) > 0\}$$

donc dans l'une de ses deux composantes connexes ; on la note $\mathcal{C}(X)$.

• **Critère de projectivité.** Huybrechts déduit du théorème ci-dessus le critère suivant ([24])

$$X \text{ projective} \iff \exists \xi \in N^1(X) \quad q_X(\xi, \xi) > 0 \iff \mathcal{C}(X) \cap N^1(X, \mathbf{R}) \neq \emptyset.$$

Le point essentiel consiste à montrer qu'un fibré en droites L sur X vérifiant $q_X(c_1(L), c_1(L)) > 0$ satisfait la propriété (3) du § 3.4, ce qui entraîne que X est projective (cf. § 3.4).

• **Cône de Kähler.** On a ([25], [5])

$$\text{Kah}(X) = \{\xi \in \mathcal{C}(X) \mid \int_C \xi > 0 \text{ pour toute courbe } C \text{ rationnelle sur } X\}.$$

Lorsque X est une surface $K3$ algébrique, la structure du cône $\text{Pef}(X)$ est très bien connue ([30]).

2.5. Déformation du cône de Kähler

Je me contente de citer sans démonstration la conséquence suivante ([19], Theorem 5.1) du théorème 2.1 ; elle dit que dans une famille de variétés kählériennes compactes, le cône de Kähler d'une fibre très générale est « constant ».

THÉORÈME 2.5. — *Soit $X \rightarrow S$ une famille de variétés kählériennes compactes. Pour s très général dans S ⁽⁶⁾, les cônes $\text{Kah}(X_s) \subset H^{1,1}(X_s, \mathbf{R})$ sont invariants par transport parallèle pour la composante de type (1,1) de la connexion de Gauss–Manin.*

3. CÔNES PSEUDO-EFFECTIFS

3.1. Courants réels de type (1,1)

Un courant sur X est une forme différentielle dont les coefficients sont des distributions. Un courant T est dit *fermé* si $dT = 0$ ⁽⁷⁾. Il a alors une classe $[T]$

⁽⁵⁾ Sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, elle est définie par $q_X(\xi, \xi') = \int_X \xi \wedge \xi' \wedge (\sigma \wedge \bar{\sigma})^{n/2-1}$, où σ est normalisée de façon convenable.

⁽⁶⁾ C'est-à-dire pour s en dehors de la réunion d'une famille dénombrable de sous-variétés analytiques de S distinctes de S .

⁽⁷⁾ Comme pour les distributions, dT est le courant défini par $\langle dT, \gamma \rangle = -\langle T, d\gamma \rangle$.

dans $H^\bullet(X, \mathbf{R})$ ⁽⁸⁾. Un courant de type $(1, 1)$

$$T = i \sum_{j,k} T_{j,k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

est dit *positif* si la distribution $\sum_{j,k} \lambda_j \bar{\lambda}_k T_{j,k}$ est une mesure positive pour tous complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Un courant fermé T de type $(1, 1)$ s'écrit localement $i\partial\bar{\partial}\varphi$, où φ est une fonction réelle (et il est positif si et seulement si φ est pluri-sous-harmonique). Cela permet de définir son image inverse par une application holomorphe *surjective* $\mu : X' \rightarrow X$, en posant localement $\mu^*T = i\partial\bar{\partial}(\varphi \circ \mu)$ (c'est bien indépendant du choix de φ).

Toute hypersurface analytique D de X définit un courant

$$T_D : \gamma \mapsto \int_D \gamma$$

qui est positif fermé de type $(1, 1)$. Cette définition s'étend par linéarité à tout \mathbf{R} -diviseur. On a $[T_D] = [D]$ dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$.

3.2. Métriques sur les fibrés en droites

Soit L un fibré en droites sur X . Dans une carte locale, une métrique hermitienne h sur L s'écrit

$$h(x, t) = |t|^2 e^{-2\varphi(x)} \quad \text{avec } x \in X, t \in \mathbf{C},$$

où φ (le « poids ») est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . La relation

$$\Theta_h(L) = \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$$

définit une forme fermée réelle de type $(1, 1)$ sur X qui est la courbure de h ; sa classe de cohomologie de de Rham est $c_1(L)$.

On parlera de *métrique singulière* sur L lorsque φ n'est que localement intégrable. On définit par la même formule son courant de courbure; sa classe est encore $c_1(L)$. Tout courant fermé réel de type $(1, 1)$ dans $c_1(L)$ qui peut s'écrire comme la somme d'une forme réelle de type $(1, 1)$ et d'un courant positif est le courant de courbure d'une métrique singulière sur L .

⁽⁸⁾On montre que les groupes de cohomologie de de Rham ou de Dolbeault peuvent être définis soit à partir de formes différentielles, soit à partir de courants.

3.3. Classes effectives et pseudo-effectives

On note $\text{Eff}(X) \subset N^1(X, \mathbf{R})$ le cône convexe engendré par les classes des hypersurfaces analytiques de X et $\text{Pef}(X)$ son adhérence, souvent appelé « cône pseudo-effectif »⁽⁹⁾. On dit qu'un diviseur sur X est *pseudo-effectif* si sa classe est pseudo-effective, c'est-à-dire dans $\text{Pef}(X)$, et qu'un fibré en droites sur X est *pseudo-effectif* si sa première classe de Chern l'est.

Le théorème de Kodaira dit que

- L est ample si et seulement s'il admet une métrique lisse à courbure définie positive.

Demailly démontre, en utilisant des estimées L^2 ([16]; [18], Theorem 1.2), que

- L est pseudo-effectif si et seulement s'il admet une métrique singulière à courant de courbure positif.

Attention, un fibré nef n'admet pas toujours de métrique *lisse* à courbure positive⁽¹⁰⁾ !

Pour définir l'analogue transcendant du cône pseudo-effectif $\text{Pef}(X)$, on s'inspire de la discussion du paragraphe précédent : une classe dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est dite pseudo-effective si c'est la classe d'un courant fermé de type $(1,1)$ positif. On appelle *cône pseudo-effectif transcendant* le cône convexe fermé

$$\text{Pef}_{\text{tr}}(X) \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$$

des classes pseudo-effectives. Si X est projective, on a

$$\text{Pef}_{\text{tr}}(X) \cap N^1(X, \mathbf{R}) = \text{Pef}(X).$$

On a ainsi un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Amp}(X) & \subset & \text{Pef}(X) & \subset & N^1(X, \mathbf{R}) \\ & & \cap & & \cap \\ \text{Kah}(X) & \subset & \text{Pef}_{\text{tr}}(X) & \subset & H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \end{array}$$

où les carrés sont cartésiens.

Exemple 3.1 (Fibrés projectifs sur une courbe). — Soient E un fibré vectoriel de rang au moins 2 sur une courbe projective C et $\pi : \mathbf{P}(E) \rightarrow C$ le fibré projectif associé. Les espaces vectoriels $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ et $N^1(X, \mathbf{R})$ coïncident et sont de dimension 2 : ils sont engendrés par la classe d'une section et celle d'une fibre de π . Cette dernière engendre une face commune des cônes plans $\text{Nef}(X)$ et $\text{Pef}(X)$. Miyaoka a montré que ces cônes coïncident si et seulement si le fibré vectoriel E est semi-stable.

⁽⁹⁾La terminologie n'est pas très heureuse, mais il semble malheureusement trop tard pour la changer.

⁽¹⁰⁾C'est le cas par exemple du fibré associé à la section d'auto-intersection nulle de la surface réglée non triviale au-dessus d'une courbe elliptique ([20]). Il n'y a pas ce genre de problème pour les pseudo-effectifs à cause de la compacité faible des courants positifs de classe bornée.

Exemple 3.2 (Surfaces). — Lorsque X est une surface kählérienne, on a à notre disposition le produit d'intersection sur $H^2(X, \mathbf{R})$. Le cône $\{\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \mid \xi^2 > 0\}$ a deux composantes connexes. On note $\mathcal{C}(X)$ celle qui contient $\text{Kah}(X)$. On a⁽¹¹⁾

$$\overline{\mathcal{C}(X)} \subset \text{Pef}_{\text{tr}}(X).$$

Exemple 3.3 (Conjecture de Nagata). — Soit X_r l'éclaté de \mathbf{P}^2 en r points très généraux. Soient E la somme des diviseurs exceptionnels et H l'image inverse dans X_r d'une droite. On pose

$$t_{\text{nef}} = \min\{t \mid -E + tH \text{ nef}\} \quad , \quad t_{\text{péf}} = \min\{t \mid -E + tH \text{ pseudo-effectif}\}.$$

On a $t_{\text{péf}} t_{\text{nef}} = r$ et $t_{\text{péf}} \leq \sqrt{r} \leq t_{\text{nef}}$. Nagata conjecture dans [37] que l'on a égalité pour tout $r \geq 9$.

La conjecture est démontrée lorsque r est un carré parfait. Les valeurs de $t_{\text{péf}}$ et t_{nef} sont connues pour $r \leq 9$; elles sont rationnelles. McDuff et Polterovich ont montré dans [35] que ce problème était intimement lié au problème des empilements symplectiques, ce qui leur permet de déterminer, pour $r \leq 9$, le meilleur taux de remplissage de la variété symplectique \mathbf{P}^2 à l'aide de r boules symplectiques standard de même rayon. Pour $r \geq 9$, ce problème a été résolu dans [3] (cf. aussi [4]).

Exemple 3.4 (Variétés hyperkähleriennes). — Avec les définitions et notations du § 2.4, Huybrechts déduit du théorème 2.1 que $\mathcal{C}(X)$ est contenu dans l'intérieur du cône $\text{Pef}_{\text{tr}}(X)$. On a donc

$$\text{Nef}_{\text{tr}}(X) \subset \overline{\mathcal{C}(X)} \subset \text{Pef}_{\text{tr}}(X)$$

et tous ces cônes sont égaux pour une déformation très générale de X ([25]).

3.4. Classes grandes

On dit qu'un élément de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est *grand* (« big » en anglais) s'il est dans l'intérieur du cône pseudo-effectif. On note

$$\text{Big}_{\text{tr}}(X) = \overset{\circ}{\text{Pef}}_{\text{tr}}(X) \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \text{Big}(X) = \overset{\circ}{\text{Pef}}(X) \subset N^1(X, \mathbf{R})$$

les cônes correspondants. On dit qu'un diviseur sur X est *grand* si sa classe est grande, et qu'un fibré en droites L sur X est *grand* si sa première classe de Chern l'est. La terminologie provient du fait que L est grand si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(3) \quad h^0(X, L^{\otimes m}) \geq cm^n \quad \text{pour tout } m \gg 0.$$

⁽¹¹⁾Pour les classes algébriques, c'est une conséquence du théorème de Riemann-Roch. Le cas général est démontré dans [8], § 4.2.1.

On peut terminer la discussion du §3.3 : un fibré en droites L est

- grand si et seulement s'il admet une métrique singulière à courant de courbure T dit de Kähler⁽¹²⁾, c'est-à-dire tel que $T - \omega$ soit positif pour une forme définie positive convenable ω .

THÉORÈME 3.5. — *Soit X une variété complexe compacte.*

- *Pour que X soit une variété de Fujiki (c'est-à-dire biméromorphe à une variété kählérienne), il faut et il suffit que le cône $\text{Big}_{\text{tr}}(X)$ ne soit pas vide.*
- *Pour que X soit une variété de Moishezon (c'est-à-dire biméromorphe à une variété projective), il faut et il suffit que le cône $\text{Big}(X)$ ne soit pas vide.*

Le premier point est un autre résultat de [19], pour la démonstration duquel on utilise la cohomologie $\partial\bar{\partial}$ (cf. note 4). Le second est facile : les multiples suffisamment grands d'un fibré en droites grand définissent une application birationnelle entre X et une sous-variété (projective) d'un espace projectif. Rappelons qu'une variété kählérienne compacte de Moishezon est projective.

4. CÔNES DUAUX

Supposons X kählérienne. La dualité de Poincaré permet d'identifier $H^{n-1, n-1}(X, \mathbf{R})$ (que l'on notera parfois $H_{1,1}(X, \mathbf{R})$) au dual de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, et le sous-espace vectoriel $N_1(X, \mathbf{R})$ engendré par

$$N_1(X) = H^{n-1, n-1}(X, \mathbf{R}) \cap (\text{Im}(H^{2n-2}(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{2n-2}(X, \mathbf{R})))$$

au dual de $N^1(X, \mathbf{R})$.

Étant donné un cône \mathcal{C} dans un espace vectoriel réel H de dimension finie, on définit son dual par

$$\mathcal{C}^\vee = \{\xi^\vee \in H^\vee \mid \langle \xi^\vee, \xi \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{C}\}.$$

C'est un cône convexe fermé dans H^\vee . Si \mathcal{C} n'est pas d'intérieur vide, on a $\mathcal{C}^\vee = (\overline{\mathcal{C}})^\vee = (\overset{\circ}{\mathcal{C}})^\vee$. Si \mathcal{C} est convexe, on a $(\mathcal{C}^\vee)^\vee = \overline{\mathcal{C}}$.

4.1. Dual du cône ample et du cône de Kähler

Lorsque X est projective, le cône $\text{Amp}(X)^\vee$ est le cône fermé engendré par les classes des courbes algébriques dans X (critère de Kleiman). L'analogue

⁽¹²⁾Là encore, la terminologie est mauvaise : la classe d'un courant de Kähler est grande, pas de Kähler !

« transcendant » est le corollaire 2.3 : si X est kählérienne, le cône $\text{Kah}(X)^\vee \subset H_{1,1}(X, \mathbf{R})$ est le cône convexe fermé engendré par les

$$[Y] \wedge \omega^{\dim(Y)-1}$$

où ω décrit l'ensemble des formes de Kähler sur X , et Y celui des sous-variétés analytiques de X .

4.2. Dual du cône pseudo-effectif

Supposons X projective. Une courbe (irréductible réduite) C dans X est dite *mobile* s'il existe une modification $\mu : X' \rightarrow X$ et des diviseurs très amples H'_1, \dots, H'_{n-1} sur X' tels que

$$C = \mu_*(H'_1 \cap \dots \cap H'_{n-1}).$$

Les déformations de C recouvrent X . De plus, étant donnée une hypersurface Z de X , il existe une déformation de C qui n'est pas contenue dans Z , ce qui montre qu'une classe mobile est positive sur tout élément de $\text{Pef}(X)$.

THÉORÈME 4.1 ([9]). — *Soit X une variété projective. Le cône $\text{Pef}(X)^\vee \subset N_1(X, \mathbf{R})$ est le cône convexe fermé engendré par les classes de courbes mobiles.*

Un diviseur qui est de degré positif sur toute courbe mobile est donc pseudo-effectif. La preuve sera donnée dans le § 6.

Lorsque X est une variété kählérienne compacte, on conjecture que le cône $\text{Pef}_{\text{tr}}(X)^\vee$ est le cône convexe fermé engendré par les classes des courants du type

$$\mu_*(\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_{n-1})$$

où $\mu : X' \rightarrow X$ est une composition d'éclatements à centre lisse et les ω'_j sont des formes de Kähler sur X' . Cette conjecture a été démontrée dans des cas particuliers ([9], Corollary 10.13), entre autres lorsque X est une surface ou une variété hyperkählérienne.

Exemple 4.2 (Surfaces). — Lorsque X est une surface, on a $H_{1,1}(X, \mathbf{R}) = H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Les classes mobiles sont nef, et elles engendrent le cône $\text{Nef}(X)$. Avec les notations de l'exemple 3.2, on a ([8], Theorem 4.1)

$$\text{Nef}_{\text{tr}}(X) = \text{Pef}_{\text{tr}}(X)^\vee \subset \overline{\mathcal{C}(X)} = \overline{\mathcal{C}(X)}^\vee \subset \text{Pef}_{\text{tr}}(X) = \text{Nef}_{\text{tr}}(X)^\vee.$$

COROLLAIRE 4.3. — *Pour qu'une variété projective X soit recouverte par des courbes rationnelles, il faut et il suffit que son diviseur canonique K_X ne soit pas pseudo-effectif.*

PREUVE — Si K_X n'est pas pseudo-effectif, il existe par le théorème 4.1 une courbe dont les déformations recouvrent X et sur laquelle K_X est de degré strictement négatif. Étant donnée une courbe C telle que $K_X \cdot C < 0$, un résultat de Miyaoka et Mori ([36]), basé sur le célèbre « lemme de cassage » de ce dernier, dit qu'il existe une courbe *rationnelle* dans X qui passe par un point donné arbitraire de C . Dans notre cas, cela entraîne que X est recouverte par des courbes rationnelles.

Inversement, si X est recouverte par des courbes rationnelles, le fibré normal à une de ces courbes C générale est engendré par ses sections, de sorte que $K_X \cdot C$ est strictement négatif. Soit H un \mathbf{Q} -diviseur ample vérifiant $(K_X + H) \cdot C < 0$. Tout diviseur effectif de classe $m(K_X + H)$, avec $m > 0$, doit donc contenir C . Il est donc nul ; cela montre que $K_X + H$ n'est pas grand, donc que K_X n'est pas pseudo-effectif. \square

Plus généralement, on conjecture (ce serait une conséquence du programme du modèle minimal de Mori) que X est recouverte par des courbes rationnelles si et seulement si sa dimension de Kodaira est $-\infty$, c'est-à-dire si $H^0(X, mK_X) = 0$ pour tout $m > 0$. L'implication directe est facile. Pour la réciproque, il reste donc à montrer que si K_X est pseudo-effectif, un de ses multiples a une section non nulle. Noter que c'est très particulier au diviseur canonique : il existe des classes pseudo-effectives dont aucun multiple (entier) n'est effectif.

Campana et Păun, dans [11], déduisent du corollaire précédent que toute variété projective X admettant une application dominante $\mathbf{C}^n \rightarrow X$ de degré fini est recouverte par des courbes rationnelles (on conjecture l'unirationalité de X). Cela s'applique en particulier aux compactifications de \mathbf{C}^n , c'est-à-dire aux variétés complexes compactes dont un ouvert de Zariski est analytiquement isomorphe à \mathbf{C}^n . Lorsque $n = 2$, ce résultat est dû à Kodaira ([28], Theorem 5).

COROLLAIRE 4.4 (Campana–Păun). — *Toute compactification projective de \mathbf{C}^n est recouverte par des courbes rationnelles.*

PREUVE — Soient X une telle compactification et $\varphi : \mathbf{C}^n \rightarrow X$ une fonction holomorphe qui induit un isomorphisme analytique entre \mathbf{C}^n et un ouvert de Zariski U de X . Une métrique de Kähler ω sur X induit une métrique hermitienne h sur le fibré canonique ω_X .

Supposons ω_X pseudo-effectif ; il existe alors une fonction $f \in L^1(X)$ telle que

$$(4) \quad \Theta_h(\omega_X) + \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} f \geq 0$$

comme courant, et f est semi-continue supérieurement, donc majorée sur X . Le jacobien Jac_φ induit une section holomorphe du fibré en droites $\varphi^* \omega_X^{-1}$ sur \mathbf{C}^n . On a donc

$$\varphi^* \Theta_h(\omega_X) = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \log \|\text{Jac}_\varphi\|^2.$$

En prenant l'image inverse de (4) par φ , on obtient

$$i\partial\bar{\partial} \log \left(\|\text{Jac}_\varphi\|^2 e^{f \circ \varphi} \right) \geq 0$$

ce qui signifie que la fonction $\tau = \|\text{Jac}_\varphi\|^2 e^{f \circ \varphi}$ est pluri-sous-harmonique sur \mathbf{C}^n . Le théorème de changement de variables donne par ailleurs

$$\int_{\mathbf{C}^n} \tau d\lambda \leq e^{\sup_X f} \int_{\mathbf{C}^n} \|\text{Jac}_\varphi\|^2 d\lambda = e^{\sup_X f} \int_{\mathbf{C}^n} \varphi^* \omega^n = e^{\sup_X f} \int_X \omega^n$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbf{C}^n . En conclusion, la fonction pluri-sous-harmonique positive τ est intégrable sur \mathbf{C}^n par rapport à λ . Des arguments standard de convexité montrent que τ est identiquement nulle, ce qui est absurde (la fonction f ne peut valoir $-\infty$ sur un ouvert non vide de X).

Il s'ensuit que ω_X n'est pas pseudo-effectif, donc que X est recouverte par des courbes rationnelles (cor. 4.3). \square

Je voudrais aussi mentionner une conjecture de Green et Griffiths ([17], Conjecture 3.6), qui énonce qu'une variété est de type général si et seulement si elle n'est pas « mesure hyperbolique », c'est-à-dire s'il n'existe pas de suite d'applications holomorphes $f_r : \Delta(1)^{n-1} \times \Delta(r) \rightarrow X$ telle que $\|\text{Jac}_{f_r}(0)\| \geq 1$ pour tout $r \in \mathbf{N}$ (on a noté $\Delta(r)$ le disque complexe de centre 0 et de rayon r).

Le sens direct est dû à Kobayashi-Ochiai et Griffiths, indépendamment ([17], Corollary 3.5). Pour la réciproque, on notera qu'une variété recouverte par des courbes rationnelles n'est pas mesure hyperbolique. Il reste donc à exclure le cas où K_X est sur le bord du cône pseudo-effectif.

5. VOLUME ET DÉCOMPOSITIONS DE ZARISKI

La démonstration du théorème 4.1 utilise la notion de « volume » d'un fibré en droites sur une variété kählérienne compacte X .

5.1. Volume d'un fibré en droites

Soit L un fibré en droites sur une variété kählérienne compacte X de dimension n . On montre que la suite

$$\frac{h^0(X, L^{\otimes m})}{m^n/n!}$$

converge lorsque m tend vers $+\infty$. On note $\text{vol}(L)$ sa limite (le « volume » de L). Celle-ci ne dépend que de la première classe de Chern de L .

Comme de plus $\text{vol}(L^{\otimes m}) = m^n \text{vol}(L)$, on peut étendre par homogénéité le volume à une fonction sur $N^1(X, \mathbf{Q})$, qui se trouve être localement lipschitzienne ([33], Theorem 2.2.44). On l'étend par continuité en une fonction continue $\text{vol} : N^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$. Elle vérifie

$$\xi \in \text{Big}(X) \iff \text{vol}(\xi) > 0.$$

Si L est un fibré en droites *nef* sur X , l'estimation (1) entraîne $\text{vol}(L) = c_1(L)^n$. On a donc, par continuité de la fonction volume,

$$(5) \quad \text{vol}(\xi) = \xi^n \quad \text{pour tout } \xi \in \text{Nef}(X).$$

On aura aussi besoin des propriétés suivantes du volume : pour tout ξ dans $N^1(X, \mathbf{R})$, pour toute modification $\mu : X' \rightarrow X$ et pour tout $e \in \text{Pef}(X)$, on a ([33], Exemples 2.2.48 et 2.2.49)

$$(6) \quad \text{vol}(\xi + e) \geq \text{vol}(\xi) \quad , \quad \text{vol}(\mu^* \xi) = \text{vol}(\xi).$$

Enfin, la fonction volume satisfait l'inégalité

$$\text{vol}(\xi_1 + \dots + \xi_n)^{\frac{1}{n}} \geq \text{vol}(\xi_1)^{\frac{1}{n}} + \dots + \text{vol}(\xi_n)^{\frac{1}{n}}$$

pour toutes classes ξ_1, \dots, ξ_n dans $\text{Pef}(X, \mathbf{R})$ ⁽¹³⁾.

Exemple 5.1. — Soit X l'éclaté de \mathbf{P}^n en un point. Soient E le diviseur exceptionnel et H l'image inverse dans X d'un hyperplan. On a $H^{1,1}(X, \mathbf{R}) = N^1(X, \mathbf{R})$ et cet espace vectoriel est engendré par les classes $[H]$ et $[E]$. Nos cônes sont donc plans. On a

$$\begin{aligned} \text{Amp}(X) &= \{x[H] - y[E] \mid x > y > 0\} \\ \text{Eff}(X) &= \{x[H] - y[E] \mid x \geq 0, x \geq y\}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$H^n = 1 \quad , \quad (-E)^n = -1 \quad , \quad H \cdot E = 0.$$

Le volume est donné sur $\text{Nef}(X)$ par

$$\text{vol}(x[H] - y[E]) = (x[H] - y[E])^n = x^n - y^n.$$

Si p et q sont des entiers positifs, qE est fixe dans le système linéaire $|pH + qE|$. On a donc $\text{vol}(pH + qE) = \text{vol}(pH) = p^n$. On en déduit

$$\text{vol}(x[H] - y[E]) = \begin{cases} x^n - y^n & \text{si } x \geq y \geq 0 ; \\ x^n & \text{si } x \geq 0, y \leq 0 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

⁽¹³⁾Cette inégalité se déduit de l'inégalité dite de Teissier–Hovanskii,

$$(7) \quad (\xi_1 \cdots \xi_n)^n \geq (\xi_1^n)^{\frac{1}{n}} \cdots (\xi_n^n)^{\frac{1}{n}}$$

valable pour toutes classes nef ξ_1, \dots, ξ_n dans $N^1(X, \mathbf{R})$, qui s'obtient à partir du théorème de l'indice de Hodge.

Plus généralement, si X est une variété torique, $\text{Pef}(X)$ est un cône polyédral qui admet une partition en un nombre fini de sous-cônes polyédraux sur chacun desquels le volume est une fonction polynomiale ([21]).

Nombre d'auto-intersection mobile. On peut donner du volume d'un diviseur grand D l'interprétation géométrique suivante. Soit $\text{Base}(D)$ le lieu base de D (c'est-à-dire l'intersection de tous les éléments du système linéaire $|D|$). On pose

$$D^{[n]} = \text{Card}(D_1 \cap \dots \cap D_n \cap (X - \text{Base}(D)))$$

où D_1, \dots, D_n sont des éléments généraux de $|D|$. Si $|D|$ est sans point base, cela vaut donc D^n . On a alors ([34], Définition 11.4.10; comparer avec (5))

$$\text{vol}(D) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(mD)^{[m]}}{m^n}.$$

5.2. Décompositions de Zariski

On dit qu'un diviseur D sur X a une *décomposition de Zariski* s'il existe des \mathbf{Q} -diviseurs P et N , respectivement nef et effectif, tels que $D = P + N$ et que l'inclusion

$$H^0(X, [mP]) \hookrightarrow H^0(X, mD)$$

soit bijective pour tout entier $m > 0$.

Zariski établit dans [45] l'existence d'une telle décomposition lorsque X est une *surface algébrique* et que D est effectif⁽¹⁴⁾. C'est d'ailleurs sans doute la première apparition des \mathbf{Q} -diviseurs (la décomposition n'est pas nécessairement entière, comme le montre l'exemple ci-dessous). Fujita étend dans [22] ce résultat aux diviseurs pseudo-effectifs.

Si on a une telle décomposition, $\text{vol}(D) = P^n$. Sur une surface projective, le volume prend donc des valeurs rationnelles sur les points rationnels; de plus, c'est localement une fonction polynomiale quadratique ([1]).

Exemple 5.2 ([33], Exemple 2.3.20). — Soit X la surface obtenue en éclatant trois points colinéaires sur \mathbf{P}^2 . Soient E_1, E_2 et E_3 les diviseurs exceptionnels et H l'image inverse dans X d'une droite. Le diviseur

$$D = 3H - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3$$

est grand. Sa décomposition de Zariski est donnée par

$$P = \frac{1}{2}(3H - E_1 - E_2 - E_3) \quad , \quad N = \frac{3}{2}(H - E_1 - E_2 - E_3)$$

et $\text{vol}(D) = P^2 = 3/2$.

⁽¹⁴⁾Zariski caractérise en fait P – la partie positive – et N – la partie négative – de la façon suivante à l'aide du produit d'intersection entre diviseurs :

- P est orthogonal à chaque composante de N ;
- la matrice d'intersection des composantes de N est définie négative.

Cutkosky a construit un exemple de fibré en droites sur une variété projective de dimension 3 dont le volume est irrationnel ([13]; [14]; [33], Exemple 2.3.8). Il existe aussi une variété projective de dimension 3 pour laquelle la fonction volume n'est pas localement polynomiale ([1]). Le résultat de Zariski ne s'étend donc pas tel quel aux variétés de dimension supérieure. On pourrait simplement demander qu'il existe une modification $\mu : X' \rightarrow X$ et une décomposition

$$\mu^*D = P + N$$

en somme de \mathbf{R} -diviseurs avec P nef, N effectif (sur X'), telles que l'inclusion

$$H^0(X', \lfloor mP \rfloor) \hookrightarrow H^0(X', m\mu^*D) \simeq H^0(X, mD)$$

soit bijective pour tout entier $m > 0$. Hélas, même une telle décomposition n'existe pas toujours ([40])⁽¹⁵⁾. On doit se contenter du résultat suivant ([22]).

THÉORÈME 5.3 (Décomposition de Zariski approchée). — *Soient X une variété projective et $\xi \in \text{Big}(X)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une modification $\mu : X' \rightarrow X$ avec*

$$\mu^*\xi = a + e$$

où a est ample et e effectif (sur X'), avec

$$\text{vol}(\xi) \geq \text{vol}(a) \geq \text{vol}(\xi) - \varepsilon.$$

Je renvoie à [34], § 11.4, pour la preuve. Il faut noter que si ce résultat semble proche de l'existence d'une « vraie » décomposition de Zariski, il apporte beaucoup moins d'informations. En particulier, contrairement à celle-ci, il n'est d'aucune utilité directe pour étudier, pour un diviseur D sur X , l'anneau $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mD)$, le but originel de Zariski.

Dans la décomposition de Zariski sur une surface, les deux morceaux sont orthogonaux (cf. note 14). Dans une décomposition de Zariski approchée, ils restent « presque orthogonaux » (en un sens convenable). C'est l'objet du théorème suivant ([9]), qui avait été essentiellement conjecturé par Nakamaye.

THÉORÈME 5.4. — *Soit X une variété projective. Soit $\xi \in \text{Big}(X)$ et soit $\mu : X' \rightarrow X$ une modification telle que $\mu^*\xi = a + e$, avec a ample et e effectif. Soit enfin h une classe ample sur X telle que $h \pm \xi$ soit ample. On a*

$$(a^{n-1} \cdot e)^2 \leq 20h^n (\text{vol}(\xi) - \text{vol}(a)).$$

⁽¹⁵⁾En revanche, il est conjecturé qu'un diviseur canonique d'une variété de type général possède toujours une décomposition de Zariski dans ce sens faible. Cela entraînerait que l'anneau canonique est de type fini ([27]).

PREUVE — Nous suivons [9], § 5, et [34], § 11.4.C. Pour $0 \leq t \leq 1$, on a $\text{vol}(\xi) = \text{vol}(a + e) \geq \text{vol}(a + te)$. Nous allons étudier la fonction $t \mapsto \text{vol}(a + te)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Écrivons $a + te$ comme différence de deux classes amples :

$$a + te = p_t - q_t, \quad \text{avec } p_t = a + t\mu^*(\xi + h) \quad \text{et } q_t = t(a + \mu^*h).$$

LEMME 5.5. — Soit X une variété projective de dimension n . Pour tous ξ et ξ' dans $\text{Nef}(X)$, on a

$$\text{vol}(\xi - \xi') \geq \xi^n - n\xi^{n-1}\xi'.$$

PREUVE RAPIDE DU LEMME — Par continuité et homogénéité, on peut supposer que ξ et ξ' sont les classes de diviseurs D et E très amples. On choisit alors E_1, \dots, E_m distincts dans le système linéaire $|E|$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, m(D - E)) \longrightarrow H^0(X, mD) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m H^0(E_j, D|_{E_j})$$

permet, avec l'estimation (1), de conclure⁽¹⁶⁾. □

On en déduit

$$\text{vol}(a + te) \geq p_t^n - np_t^{n-1}q_t.$$

On a d'une part

$$p_t^n = (a + t(a + e + \mu^*h))^n \geq a^n + nta^{n-1}(a + e + \mu^*h)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} p_t^{n-1}q_t &= t(a + t(a + e + \mu^*h))^{n-1}(a + \mu^*h) \\ &= t \sum_{k=0}^{n-1} t^k a^{n-1-k} (a + e + \mu^*h)^k (a + \mu^*h) \binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

On vérifie que si $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$ sont nef et $a'_1 - a_1, \dots, a'_n - a_n$ effectifs, on a

$$(8) \quad a_1 \cdots a_n \leq a'_1 \cdots a'_n.$$

Comme $\mu^*h - a$, $2\mu^*h - (a + e + \mu^*h)$ et $2\mu^*h - (a + \mu^*h)$ sont effectifs, on en déduit

$$\begin{aligned} p_t^{n-1} \cdot q_t &\leq ta^{n-1}(a + \mu^*h) + \sum_{k=1}^{n-1} (2t)^{k+1} \mu^*h^n \binom{n-1}{k} \\ &\leq ta^{n-1}(a + \mu^*h) + 4(n-1)(1+2t)^{n-2}t^2h^n. \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾L'analogie de ce lemme pour des classes de Kähler quelconques n'est pas connu. On a quand même ([9], Theorem 10.4)

$$\text{vol}(\xi - \xi') \geq \xi^n - \frac{(n+1)^2}{4} \xi^{n-1} \xi'$$

lorsque ξ est une classe de Kähler et ξ' une classe ample.

Pour $0 \leq t \leq \frac{1}{10n}$, on a $4(n-1)(1+2t)^{n-2} \leq 5n$, de sorte que

$$\text{vol}(a+te) \geq a^n + nta^{n-1}e - 5n^2t^2h^n.$$

Le membre de droite de cette inégalité est maximal pour $t = t_0 = \frac{a^{n-1}e}{10nh^n} \leq \frac{a^{n-1}\mu^*h}{10nh^n}$, qui est bien $\leq \frac{1}{10n}$ par (8). On en déduit

$$\text{vol}(\xi) = \text{vol}(a+e) \geq \text{vol}(a+t_0e) \geq a^n + \frac{(a^{n-1}e)^2}{20h^n}$$

ce qui montre le théorème. \square

5.3. Volume d'une classe réelle de type $(1, 1)$

On peut partir de la décomposition de Zariski approchée pour *définir* le volume d'une classe réelle de type $(1, 1)$ sur une variété kählérienne compacte. Pour ξ dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, on pose $\text{vol}(\xi) = 0$ si $\xi \notin \text{Big}_{\text{tr}}(X)$, et sinon⁽¹⁷⁾

$$\text{vol}(\xi) = \sup_{\omega} \int_X \omega^n$$

où le supremum est pris sur tous les courants de Kähler T dans ξ à singularités analytiques⁽¹⁸⁾, toutes les modifications $\mu : X' \rightarrow X$ et toutes les décompositions $\mu^*T = \omega + [E]$ avec ω forme de Kähler sur X' et E \mathbf{Q} -diviseur effectif sur X' .

Lorsque ω est une forme de Kähler, on a $\text{vol}(\omega) = \omega^n$ (c'est donc le volume de X pour la métrique associée, d'où la terminologie). Cette définition du volume coïncide avec la définition précédente sur $\text{Pef}(X)$.

THÉORÈME 5.6 (Boucksom, [7]). — *La fonction*

$$\text{vol} : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

ainsi définie est continue, et

$$\xi \in \text{Big}_{\text{tr}}(X) \iff \text{vol}(\xi) > 0.$$

La démonstration repose sur la même technique de dégénérescence d'équation de Monge-Ampère utilisée dans la preuve du théorème 2.1.

⁽¹⁷⁾C'est la version de [9], Définition 3.2. Boucksom montre que la classe grande ξ contient un courant T_{\min} positif « à singularités minimales » (non unique) et que $\text{vol}(\xi)$ est l'intégrale sur l'ouvert où les coefficients de T_{\min} sont bornés du courant T_{\min}^n (bien défini sur ce lieu).

⁽¹⁸⁾Les courants de Kähler sont définis dans le § 3.4. Un courant T réel de type $(1, 1)$ est dit à « singularités analytiques », ou à « pôles logarithmiques », s'il s'écrit localement comme la somme d'une forme différentielle de type $(1, 1)$ et d'un courant du type $ic\partial\bar{\partial}\log(|f_1|^2 + \dots + |f_r|^2)$, où f_1, \dots, f_r sont des fonctions holomorphes et $c > 0$. Sur la modification de X obtenue en désingularisant l'éclatement de l'idéal (global) engendré (localement) par f_1, \dots, f_r , l'image inverse de T est somme d'une forme lisse et d'un diviseur.

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1

Nous suivons [9], § 5, et [34], § 11.4. On a déjà vu que le cône $\text{Pef}(X)$ est contenu dans le cône dual de l'ensemble des classes mobiles. Si l'inclusion est stricte, il existe une classe ξ dans la frontière de $\text{Pef}(X)$ et dans l'intérieur du cône dual. Soit h une classe ample telle que $h \pm 2\xi$ soit ample. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\xi - \varepsilon h$ soit encore dans le cône dual ; on a donc

$$(9) \quad (\xi - \varepsilon h) \cdot \gamma \geq 0$$

pour toute courbe mobile γ . Prenons $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. Comme ξ est pseudo-effective, on a $\text{vol}(\xi + \delta h) \geq \text{vol}(\delta h) = \delta^n h^n > 0$. Il existe donc une décomposition de Zariski approchée (th. 5.3)

$$(10) \quad \mu_\delta^*(\xi + \delta h) = a_\delta + e_\delta \quad , \quad \text{vol}(a_\delta) \geq \max\{\text{vol}(\xi + \delta h) - \delta^{2n}, \frac{1}{2}\delta^n h^n\}$$

où $\mu_\delta : X'_\delta \rightarrow X$ est une modification. Considérons la classe mobile

$$\gamma_\delta = \mu_{\delta*}(a_\delta^{n-1}).$$

En utilisant la formule de projection et l'inégalité (7), on obtient

$$h \cdot \gamma_\delta = \mu_\delta^* h \cdot a_\delta^{n-1} \geq (h^n)^{\frac{1}{n}} (a_\delta^n)^{\frac{n-1}{n}}.$$

D'autre part,

$$\xi \cdot \gamma_\delta \leq (\xi + \delta h) \cdot \gamma_\delta = \mu_\delta^*(\xi + \delta h) \cdot a_\delta^{n-1} = (a_\delta + e_\delta) \cdot a_\delta^{n-1}.$$

Comme $h \pm (\xi + \delta h)$ est ample, le théorème 5.4 entraîne, avec (10),

$$e_\delta \cdot a_\delta^{n-1} \leq (\text{vol}(\xi + \delta h) - \text{vol}(a_\delta)) \sqrt{20h^n} \leq \delta^n \sqrt{20h^n} \leq \delta(2a_\delta^n)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{20h^n}.$$

On en déduit, en utilisant de nouveau (10),

$$(11) \quad \frac{\xi \cdot \gamma_\delta}{h \cdot \gamma_\delta} \leq \frac{a_\delta^n + \delta^n \sqrt{20h^n}}{(h^n)^{\frac{1}{n}} (a_\delta^n)^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{a_\delta^n + a_\delta^n \frac{2}{h^n} \sqrt{20h^n}}{(h^n)^{\frac{1}{n}} (a_\delta^n)^{\frac{n-1}{n}}} \leq C(a_\delta^n)^{\frac{1}{n}}$$

où C est une constante strictement positive. On a $a_\delta^n = \text{vol}(a_\delta) \leq \text{vol}(\xi + \delta h)$ et $\text{vol}(\xi) = 0$ puisque ξ est sur la frontière du cône pseudo-effectif ; on obtient donc, par continuité de la fonction, volume $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} a_\delta^n = 0$, ce qui, avec (11), contredit (9), et termine la démonstration du théorème 4.1.

7. DÉCOMPOSITION DE ZARISKI DIVISORIELLE

Même si un diviseur n'a en général pas de décomposition de Zariski, on peut quand même (à la suite de Nakayama et Boucksom) obtenir une décomposition où la partie positive est « nef en codimension 1 ».

7.1. Lieu non nef pour les classes algébriques

Soit D un diviseur grand sur X . Nous voulons définir la notion de « nef en un point » x de X . Il se trouve que la bonne façon de faire n'est pas de demander que D soit de degré positif sur les courbes passant par x , mais de considérer les multiplicités des éléments des systèmes linéaires $|mD|$ en x . Tout d'abord, on pose

$$\text{mult}_x |D| = \min_{E \in |D|} \text{mult}_x E.$$

Cet entier est nul si et seulement si x n'est pas dans le lieu base de $|D|$. Goodman montre ([23], Proposition 8) que D est nef si et seulement si

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{\text{mult}_x |mD|}{m} = 0$$

pour tout x dans X . La limite inférieure est en fait une limite ; on la note $\text{mult}_x \|D\|$. Elle ne dépend que de la classe $[D]$, et $\text{mult}_x \|mD\| = m \text{mult}_x \|D\|$ pour tout entier strictement positif m . On peut donc par homogénéité définir $\text{mult}_x \xi$ pour toute classe rationnelle grande ξ , et enfin définir une fonction

$$\text{mult}_x : \text{Big}(X) \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

qui est continue ([41], Lemma 1.7). Le lieu non nef de ξ est alors

$$\{x \in X \mid \text{mult}_x \xi > 0\}.$$

Donnons une version plus géométrique de cette construction. On définit le lieu base stable d'un diviseur D comme l'intersection ensembliste

$$\mathbf{B}(D) = \bigcap_{m>0} \text{Base } |mD|.$$

Pour tout entier strictement positif m , on a $\mathbf{B}(D) = \mathbf{B}(mD)$. On peut donc définir le lieu base stable d'un \mathbf{Q} -diviseur, mais on n'a pas en général $\mathbf{B}(D) = \mathbf{B}(D')$ lorsque $[D] = [D']$ ([21], Example 1.1). Le résultat suivant rend les calculs pratiques possibles dans certains cas. C'est à Nakamaye qu'on doit l'idée de perturber les classes pour améliorer le comportement du lieu base stable ([38], [39]).

THÉORÈME 7.1 ([21]). — *Le lieu non nef d'un \mathbf{R} -diviseur D grand sur une variété projective X est égal à son lieu base restreint*

$$\mathbf{B}_-(D) = \bigcup_{\substack{H \text{ } \mathbf{R}\text{-diviseur ample} \\ D+H \text{ } \mathbf{Q}\text{-diviseur}}} \mathbf{B}(D+H) \subset \mathbf{B}(D).$$

Ce lieu est une union dénombrable de sous-variétés de X ; il contient la réunion des courbes sur lesquelles D est de degré strictement négatif, mais peut être plus grand ([9], Remark 6.3). Il est défini pour tout \mathbf{R} -diviseur D (pas nécessairement grand) et ne dépend que de $[D]$ ([33], Lemma 10.3.1). On a ([21], Example 1.21)

- $\mathbf{B}_-(D) = \emptyset$ si et seulement si D est nef ;
- $\mathbf{B}_-(D) \neq X$ si et seulement si D est pseudo-effectif.

Pour tout \mathbf{R} -diviseur D , on pose aussi

$$\mathbf{B}_+(D) = \bigcap_{\substack{H \text{ } \mathbf{R}\text{-diviseur ample} \\ D+H \text{ } \mathbf{Q}\text{-diviseur}}} \mathbf{B}(D-H) \supset \mathbf{B}(D).$$

C'est une sous-variété de X qui ne dépend que de la classe $[D]$.

Exemple 7.2 (Surfaces projectives). — Si X est une surface projective, D a une décomposition de Zariski $D = P + N$ (§ 5.2). On a $\mathbf{B}_-(D) = \text{Supp}(N)$ et $\mathbf{B}_+(D) = \mathbf{B}_+(P)$ est la réunion de toutes les courbes irréductibles de X sur lesquelles P est de degré 0 ; il contient donc le support de N ([21], Exemples 1.11 et 4.6).

L'introduction de ce dernier lieu est justifiée par le résultat suivant de Nakamaye ([38] ; [33], Theorem 10.3.5).

THÉORÈME 7.3. — *Si D est un diviseur nef et grand, $\mathbf{B}_+(D)$ est la réunion de toutes les sous-variétés irréductibles Y de X pour lesquelles⁽¹⁹⁾*

$$D^{\dim(Y)} \cdot Y = 0.$$

7.2. Lieu non nef général

On peut étendre les définitions précédentes au cas où X est une variété kählérienne compacte (et même une variété complexe compacte quelconque ; [8], Definition 3.3). La notion de multiplicité sera remplacée par celle de *nombre de Lelong*.

Le nombre de Lelong en un point x de X d'un courant fermé réel positif T de type $(1, 1)$, qui s'écrit localement $T = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$, est défini par

$$\nu(T, x) = \liminf_{z \rightarrow x} \frac{\varphi(z)}{\log |z - x|} \geq 0.$$

Si D est un diviseur effectif, un résultat de Thie ([44]) entraîne $\nu(T_D, x) = \text{mult}_x D$. Enfin, pour tout $\xi \in \text{Big}_{\text{tr}}(X)$, on pose⁽²⁰⁾

$$\nu(\xi, x) = \inf_{\substack{T \in \xi \\ T \text{ positif}}} \nu(T, x).$$

On appelle ce réel positif la *multiplicité minimale* de ξ en x . Si $\xi \in \text{Big}(X)$, cette définition coïncide avec celle de multiplicité ([8], Theorem 5.4) :

$$\nu(\xi, x) = \text{mult}_x \xi.$$

⁽¹⁹⁾ Si Y est un point, on a $D^0 \cdot Y = 1$!

⁽²⁰⁾ Avec les notations de la note 17, on a $\nu(\xi, x) = \nu(T_{\min}, x)$. D'autre part, on peut comme dans [8], Proposition 3.2, étendre cette définition au cas $\xi \in \text{Pef}_{\text{tr}}(X)$; la fonction $\nu(\cdot, x)$ ainsi définie n'est pas continue.

On peut donc définir le *lieu non nef* d'un élément quelconque ξ de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ comme⁽²¹⁾

$$\mathbf{B}_-(\xi) = \begin{cases} \{x \in X \mid \nu(\xi, x) > 0\} & \text{si } \xi \in \text{Pef}(X); \\ X & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'analogie du théorème 7.1 est l'égalité suivante ([9], § 6) :

$$\mathbf{B}_-(\xi) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap \text{Supp}(E)$$

où, une forme de Kähler ω sur X étant fixée, l'intersection est prise sur tous les courants T de classe $\xi + \varepsilon\omega$ et toutes les modifications $\mu : X' \rightarrow X$ pour lesquelles $\mu^*T = \beta + [E]$, où E est un diviseur effectif dans X' et β une forme positive fermée.

Boucksom définit dans [8], Definition 3.18, pour toute classe transcendante ξ , le lieu $\mathbf{B}_+(\xi)$ (appelé « lieu non kählérien » et noté $E_{nK}(\xi)$ dans *loc. cit.*).

7.3. Encore des cônes

On peut séparer les éléments de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ selon la dimension de leur lieu non nef. Cela définit ainsi, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, un cône ouvert convexe

$$\mathbf{C}_k(X) = \{\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \mid \dim \mathbf{B}_+(\xi) \leq k\}.$$

Son adhérence vérifie

$$\overline{\mathbf{C}_k(X)} = \overline{\{\xi \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \mid \dim \mathbf{B}_-(\xi) \leq k\}}.$$

On a⁽²²⁾

$$\text{Nef}_{\text{tr}}(X) = \overline{\mathbf{C}_0(X)} \subset \overline{\mathbf{C}_1(X)} \subset \dots \subset \overline{\mathbf{C}_{n-1}(X)} = \text{Pef}_{\text{tr}}(X).$$

On peut dire des éléments de $\mathbf{C}_k(X)$ qu'ils sont « nefs en codimension $n-k-1$ »⁽²³⁾.

Le cône $\overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)} \cap N^1(X, \mathbf{R})$ a tout d'abord été considéré par Kawamata dans [27], sous le nom de « movable cone », puis étudié dans [41]. Boucksom étend la définition aux classes transcendentes dans [8], et le nomme « modified nef cone ». Il montre qu'il est engendré par les images directes de classes de Kähler sur des modifications de X . C'est aussi le cône engendré par les classes grandes ξ telles que $\text{mult}_D(\xi) = 0$ pour tout diviseur premier D dans X .

⁽²¹⁾Dans [8], Definition 3.3, il est noté $E_{nn}(\xi)$.

⁽²²⁾L'égalité de gauche provient du fait que $\mathbf{B}_+(\xi)$ n'a jamais de point isolé.

⁽²³⁾Il serait intéressant de déterminer les cônes duaux (cf. § 4) des cônes $\mathbf{C}_k(X)$ pour prolonger ce qui a été fait pour $k=0$ et $k=n-1$ dans les § 4.1 et 4.2. On pourrait penser par analogie que le dual de $\mathbf{C}_k(X)$ est le cône engendré par les classes de courbes dont les déformations recouvrent une sous-variété de X de dimension $\geq k+1$, mais c'est déjà faux pour $k=n-2$. Une caractérisation complète du cône dual de $\mathbf{C}_k(X)$ vient d'être donnée dans [43] lorsque X est une variété torique.

Exemple 7.4 (Produits symétriques d'une courbe). — Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$. Son n -ième produit symétrique $X = \text{Sym}^n C$ est une variété projective (lisse) de dimension n . Supposons $n > 1$. Lorsque C est très générale, l'espace vectoriel $N^1(X, \mathbf{R})$ est de dimension 2, engendré par la classe ample x du diviseur $\text{Sym}^{n-1} C$ et par la classe nef θ de l'image inverse par l'application d'Abel–Jacobi $\text{Sym}^n C \rightarrow J^n C$ de la polarisation canonique de la jacobienne $J^n C$. On pose

$$t_k = \inf\{t \in \mathbf{R} \mid -\theta + tx \in \mathbf{C}_k(X)\} > 0.$$

La « grande diagonale » Δ_C a pour classe $2(-\theta + (g+n-1)x)$ et est sur la frontière du cône pseudo-effectif de X ([29], Theorem 3), de sorte que

$$t_{n-1} = g + n - 1.$$

L'argument de Kouvidakis prouve en fait que la classe de tout diviseur premier de X autre que Δ_C s'écrit $c(-\theta + tx)$ avec $c > 0$ et $t \geq g + n - 1 + \frac{2}{n}(g+1)$. Cela entraîne $\mathbf{B}_+(-\theta + tx) \supset \Delta_C$ pour $t < g + n - 1 + \frac{2}{n}(g+1)$, de sorte que

$$t_{n-2} \geq g + n - 1 + \frac{2}{n}(g+1) > t_{n-1}.$$

La demi-droite $\mathbf{R}^+(-\theta + t_0x)$ est orthogonale à la « petite diagonale » δ_C ⁽²⁴⁾. Comme $x \cdot \delta_C = n$ et $\theta \cdot \delta_C = n^2g$, on obtient $\mathbf{B}_-(-\theta + tx) \supset \delta_C$ pour $t < ng$ et

$$t_0 = ng.$$

Calculer les pentes

$$u_k = \inf\{t \in \mathbf{R} \mid \theta + tx \in \mathbf{C}_k(X)\} \leq 0$$

des autres faces de ces cônes est en général beaucoup plus difficile. Lorsque $n > g$, elles valent toutes 0 car θ est nef mais pas grand. Lorsque C a un g_d^1 avec $d \leq n$, la classe θ est nef mais pas ample, donc $u_0 = 0$. Lorsque $g = 2n$ et que C est générale, on a $u_0 = -2$ ([42], Theorem 1.1).

7.4. Décomposition de Zariski divisorielle

L'idée est de « projeter » une classe pseudo-effective ξ sur le cône $\overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$ en lui soustrayant des multiples convenables des diviseurs contenus dans son lieu non nef $\mathbf{B}_-(\xi)$. Pour tout diviseur premier D de X , on note⁽²⁵⁾

$$\nu(\xi, D) = \inf_{x \in D} \nu(\xi, x).$$

⁽²⁴⁾Cela résulte du fait que le morphisme

$$\begin{aligned} C^n &\longrightarrow (J^0 C)^{\binom{n}{2}} \\ (p_1, \dots, p_n) &\longmapsto (p_i - p_j)_{1 \leq i < j \leq n} \end{aligned}$$

contracte exactement la petite diagonale et que l'image inverse de la polarisation produit descend en une classe nef non ample sur X ([42], Proposition 2.2).

⁽²⁵⁾Lorsque ξ est dans $N^1(X, \mathbf{R})$, la notation de [41] est $\sigma_D(\xi)$.

On montre que ces nombres sont nuls sauf pour un nombre fini de diviseurs premiers D ([41], Corollary III.1.11; [8], § 3.3). On pose alors⁽²⁶⁾

$$N_\xi = \sum_{D \text{ diviseur premier}} \nu(\xi, D)D.$$

On notera que N_ξ est un \mathbf{R} -diviseur, pas seulement une classe. Le théorème suivant rassemble les résultats de [41], III, § 1, dans le cas algébrique et de [8], § 3.2, 3.3 et 3.7, en général.

THÉORÈME 7.5. — *Soit ξ une classe pseudo-effective sur une variété kählérienne compacte X . L'application*

$$\begin{aligned} \rho : \text{Pef}_{\text{tr}}(X) &\longrightarrow \overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)} \\ \xi &\longmapsto \xi - [N_\xi] \end{aligned}$$

est concave, homogène de degré 1 et continue sur $\text{Big}_{\text{tr}}(X)$. Elle conserve le volume.

Si $\xi \in \overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$, on a $\rho(\xi) = \xi$.

Si $\xi \notin \overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$, on a $\rho(\xi) \in \partial \overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$.

La décomposition $\xi = \rho(\xi) + [N_\xi]$ est dite *décomposition de Zariski divisorielle* de ξ . Le lien avec la décomposition de Zariski telle qu'elle est définie dans le § 5.2 est le suivant : si D est un diviseur grand sur X , la décomposition $D = P_D + N_{[D]}$, avec $P_D = D - N_{[D]}$, est l'unique décomposition de D en somme de \mathbf{R} -diviseurs respectivement nef en codimension un et effectif, telle que l'inclusion

$$H^0(X, [mP_D]) \hookrightarrow H^0(X, mD)$$

est bijective pour tout entier $m > 0$ ([8], Theorem 5.5).

Si $\xi \in \overline{\mathbf{C}_{n-1}(X)} - \overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$, les diviseurs premiers qui apparaissent avec des coefficients non nuls dans N_ξ sont très rigides au sens où leurs combinaisons linéaires sont déterminées par leur classe de cohomologie; ils sont en particulier en nombre fini. Plus généralement, on dit qu'un \mathbf{R} -diviseur effectif E est *exceptionnel* s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes ([41], § 1.a; [8], Proposition 3.13)

- $N_{[E]} = E$;
- les classes des composantes irréductibles de E sont linéairement indépendantes dans $N^1(X, \mathbf{R})$ et le cône convexe qu'elles engendrent ne rencontre pas $\overline{\mathbf{C}_{n-2}(X)}$.

Il peut cependant y avoir une infinité (dénombrable) de diviseurs exceptionnels.

PROPOSITION 7.6 ([8], Proposition 3.15). — *Soit E un \mathbf{R} -diviseur effectif exceptionnel. La classe $[E]$ contient un unique courant positif, à savoir T_E . En particulier, si E est un diviseur, on a $h^0(X, mE) = 1$ pour tout $m \geq 0$.*

⁽²⁶⁾La notation de Nakayama est $N_\sigma(\xi)$.

Exemple 7.7 (Surfaces projectives). — Si X est une surface projective, la décomposition de Zariski divisorielle est la décomposition de Zariski. Un \mathbf{R} -diviseur effectif E est exceptionnel si et seulement si la matrice des nombres d'intersection de ses composantes irréductibles est définie négative ([8], Theorem 4.5). C'est équivalent à dire qu'il existe une surface projective Y et un morphisme $X \rightarrow Y$ qui contracte chaque composante connexe de $\text{Supp}(E)$ sur un point et qui est un isomorphisme en dehors de ce lieu.

Exemple 7.8 (Variétés hyperkähleriennes). — On a (cf. exemple 3.4)

$$\text{Nef}_{\text{tr}}(X) \subset \overline{C_{n-2}(X)} \subset \overline{\mathcal{C}(X)} \subset \text{Pef}_{\text{tr}}(X)$$

et les cônes $\overline{C_{n-2}(X)}$ et $\text{Pef}_{\text{tr}}(X)$ sont duaux pour la forme quadratique de Beauville–Bogomolov ([26]). Plus précisément, une classe ξ de $\overline{\mathcal{C}(X)}$ est dans $\overline{C_{n-2}(X)}$ si $q_X(\xi, [D]) \geq 0$ pour tout diviseur D de X recouvert par des courbes rationnelles.

Un \mathbf{R} -diviseur effectif de composantes irréductibles E_1, \dots, E_r est exceptionnel si et seulement si la matrice $(q_X(E_j, E_k))$ est définie négative, et tous les diviseurs exceptionnels sont recouverts par des courbes rationnelles ([8], Theorem 4.5 et Proposition 4.7).

On a $q_X(\rho(\xi), [N_\xi]) = 0$ et $\text{vol}(\xi) = \rho(\xi)^n$ ([8], Proposition 4.12 et Theorem 4.8). Si ξ est rationnelle, N_ξ est un \mathbf{Q} -diviseur et son volume est donc rationnel.

Exemple 7.9 (Produits symétriques d'une courbe). — Dans la situation de l'exemple 7.4, la grande diagonale est un diviseur exceptionnel.

RÉFÉRENCES

- [1] T. BAUER, , A. KÜRONYA & T. SZEMBERG – « Zariski chambers, volumes, and stable base loci », *J. Reine Angew. Math.* **576** (2004), p. 209–233.
- [2] A. BEAUVILLE – « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782 (1984).
- [3] P. BIRAN – « Symplectic packing in dimension 4 », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 3, p. 420–437.
- [4] ———, « From symplectic packing to algebraic geometry and back », in *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 202, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 507–524.
- [5] S. BOUCKSOM – « Le cône kählerien d'une variété hyperkählerienne », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 10, p. 935–938.
- [6] ———, « Cônes positifs des variétés complexes compactes », Thèse, Grenoble, 2002.
- [7] ———, « On the volume of a line bundle », *Internat. J. Math.* **13** (2002), no. 10, p. 1043–1063.

- [8] ———, « Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), no. 1, p. 45–76.
- [9] S. BOUCKSOM, J.-P. DEMAILLY, M. PĂUN & T. PETERNELL – « The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension », eprint [math.AG/0405285](#).
- [10] N. BUCHDAHL – « On compact Kähler surfaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), no. 1, p. vii, xi, 287–302.
- [11] F. CAMPANA & M. PĂUN – « Une généralisation du théorème de Kobayashi-Ochiai », eprint [math.AG/0506366](#).
- [12] F. CAMPANA & T. PETERNELL – « Algebraicity of the ample cone of projective varieties », *J. Reine Angew. Math.* **407** (1990), p. 160–166.
- [13] S. D. CUTKOSKY – « Zariski decomposition of divisors on algebraic varieties », *Duke Math. J.* **53** (1986), no. 1, p. 149–156.
- [14] S. D. CUTKOSKY & V. SRINIVAS – « On a problem of Zariski on dimensions of linear systems », *Ann. of Math. (2)* **137** (1993), no. 3, p. 531–559.
- [15] J.-P. DEMAILLY – « Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' -cohomologie », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 4, p. 119–122.
- [16] ———, « Singular Hermitian metrics on positive line bundles », in *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, Lecture Notes in Math., vol. 1507, Springer, Berlin, 1992, p. 87–104.
- [17] ———, « Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials », in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 285–360.
- [18] ———, « On the geometry of positive cones of projective and Kähler varieties », in *The Fano Conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, p. 395–422.
- [19] J.-P. DEMAILLY & M. PĂUN – « Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold », *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), no. 3, p. 1247–1274.
- [20] J.-P. DEMAILLY, T. PETERNELL & M. A. SCHNEIDER – « Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles », *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no. 2, p. 295–345.
- [21] L. EIN, R. LAZARFELD, M. MUSTAŢĂ, M. NAKAMAYE & M. POPA – « Asymptotic invariants of base loci », eprint [math.AG/0308116](#), *Ann. Inst. Fourier*, à paraître.
- [22] T. FUJITA – « On Zariski problem », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), no. 3, p. 106–110.
- [23] J. E. GOODMAN – « Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors », *Ann. of Math. (2)* **89** (1969), p. 160–183.
- [24] D. HUYBRECHTS – « Compact hyper-Kähler manifolds : basic results », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, p. 63–113.
- [25] ———, « Erratum : “Compact hyper-Kähler manifolds : basic results” [Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 63–113; MR1664696 (2000a :32039)] », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, p. 209–212.

- [26] ———, « The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold », *Math. Ann.* **326** (2003), no. 3, p. 499–513.
- [27] Y. KAWAMATA – « The Zariski decomposition of log-canonical divisors », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 425–433.
- [28] K. KODAIRA – « Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds », *J. Differential Geometry* **6** (1971/72), p. 33–46.
- [29] A. KOUVIDAKIS – « Divisors on symmetric products of curves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), no. 1, p. 117–128.
- [30] S. J. KOVÁCS – « The cone of curves of a K3 surface », *Math. Ann.* **300** (1994), no. 4, p. 681–691.
- [31] A. LAMARI – « Courants kählériens et surfaces compactes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), no. 1, p. vii, x, 263–285.
- [32] ———, « Le cône kählérien d’une surface », *J. Math. Pures Appl. (9)* **78** (1999), no. 3, p. 249–263.
- [33] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [34] ———, *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [35] D. MCDUFF & L. POLTEROVICH – « Symplectic packings and algebraic geometry », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 405–434.
- [36] Y. MIYAOKA & S. MORI – « A numerical criterion for uniruledness », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 1, p. 65–69.
- [37] M. NAGATA – « On the 14-th problem of Hilbert », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 766–772.
- [38] M. NAKAMAYE – « Stable base loci of linear series », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 4, p. 837–847.
- [39] ———, « Base loci of linear series are numerically determined », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 2, p. 551–566 (electronic).
- [40] N. NAKAYAMA – « A counterexample to the Zariski-decomposition conjecture », Hodge Theory and Algebraic Geometry, Hokkaido Univ., Infinite Analysis Lecture Notes, vol. 19, Kyoto University, 1994, p. 96–101.
- [41] ———, « Zariski-decomposition and Abundance », preprint, 1997.
- [42] G. PACIENZA – « On the nef cone of symmetric products of a generic curve », *Amer. J. Math.* **125** (2003), no. 5, p. 1117–1135.
- [43] S. PAYNE – « Stable base loci, movable curves, and small modifications, for toric varieties », eprint [math.AG/0506622](https://arxiv.org/abs/math/0506622), *Math. Zeit.*, à paraître.
- [44] P. R. THIE – « The Lelong number of a point of a complex analytic set », *Math. Ann.* **172** (1967), p. 269–312.

- [45] O. ZARISKI – « The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface », *Ann. of Math. (2)* **76** (1962), p. 560–615.

Olivier DEBARRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS

7, rue René Descartes

F-67084 Strasbourg Cedex

E-mail : debarre@math.u-strasbg.fr