

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

JEAN-PIERRE SERRE

Morphismes universels et différentielles de troisième espèce

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 11, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A11_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MORPHISMES UNIVERSELS ET DIFFÉRENTIELLES DE TROISIÈME ESPÈCE

par Jean-Pierre SERRE

Dans ce qui suit, X désigne une variété projective non singulière sur le corps K . On se donne sur X un nombre fini de sous-variétés de codimension 1, soient D_1, \dots, D_r ; on note Y la variété $X - D$, où $D = \cup D_i$. Si \mathcal{S} désigne la catégorie des groupes algébriques qui sont extension d'une variété abélienne par un tore, on sait (cf. exposé 10, théorème 7) qu'il existe un morphisme $f: Y \rightarrow G$, $G \in \mathcal{S}$, qui est universel pour \mathcal{S} ; le problème consiste à construire explicitement ce morphisme; c'est ce que nous ferons au n° 1 en utilisant la théorie de la variété de Picard. De plus, les formes différentielles sur X qui sont images réciproques par f de formes invariantes sur G ne sont autres (dans le cas classique) que les formes dites "de troisième espèce", admettant pour "résidu" une combinaison linéaire des D_i ; de ce point de vue, la construction du n° 1 est essentiellement équivalente au classique théorème de Severi ([8], p. 91; voir aussi [6]).

1. Construction du morphisme universel.

Soit $D(X)$ le groupe des diviseurs de X ; puisque X est non singulière, chacun des D_i définit un élément de $D(X)$, que l'on note encore D_i . Le sous-groupe de $D(X)$ engendré par les D_i est isomorphe à \mathbb{Z}^r ; nous le noterons I .

Soit $C(X)$ le groupe des classes de diviseurs de X , et soit P la variété de Picard de X , identifiée à un sous-groupe de $C(X)$. Le noyau de l'homomorphisme $I \rightarrow D(X) \rightarrow C(X) \rightarrow C(X)/P$ sera désigné par J ; on a donc un homomorphisme canonique $\Theta: J \rightarrow P$ obtenu par restriction de $I \rightarrow C(X)$. Le groupe J est un groupe abélien libre de type fini.

On note T le tore dont le groupe des caractères (cf. [1]) est J . On a donc $T = \text{Hom}(J, G_m)$, $J = \text{Hom}(T, G_m)$, le premier "Hom" étant pris sur \mathbb{Z} , le second étant pris au sens des groupes algébriques.

On note $\psi: X \rightarrow A$ le morphisme canonique de X dans sa variété d'Albanese: on sait que la variété de Picard de A s'identifie à celle de X , c'est-à-dire à P . D'autre part, on sait (cf. [4], chapitre VII, n° 16) que le groupe $\text{ext}(A, G_m)$ des extensions de A par G_m s'identifie au groupe P . On en déduit facilement que le groupe $\text{ext}(A, T)$ s'identifie à $\text{Hom}(J, P)$, et comme on a défini plus haut un élément canonique Θ dans ce groupe, on trouve ainsi

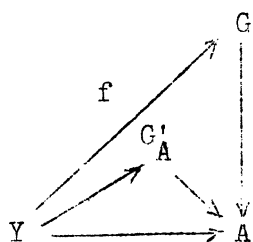
une extension canonique G de A par T .

On peut considérer G comme un espace fibré principal de base A et de groupe T ; soit $E = X \times_A G$ l'image réciproque par $\varphi: X \rightarrow A$ de cet espace fibré; c'est un espace fibré principal de base X et de groupe T . Pour tout $j \in \text{Hom}(T, G_m) = J$, soit E_j l'espace fibré principal de base X et de groupe G_m déduit de E au moyen de j ; un tel espace fibré correspond à un élément de $C(X)$, on le sait; ici, par construction même de E , cet élément n'est autre que l'image canonique de j dans $C(X)$. Or, si M est un espace fibré de base X et de groupe G_m , correspondant à une classe de diviseurs $m \in C(X)$, et si Δ est un diviseur de la classe m , il existe une section s de M (au sens fonctions) dont le "diviseur" est Δ ; de plus, cette section est unique, à la multiplication près par un élément de G_m (cela tient au fait que X est complète). En appliquant ce résultat à E_j , on voit qu'il existe une section $g_j: X \rightarrow E_j$ dont le diviseur est j lui-même. En prenant une base j_1, \dots, j_k de J sur \underline{Z} , on déduit de là l'existence d'une section $g: X \rightarrow E$ qui, pour tout j , donne g_j par composition avec $E \rightarrow E_j$; cette propriété caractérise g à une translation près par un élément de T . Mais une section de E correspond canoniquement à une fonction de X dans G relevant φ . La fonction g définit donc une fonction $f: X \rightarrow G$ déterminée à une translation près par un élément de T . Comme g est régulière en dehors de D , la restriction de f à $Y = X - D$ est un morphisme de Y dans G .

THÉOREME 1. - Le morphisme $f|_Y: Y \rightarrow G$ défini ci-dessus est universel pour la catégorie \mathcal{S} .

Nous désignerons par π la projection de G sur A , on a $\pi \circ f = \varphi$, par construction même de f .

Soit $k: Y \rightarrow G'$ un morphisme de Y dans un groupe G' de la catégorie \mathcal{S} ; le groupe G' est extension d'une variété abélienne A' par un tore T' . Si l'on compose $Y \rightarrow G' \rightarrow A'$, on trouve un morphisme $Y \rightarrow A'$, et comme A est la variété d'Albanese de Y , on peut factoriser en $Y \rightarrow A \rightarrow A'$; quitte à faire une translation, on peut supposer que $A \rightarrow A'$ est un homomorphisme de groupes. Soit alors G'_A l'extension de A par T' image réciproque de G' par l'homomorphisme $A \rightarrow A'$. Les morphismes $Y \rightarrow G'$ et $Y \rightarrow A$ définissent un morphisme $k_A: Y \rightarrow G'_A$, et l'on a un diagramme commutatif:

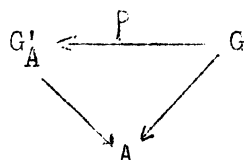


Tout revient à démontrer qu'il existe un homomorphisme unique ρ de G dans G'_A laissant commutatif le diagramme précédent.

Désignons par J' le groupe des caractères de T' ; à tout élément $j' \in \text{Hom}(T', G_m)$ est associée une extension $j'(G'_A)$ de A par G_m , et un morphisme $k(j')$ de Y dans cette extension. Si l'on considère $k(j')$ comme une fonction sur X , on peut parler du diviseur de cette fonction (car c'est localement une fonction à valeurs dans G_m), et ce diviseur est nécessairement une combinaison linéaire des D_i , c'est-à-dire un élément de I . On a donc obtenu un homomorphisme de J' dans I . En fait, cet homomorphisme applique J' dans J , car la classe du diviseur de $k(j')$ est image réciproque par ψ de la classe de diviseurs sur A associée à l'extension $j'(G'_A)$, et on sait que cette dernière appartient à P (cf. [4], loco citato). On a donc un homomorphisme

$$\lambda : J' \rightarrow J .$$

Par transposition, cet homomorphisme définit un homomorphisme $\mu : T \rightarrow T'$ d'où un homomorphisme $\mu_* : \text{ext}(A, T) \rightarrow \text{ext}(A, T')$. Cet homomorphisme μ_* transforme $G \in \text{ext}(A, T)$ en $G'_A \in \text{ext}(A, T')$: cela se voit en identifiant ces deux groupes à $\text{Hom}(J, P)$ et $\text{Hom}(J', P)$, respectivement. Il s'ensuit qu'il existe un homomorphisme $\rho : G \rightarrow G'_A$ qui coïncide avec μ sur T , et qui rend commutatif le diagramme



Il reste à comparer $\rho \circ f$ et k_A . Cela se fait en remarquant que ces morphismes définissent deux sections (fonctions) au-dessus de X d'un même espace fibré de groupe T' , et que ces deux sections ont même diviseur (pour tout $j' \in J'$) ; elles coïncident donc à la multiplication près par un élément de T' . Quitte à effectuer une translation sur ρ , on peut supposer que $\rho \circ f = k_A$. Enfin, si $\rho' \circ f = k_A$, ρ' étant un autre homomorphisme affine, ρ' doit appliquer T dans T' , et le raisonnement précédent, pris en sens inverse, montre qu'il coïncide

avec μ sur T ; on a alors nécessairement $\rho = \rho'$, ce qui achève de démontrer la propriété universelle de $f|Y$.

EXEMPLE. - Si X est une courbe, les D_i sont des points, et J est formé des combinaisons linéaires $\sum n_i D_i$, avec $\sum n_i = 0$; c'est un groupe libre de rang $r - 1$. Le groupe G construit ci-dessus est la jacobienne généralisée de X pour le module $\mathfrak{m} = \sum D_i$, (cf. [4], chapitre V, n° 17).

2. Images réciproques des différentielles invariantes sur G .

Rappelons d'abord la définition des formes de troisième espèce :

Soit α une forme différentielle de degré 1 sur X . On dit que α est de troisième espèce si, au voisinage de tout point $P \in X$, il est possible d'écrire α sous la forme

$$\alpha = \sum c_i df_i/f_i + \beta,$$

où les f_i sont des fonctions numériques, les c_i des constantes, et la forme β une forme régulière en P .

La décomposition ci-dessus n'est évidemment pas unique ; toutefois, on montre que le diviseur local (à coefficients dans K) $\sum c_i (f_i)$ est bien déterminé ; en faisant varier P , on obtient un diviseur sur X à coefficients dans K (c'est-à-dire un élément de $K \otimes D(X)$) ; on l'appelle le résidu de α , et on le note $\text{Res}(\alpha)$. Pour qu'une sous-variété irréductible Δ de X soit variété polaire de α , il faut et il suffit que le coefficient de Δ dans $\text{Res}(\alpha)$ soit non nul. En particulier, α est régulière sur X ("de première espèce") si et seulement si $\text{Res}(\alpha) = 0$.

Soit maintenant $\omega \in s_G$ une forme différentielle de degré 1 invariante sur le groupe G construit au n° 1. la restriction ω_T de ω à T est une forme invariante sur T , et l'on obtient ainsi toutes les formes invariantes sur T . D'autre part, T a pour groupe de caractères J , qui est un sous-groupe de I ; donc T est image du tore correspondant à I , tore qui n'est autre que $(G_m)^r$. L'image réciproque dans $(G_m)^r$ de ω_T sera notée $P\omega$; on peut l'écrire $P\omega = \sum c_i dx_i/x_i$, où les x_i désignent les coordonnées naturelles de $(G_m)^r$. On vérifie tout de suite que l'on obtient ainsi tous les systèmes (c_i) qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans K de systèmes $(n_i) \in J$; nous noterons KJ l'ensemble de ces systèmes. Avec ces notations, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Si ω est une forme différentielle invariante de degré 1 sur G , la forme $f^*\omega$ est une forme de troisième espèce sur X . De plus,

si $P\omega = \sum c_i dx_i/x_i$, on a $\text{Res}(f^* \omega) = \sum c_i D_i$.

COROLLAIRE. - Pour qu'un diviseur sur X à coefficients dans K soit résidu d'une différentielle de la forme $f^* \omega$, $\omega \in s_G$, il faut et il suffit qu'il appartienne à KJ.

On sait (exposé 10, démonstration du lemme 6) que f^* est une forme différentielle de troisième espèce. Il reste à calculer son résidu. Par linéarité, on peut supposer que ω est image réciproque d'une forme invariante π_j du groupe G_j déduit de G par $j : T \rightarrow G_m$, et que cette forme π_j induit sur $G_m \subset G_j$ la forme dx/x . On a donc $f^* \omega = f_j^*(\pi_j)$, en notant $f_j : X \rightarrow G_j$ la fonction canonique de X dans G_j . Si l'on se place au voisinage d'un point $P \in X$, on peut identifier G_j à un produit $U \times G_m$, U étant un ouvert de A (cf. la démonstration du lemme 6, exposé 10, citée plus haut), et la forme π_j s'écrit alors $\chi_j + dx/x$, où χ_j est image réciproque d'une forme régulière sur U . La fonction f_j peut être considérée comme un couple (ψ, h_j) , où $\psi : X \rightarrow A$ est l'application canonique de X dans sa variété d'Albanese, et où $h_j : X \rightarrow G_m$ est une fonction numérique. De plus, d'après la construction même de f , le diviseur de h_j est égal à j . Il s'ensuit que dh_j/h_j a pour résidu j , et comme dh_j/h_j est égal à $f_j^*(\pi_j)$ à une forme régulière près, cela démontre le théorème.

EXEMPLE. - Supposons que X soit une courbe de genre g ; les D_i ($i = 1, \dots, r$) sont des points $P_i \in X$. D'après le corollaire ci-dessus, un diviseur $\sum c_i P_i$ est résidu d'une différentielle $f^* \omega$ si et seulement si $\sum c_i = 0$, condition qui était de toutes façons nécessaire d'après la formule des résidus. Soit alors α une forme de troisième espèce sur X , régulière en dehors des P_i ; d'après ce qui précède, il existe $\omega_0 \in s_G$ telle que $\text{Res}(\alpha) = \text{Res}(f^* \omega_0)$; la forme $\alpha - f^* \omega_0$ est donc une forme de première espèce, donc provient de la variété d'Albanese (jacobienne) de X . On en conclut que α est de la forme $f^* \omega$, avec $\omega \in s_G$ (pour une autre démonstration, voir [4], p. 97).

Nous verrons au n° 3 que ce résultat s'étend aux variétés de dimension arbitraire, pourvu que la caractéristique du corps K soit zéro (il y a des contre-exemples d'IGUSA en caractéristique p , cf. [2]).

3. Le cas classique.

Nous supposons maintenant que le corps de base K est le corps \mathbb{C} des nombres complexes, la variété X est donc une variété kählérienne.

Si Δ est un diviseur sur X , nous noterons $h(\Delta)$ la classe de cohomologie entière de degré 2 qui lui est attachée (cf. par exemple [7], chapitre V). Si l'on note \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}^*) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. holomorphes non nulles) sur X , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

et si $\Delta \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, on a $h(\Delta) = \delta(\Delta) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, le cobord étant pris par rapport à la suite exacte précédente.

THÉORÈME 3. - Pour que Δ soit algébriquement équivalent à zéro, il faut et il suffit que $h(\Delta)$ soit nul.

(On dit qu'un diviseur est algébriquement équivalent à zéro si son image dans le groupe des classes de diviseurs appartient à la variété de Picard).

Vu la suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$, le théorème 3 revient à dire que l'image de $H^1(X, \mathcal{O})$ dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ n'est autre que la variété de Picard de X , résultat bien connu (voir par exemple [3]).

Soit $\varepsilon: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ l'homomorphisme induit par la multiplication par $2i\pi$ sur les coefficients. Nous noterons $c(\Delta)$ l'image de $h(\Delta)$ par ε . L'application c se prolonge par linéarité aux diviseurs à coefficients complexes.

THÉORÈME 4. (WEIL, [5]). - Soit $\Delta = \sum c_i D_i$ un diviseur à coefficients complexes. Pour qu'il existe une forme α de troisième espèce sur X telle que $\text{Res}(\alpha) = \Delta$, il faut et il suffit que $c(\Delta) = 0$.

Rappelons brièvement la démonstration. Soit Ω^1 le faisceau des germes de formes holomorphes sur X . On sait (théorème de Dolbeault) que $H^1(X, \Omega^1)$ s'identifie à la composante $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ de $H^2(X, \mathbb{C})$. D'autre part, l'homomorphisme de faisceaux défini par $f \rightarrow df/f$ envoie $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ dans $H^1(X, \Omega^1)$. On en déduit par composition un homomorphisme $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ qui coïncide avec l'homomorphisme c défini plus haut (cf. [7], loco citato). Dire que $c(\Delta) = 0$ revient donc à dire que l'image de Δ dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est nulle. Or, si l'on recouvre X par des ouverts U_λ et si sur chaque U_λ on représente Δ par $\sum c_i (f_i^\lambda)$, on pourra donc trouver des formes π_λ holomorphes sur U_λ , telles que

$$\sum c_i df_i^\lambda / f_i^\lambda - \sum c_i df_i^\mu / f_i^\mu = \pi_\lambda - \pi_\mu \quad \text{sur } U_\lambda \cap U_\mu.$$

Mais alors la forme

$$\alpha = \sum c_i df_i^\lambda / f_i^\lambda - \pi_\lambda = \sum c_i df_i^\mu / f_i^\mu - \pi_\mu$$

est une forme de troisième espèce (au sens analytique, donc aussi algébrique) admettant Δ pour résidu. Le même raisonnement, pris en sens inverse, montre que l'existence d'une telle forme implique la nullité de $c(\Delta)$.

COROLLAIRE 1. - Pour qu'il existe une forme de troisième espèce sur X admettant Δ pour résidu, il faut et il suffit que $\Delta \in KJ$ (les notations étant celles du n° 1).

En effet, le théorème 3 montre que J est l'ensemble des $\Delta = \sum n_i D_i$ tels que $h(\Delta) = 0$, donc KJ est l'ensemble des Δ tels que $c(\Delta) = 0$.

COROLLAIRE 2. - Toute forme de troisième espèce sur X qui est régulière sur Y est de la forme $f^* \omega$, avec $\omega \in s_G$.

Soit α une telle forme. D'après le corollaire au théorème 2 et le corollaire 1 au théorème 4, il existe $\omega_0 \in s_G$ telle que $\text{Res}(\alpha) = \text{Res}(\omega_0)$. La forme $\alpha - \omega_0$ est donc partout régulière, et l'on sait qu'une telle forme est image réciproque d'un élément de s_A , donc aussi d'un élément de s_G . D'où le résultat.

COROLLAIRE 3. - Toute forme de troisième espèce sur X est fermée.

En effet, il en est ainsi des formes $f^* \omega$, avec $\omega \in s_G$.

REMARQUE. - Les corollaires ci-dessus s'énoncent de façon purement algébrique. Comme ils sont vrais sur le corps \mathbb{C} , le "principe de Lefschetz" montre qu'ils sont vrais sur tout corps algébriquement clos de caractéristique 0. En caractéristique p , les corollaires 1 et 2 peuvent être en défaut, comme on l'a signalé plus haut ; j'ignore ce qu'il en est du corollaire 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROTHENDIECK (Alexander). - Généralités sur les groupes algébriques affines, Groupes algébriques affines commutatifs, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956/57 : Classification des groupes de Lie algébriques, exposé n° 4.
- [2] IGUSA (Jun-Ichi). - On some problems in abstract algebraic geometry, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 41, 1955, p. 964-967.
- [3] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1953, p. 868-877.
- [4] SERPE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1264 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 7).
- [5] WEIL (André). - Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comment. math. Helvet., t. 20, 1947, p. 110-116.

- [6] WEIL (André). - Variétés abéliennes, Algèbre et Théorie des nombres [1949. Paris] ; p. 124-127. - Paris, Centre National de la Recherche scientifique, 1950 (Colloques **intern.** C. N. R. S., 24).
- [7] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et Ind., 1267 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 6).
- [8] ZARISKI (Oscar). - Algebraic surfaces. - New York, Chelsea publishing Company, 1948 (Ergebnisse der Mathematik, Band 3, Heft 5).
-