Séminaire Claude Chevalley

Pierre Gabriel

Le théorème de Serre

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A2_0>

LE THÉORÈME DE SERRE

par Pierre GABRIEL

A. Ensembles algébriques affines et foncteurs classiques.

1. Espaces topologiques annelés.

A partir de maintenant, et sauf mention du contraire, les anneaux considérés seront supposés commutatifs, à élément unité et noethériens. On appelle espace topologique annelé $(V, \mathfrak{A})$ un espace topologique V muni de la structure définie par la donnée d'un faisceau d'anneaux $\mathfrak{A}$. Si $(V, \mathfrak{A})$ et $(W, \mathfrak{B})$ sont deux espaces topologiques annelés, on appelle morphisme du premier dans le second la donnée :

a. d'une application continue $\varphi : V \to W$.

b. pour tout ouvert U de W, d'un homomorphisme d'anneaux

$$\varphi_U : \mathfrak{B}(U) \to \mathfrak{A}(\varphi^{-1}(U)) ,$$

compatible avec les opérations de restriction.

Le composé de deux morphismes est défini de façon évidente et on parlera de la catégorie des espaces topologiques annelés. Dans la suite V sera presque toujours un espace de Zariski. A un tel V on a l'habitude d'associer un espace topologique $S(V)$, qui est le schéma de V et qui est défini de la manière suivante :

Les points de $S(V)$ sont les fermés irréductibles de V.

Les fermés de $S(V)$ sont les ensembles $\mathfrak{F}$, où F est un fermé de V et où $\mathfrak{F}$ désigne l'ensemble des fermés irréductibles de V contenus dans F.

Il est alors clair que la correspondance $F \to \mathfrak{F}$ entre fermés de V et de $S(V)$ est biunivoque, que $S(V)$ est un espace de Zariski et que tout fermé irréductible de $S(V)$ est l'adhérence d'un point unique. A tout faisceau sur V est associé de manière canonique un faisceau sur $S(V)$. En particulier si $(V, \mathfrak{A})$ est un espace topologique annelé, et si V est un espace de Zariski on notera par $(S(V), S(\mathfrak{A}))$, et on appellera schéma de $(V, \mathfrak{A})$, l'espace topologique annelé formé par $S(V)$ et le faisceau d'anneaux associé à $\mathfrak{A}$. Bien entendu le schéma de $(S(V)\ ,\ S(\mathcal{O}))$ est isomorphe à $(S(V)\ ,\ S(\mathcal{O}))$.

Si A est un anneau de Jacobson noethérien et $(\Omega(A)\ ,\ \tilde{\mathcal{O}})$ l'espace topologique annelé défini par son spectre maximal, le schéma associé n'est autre que $(V(A)\ ,\ \tilde{\mathcal{O}})$ (voir l'exposé n° 1). Si $(V\ ,\ \mathcal{O})$ est un ensemble algébrique muni du faisceau des germes de fonctions régulières, le schéma associé a été défini par CHEVALLEY dans [3], et [4]. Dans ce cas V est le sous-espace de $S(V)$ formé par les points fermés et $\mathcal{O}$ est la restriction de $S(\mathcal{O})$ à V . Dorénavant nous nous bornerons presque toujours au cas des ensembles algébriques sur un corps algébriquement clos.

2. Faisceaux d'idéaux d'un ensemble algébrique.

Si V est un ensemble algébrique et $\mathcal{O}$ son faisceau des germes de fonctions régulières, la notion de faisceau quasi-cohérent, resp. cohérent, généralise la notion de module, resp. de module de type fini sur l'anneau des coordonnées d'un ensemble algébrique affine. On généralise de même la notion de support et de dimension : Ainsi si F est un faisceau algébrique cohérent sur V , son <u>support</u> est l'ensemble des points x de V où la fibre F_x de F n'est pas nulle (si la fibre de F est nulle en x , elle est nulle dans un voisinage de x , car F est cohérent, et le support est donc fermé). On appellera alors <u>dimension de</u> F la dimension de son support. Lorsque V est affine et que le faisceau cohérent F est associé au module de type fini M , alors le support de F est formé de l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau des coordonnées qui contiennent l'annulateur de M .

La notion d'idéal se généralise de la manière suivante : On appelle <u>faisceau d'idéaux</u> de $(V\ ,\ \mathcal{O})$ tout sous-faisceau quasi-cohérent (et donc cohérent) de $\mathcal{O}$ On retrouve alors l'éternelle correspondance entre idéaux et fermés :

Si I est un faisceau d'idéaux, on lui associe le fermé $W(I)$ de V suivant :

$x \in W(I)$ si et seulement si I_x , fibre de I en x , est un idéal propre de $\mathcal{O}_x$ (i.e. $I_x \neq \mathcal{O}_x$), ou encore si et seulement si les germes de fonctions définis par I en x sont nuls. $W(I)$ est donc le support de $\mathcal{O}|I$.

Réciproquement si W est un fermé de W on lui associe le faisceau d'idéaux $I(W)$ suivant :

Les sections de $I(W)$ sur un ouvert U sont les fonctions régulières définies sur U et qui s'annulent sur $U \cap W$. Si $I(U\ ,\ x)$ désigne l'image réciproque dans $\mathcal{O}(U)$ de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$, alors $\Gamma(U\ ,\ I(W))$ est l'intersection des $I(U, x)$ quand x parcourt $U \cap W$. Si U est un ouvert affine le faisceau d'idéaux $I(W)|U$ n'est autre que le faisceau associé à l'idéal $\Gamma(U, I(W))$ de $\mathcal{O}(U)$ ce qui montre que $I(W)$ est cohérent.

PROPOSITION 1.

a. L'application $W \rightarrow I(W)$ établit une correspondance biunivoque entre les fermés de V et les faisceaux d'idéaux I satisfaisant à la condition suivante : pour tout $x \in V$, I_x est soit égal à $\mathcal{O}_x$, soit intersection d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_x$.

b. L'application $W \rightarrow I(W)$ associe les fermés dont toutes les composantes connexes sont irréductibles aux faisceaux d'idéaux premiers (pour tout x, I_x est soit égal à $\mathcal{O}_x$, soit un idéal premier).

(a) il suffit de faire la démonstration dans le cas où $(V, \mathcal{O})$ est un ensemble algébrique affine. Soit alors $A = \mathcal{O}(V)$ et $\mathfrak{a} = \Gamma(V, I(W))$. On a déjà vu qu'alors $\mathfrak{a}$ est intersection des idéaux premiers $I(V, x)$ quand x parcourt W. Ainsi $\mathfrak{a}$ est une intersection d'idéaux premiers. Comme la correspondance entre intersections d'idéaux premiers de A et fermés de V est biunivoque, il en va de même de la correspondance entre idéaux de A et faisceaux d'idéaux de $(V, \mathcal{O})$; il reste à montrer que réciproquement le faisceau associé à une intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{a}$ satisfait aux conditions de la proposition : ceci résulte des propriétés de conservation de la décomposition primaire par localisation.

(b) le raisonnement est analogue.

3. Anneau des fonctions rationnelles d'un ensemble algébrique.

On rappelle que si V est un ensemble algébrique, on appelle fonction rationnelle sur V une application régulière f d'un ouvert partout dense de V dans le corps des constantes K. On suppose en outre que le domaine de définition de f ne peut pas être prolongé. Les fonctions rationnelles sur V forment une algèbre $K(V)$ sur K. Si on note par V_i les composantes irréductibles de V alors $K(V)$ est isomorphe au produit $\prod_i K(V_i)$, l'isomorphisme étant évident. Enfin si V est irréductible, et si U est un ouvert affine de V, $K(V)$ n'est autre que le corps des fractions de l'anneau des coordonnées de U.

Le faisceau $\mathfrak{K}(V)$ des fonctions rationnelles sur V est alors défini de la manière suivante : à tout ouvert U de V on associe l'anneau $K(U)$ des fonctions rationnelles sur U , les restrictions étant évidentes. Il est clair qu'on définit de cette manière un faisceau quasi-cohérent sur V . En outre si on note par V_i les composantes irréductibles de V , $K(U)$ n'est autre que le produit $\prod_{V_i \cap U \neq \emptyset} K(V_i)$. Il en résulte que le faisceau $\mathcal{K}(V)$ est obtenu de la manière suivante : soit $\mathcal{K}_i$ le faisceau sur V qui est nul en dehors de V_i , qui est constant et de fibre $K(V_i)$ sur V_I. Alors $\mathcal{K}(V)$ est le produit des faisceaux $\mathcal{K}_i$.

4. Caractérisation des ensembles algébriques affines.

Soit $(V , \mathcal{O})$ un ensemble algébrique muni de son faisceau d'anneaux, et soit $A = \Gamma(V , \mathcal{O})$ l'anneau des coordonnées de V . On sait qu'on a alors un morphisme canonique de $(V , \mathcal{O}) \rightarrow (S(V) , S(\mathcal{O}))$ et $(V , \mathcal{O})$ est affine si et seulement si $(S(V) , S(\mathcal{O}))$ est le spectre premier d'une algèbre sur K , de type fini et sans éléments nilpotents.

Nous allons maintenant définir un morphisme $(S(V) , S(\mathcal{O})) \rightarrow (V(A) , \mathcal{SU})$. Pour cela soit x un élément quelconque de $S(V)$ et $S(\mathcal{O})_x$ la fibre de $S(\mathcal{O})$ en x : c'est un anneau local et on a un homomorphisme de restriction : $A \rightarrow S(\mathcal{O})_x$. Nous noterons $\mathfrak{p}_x$ l'idéal premier de A , image réciproque par cet homomorphisme, de l'idéal maximal de $S(\mathcal{O})_x$. C'est l'idéal des fonctions de V qui sont nulles sur le fermé x .

L'application $\varphi : x \rightarrow \mathfrak{p}_x$ est une application continue de $S(V)$ dans $V(A)$. Il suffit en effet de montrer que l'image réciproque d'un ouvert spécial U_f de $V(A)$ est un ouvert de $S(V)$. Mais $\varphi^{-1}(U_f)$ est formé des points x de $S(V)$ tels que l'image f_x de f dans $\mathcal{O}_x$ soit inversible et si f_x est inversible en x , f_y est inversible pour y voisin de x

C. Q. F. D.

Il résulte de ce qui précède que $\frac{1}{f}$ est une section de $S(\mathcal{O})$ sur $\varphi^{-1}(U_f)$ et ainsi l'application canonique de A dans $\Gamma(\varphi^{-1}(U_f) , S(\mathcal{O}))$ se prolonge en un homomorphisme :

$$\varphi_{U_f} : A_f \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U_f) , S(\mathcal{O}))$$

Les φ_{U_f} sont compatibles avec les opérations de restriction, et, par "passage à la limite inductive", ils définissent un morphisme d'espaces topologiques annelés :

$$\varphi : (S(V)\ ,\ S(\mathcal{O})) \to (V(A)\ ,\ \mathcal{O})$$

Il est clair que φ est un isomorphisme si et seulement si $(V\ ,\ \mathcal{O})$ est un ensemble algébrique affine. Le théorème suivant étudie ce cas :

THÉORÈME (SERRE). - *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

a. $(V\ ,\ \mathcal{O})$ *est un ensemble algébrique affine.*

b. *Si* $0 \to F \to G \to H \to 0$ *est une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents, alors les sections sur* V *forment une suite exacte.*

c. *Si* $0 \to F \to G \to H \to 0$ *est une suite exacte de faisceaux cohérents, alors les sections sur* V *forment une suite exacte.*

d. *Il existe des sections* f_i *de* $\mathcal{O}$ *sur* V *telles que* :

- *l'idéal engendré par les* f_i *est égal à* A ,

- *les ouverts* V_{f_i} *de* V , *où les* f_i *ne s'annulent pas, sont des ouverts affines et ils recouvrent* V .

Reste à démontrer que (c) $\Rightarrow$ (d) et (d) $\Rightarrow$ (a). (c) $\Rightarrow$ (d) :

LEMME 1. - *Si* F *est un faisceau cohérent non nul, alors* $\Gamma(V\ ,\ F)$ *n'est pas nul.*

En effet le support de F contient un point fermé, soit x .

La fibre F_x de F n'est pas nulle en x , et, si $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$, $F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ n'est pas nul (lemme de Nakayama). Le faisceau G qui est nul en dehors de x et qui "vaut" $F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ en x est alors cohérent et on a manifestement une surjection :

$$F \to G \to 0$$

Il en résulte un épimorphisme de $\Gamma(V\ ,\ F)$ sur $\Gamma(V\ ,\ G) = F_x | \mathfrak{m}_x F_x$ et $\Gamma(V\ ,\ F)$ n'est pas nul.

Ceci étant démontré, soit f une section de $\mathcal{O}$ sur V (fonction régulière sur V). Si U est un ouvert quelconque de V nous noterons U_f l'ensemble des points de U où f ne s'annule pas. L'existence du recouvrement (U_{f_i}) sera une conséquence du

LEMME 2. - Si x est un point quelconque de V et U un ouvert affine de V contenant x, il existe une fonction régulière f sur V telle que $V_f = U_f$ et que V_f contienne x.

En effet, soient W le complémentaire de U dans V, $I(W)$ et $I(W, x)$ les faisceaux des germes de fonctions qui s'annulent sur W, respectivement sur W et x. On a alors une suite exacte :

$$0 \to I(W, x) \to I(W) \to I(W)|I(W, x) \to 0$$

et le faisceau $I(W)|I(W, x)$ n'est manifestement pas nul. Il existe donc une section f de $I(W)$ qui n'appartient pas à $\Gamma(I(W, x))$: elle résoud le problème.

Le lemme 2 et la quasi-compacité de V entraînent l'existence d'un recouvrement affine de V par un nombre fini de V_{f_i}. Reste à montrer que l'idéal engendré par les f_i est A. Mais si U est un ouvert affine, les U_{f_i} recouvrent U et il en résulte que les restrictions des f_i à $\mathcal{O}(U)$ engendrent l'idéal unité. Autrement dit s'il y a p sections f_i et si $\mathcal{O}^p$ désigne la somme directe de p faisceaux isomorphes à $\mathcal{O}$, le morphisme de $\mathcal{O}^p$ dans $\mathcal{O}$ défini par les f_i est surjectif. Il en va donc de même pour le morphisme de $A^p \to A$ défini par les f_i. (d) $\Rightarrow$ (a) : nous allons montrer que le morphisme

$$\varphi : (S(V), S(\mathcal{O})) \to (V(A), \mathcal{A})$$

est un isomorphisme et que A est une algèbre de type fini et sans éléments nilpotents.

Remarquons d'abord que si $f \in A$ est une fonction régulière de V, l'anneau des coordonnées de V_f n'est autre que A_f. En effet si A_i désigne l'anneau des coordonnées de V_{f_i}, $A_{ij} = A_{if_j} = A_{jf_i}$ celui de $V_{f_i} \cap V_{f_j} = V_{f_i . f_j}$, on a la fameuse suite exacte (voir l'exposé n° 1) :

$$0 \to A \to \prod_i A_i \to \prod_{i \neq j} A_{ij}$$

D'où l'on déduit (le foncteur $M \Rightarrow M_f$ est exact) :

$$0 \to A_f \to \prod_i (A_i)_f \to \prod (A_{ij})_f$$

Mais les $(A_i)_f$ et $(A_{ij})_f$ sont évidemment les anneaux de coordonnées de

$V_{f_i} \cap V_f$ et $V_{f_i} \cap V_{f_j} \cap V_f$: A_f est donc l'anneau des coordonnées de V_f.

On en déduit que l'application $S(V) \to V(A)$ est injective et qu'elle induit un isomorphisme

$$(S(V_{f_i}),\ \mathcal{O}|S(V_{f_i})) \to (V(A)_{f_i}\ \mathcal{O}|V(A)_{f_i})$$

D'autre part les $V(A)_{f_i}$ recouvrent $V(A)$, car les f_i engendrent l'unité. Par recollement des morceaux on obtient donc un isomorphisme

$$(S(V),\ S(\mathcal{O})) \to (V(A),\ \mathcal{O})$$

et il reste à montrer que A est de type fini et sans éléments nilpotents.

Mais A est une algèbre de fonctions et n'a pas d'éléments nilpotents. D'autre part, pour tout i, soit a_{i_k} un nombre fini d'éléments de A tels que les images de f_i et a_{i_k} dans A_{f_i} engendrent l'anneau A_{f_i}. Soit enfin $a_i \in A$ tels que $\sum a_i f_i = 1$ dans A. On va prouver que les f_i, a_{i_k}, a_i engendrent l'anneau A :

En effet, en élevant la formule $\sum a_i f_i = 1$ à une puissance suffisante on obtient des formules $\sum a_i(m) f_i^m = 1$, où les $a_i(m)$ s'expriment à l'aide des a_i et des f_i. Si maintenant x un élément de A, son image dans A_{f_i}, peut s'écrire x_i / f_i^p, pour p assez grand. Il en résulte (voir exposé n° 1) que, pour n assez grand, on a :

$$x = \sum_i a_i(n+p)\, x_i\, f_i^n ,$$ ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. - Si V est un ensemble algébrique affine, U un ouvert de V, A l'anneau des coordonnées de V, $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des coordonnées de U, on a les équivalences :

a. U est un ouvert affine

b. si M est un A-module, l'homomorphisme canonique

$$M \otimes_A \mathcal{O}(U) \to \mathcal{M}(U)$$

est bijectif.

<u>En outre si l'une de ces propositions équivalentes est satisfaite, alors $\mathcal{O}(U)$ est A-plat.</u>

(a) $\Rightarrow$ (b) : En effet, le foncteur $M \Rightarrow \mathcal{M}(U)$ est alors exact à droite, lorsque M parcourt les A-modules. En particulier si

$$L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

est une résolution de M par des A-modules libres, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
L_1 \otimes_A \mathcal{O}(U) & \to & L_0 \otimes_A \mathcal{O}(U) & \to & M \otimes_A \mathcal{O}(U) & \to & 0 \\
\downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u & & \\
\mathcal{L}_1(U) & \to & \mathcal{L}_0(U) & \to & \mathcal{M}(U) & \to & 0
\end{array}$$

Comme v et w sont des isomorphismes, u en est un. (b) $\Rightarrow$ (a) : On va montrer que si

$$0 \to F' \to G' \to H' \to 0$$

forme une suite exacte de faisceaux cohérents de U, alors les sections sur U forment une suite exacte.

Or il existe une suite exacte

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

de faisceaux cohérents de V tels que $F|U = F'$, $G|U = G'$, $H|U = H'$ (voir [1], la démonstration est reprise en appendice [2]). Si M, N et P sont alors les modules associés à F, G et H, la suite

$$M \otimes_A \mathcal{O}(U) \to N \otimes_A \mathcal{O}(U) \to P \otimes_A \mathcal{O}(U) \to 0$$

est exacte, ce qui montre que l'homomorphisme

$$G'(U) = N \otimes_A \mathcal{O}(U) \to H'(U) = P \otimes_A \mathcal{O}(U)$$

est surjectif,

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). - Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, n° 2.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, n° 2.

[3] Séminaire CARTAN-CHEVALLEY : Géométrie algébrique, t. 8, 1955/56.

[4] Séminaire CHEVALLEY : Classification des groupes de Lie algébrique, t. 1, 1958.