MICHEL LEDUC

Jauges. Différentiables et partitions de l'unité

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A11_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 12, 10 p. 6 mai, 10 et 17 juin 1965

JAUGES DIFFÉRENTIABLES ET PARTITIONS DE L'UNITÉ

par Michel LEDUC

Cette étude est faite dans le cadre des variétés banachiques, avec la notion usuelle de différentiabilité (différentiabilité forte).

Le but de l'exposé est, après rappel de certains résultats sur les normes différentiables, d'étendre les théorèmes de partition énoncés par S. LANG ([6], p. 25 à 30) pour des espaces de Hilbert séparables, à des variétés dont le modèle pourrait ne pas admettre de norme différentiable.

1. Enoncé d'un théorème des fonctions implicites.

Soient E_1, E_2 et F de Banach, $k \in \mathbb{N}$, Ω un ouvert de $E_1 \times E_2$, $a \in \Omega$, et soit $f \in \mathcal{C}^k(\Omega , F)$ (resp. k fois différentiable en a, si $k > 1$).

Si $D_2 f(a)$ est un isomorphisme de E_2 sur F, alors il existe $V = V_1 \times V_2$, voisinage ouvert de a, tel que

$$f(V) \text{ est ouvert}$$

et

$$\{(x , y) \in E_1 \times E_2 \times F ;\ x \in V \text{ et } y = f(x)\}$$

est le graphe dans $(E_1 \times F) \times E_2$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^k(V_1 \times f(V) , V_2)$ (resp. k fois différentiable en $(a_1 , f(a))$).

Autrement dit, $x \in V$ et $y = f(x) \iff x_2 = \varphi(x_1 , y)$.

Remarques.

(a) A l'ordre zéro, les données étant les mêmes (il suffit du reste de vérifier la continuité de f relativement à x_2), si $D_2 f$ existe, et est continue en a, alors φ existe, et est continue en $(a_1 , f(a))$.

(b) Autre énoncé : Soient E et F de Banach, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^k(\Omega , F)$. Si $f'(a)$ est surjective et $\operatorname{Ker} f'(a)$ est direct (1), alors on peut énoncer le théorème précédent avec $E_1 = \operatorname{Ker} f'(a)$ et pour E_2 n'importe quel supplémentaire de E_1.

---

(1) admet un supplémentaire topologique.

2. Quelques résultats sur les normes différentiables (dans le complémentaire de l'origine, bien sûr).

THÉORÈME 1. - Si la norme d'un espace de Banach est différentiable dans le complémentaire de l'origine, alors elle est de classe C^1 .

Ce résultat a été annoncé par G. RESTREPO [8].

THÉORÈME 2. - Si une norme est de classe C^k , alors il existe une fonction numérique de classe C^k , non nulle et à support borné.

Théorème facile et bien connu ; mais on ignore si la réciproque est vraie.

G. CHOQUET a fait remarquer que, les normes étant des fonctions lipschitziennes, la réciproque est improbable si on ne suppose pas la fonction lipschitzienne, c'est-à-dire de dérivée bornée.

THÉORÈME 3. - Si une norme est différentiable en un point x , alors (2) la sphère qui contient x admet l'hyperplan tangent en ce point comme unique hyperplan d'appui.

En effet, il en est ainsi, en coupe par tout plan contenant x (propriété des convexes plans). Notons du reste qu'une différentiabilité "plus faible" suffirait, et que l'existence d'un hyperplan d'appui unique n'implique donc pas la différentiabilité.

E étant de Banach, soient S sa sphère unité et $\tilde{E}$ l'espace quotient $E'/\underset{\sim}{R}^+$ des demi-droites de son dual.

THÉORÈME 4. - Si ν est une norme différentiable, alors $\mathrm{Im}(\nu')$ est dense dans $\tilde{E}$.

Ce résultat est une conséquence de la propriété suivante, démontrée par BISHOP [1] et PHELPS [7] :

L'image de $\{\xi \in E' \ ; \ \exists\, x \in S \ : \ \xi(x) = \|\xi\|\}$ est dense dans $\tilde{E}$.

En effet, d'après le théorème 3, $\forall\, \xi \in E' - \{0\}$ si $x \in S$ et $\xi(x) = \|\xi\|$, alors $\exists\, t \in \underset{\sim}{R}^+ \ : \ \xi = t\nu'(x)$.

---

(2) alors elle l'est, et avec une différentielle constante, sur la demi-droite contenant ce point (propriété des fonctions homogènes).

THÉORÈME 5. - Soit ν une norme différentiable, alors

$$\mathrm{Im}(\nu') = \tilde{E} \iff E \text{ réflexif}.$$

Ce résultat est une conséquence de la propriété suivante démontrée par R. C. JAMES [5] :

Soit $A \subset E$, E e. l. c. complet, si $\forall\ \xi \in E'$, $\exists\ x \in A$

$$|\xi(x)| = \sup_{u \in A} |\xi(u)| ,$$

alors A est faiblement relativement compact.

En effet

$$E \text{ reflexif} \iff S \text{ faiblement relativement compacte}$$

équivaut alors à

$$E' = \{\xi \in E' \ ; \ \exists\ x \in S : \quad \xi(x) = \|\xi\|\} .$$

Enfin :

THÉORÈME 6. - Soit E de Banach séparable, alors

$$E' \text{ séparable} \iff E \text{ admet une forme différentiable.}$$

Ce résultat a été annoncé par G. RESTREPO [8].

On trouvera de nombreuses propriétés des normes différentiables dans plusieurs travaux de V. L. ŠMULIAN [9], et dans un article plus récent de D. F. CUDIA [4] où le problème est complètement reformulé.

3. Construction d'une norme de classe C_∞ sur c_0 .

Cette construction répond à une question de E. NELSON (Cf. [2]), l'idée en revient principalement à A. DOUADY.

LEMME 7. - Il existe $\varphi \in C^\infty(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{R})$ convexe et paire avec

$$\varphi|_{[-1,1]} = 0 \ \text{ et } \ \varphi(2) = 1 .$$

En effet, on sait que $t \in \underset{\sim}{R} \to e^{-1/t^2} \in]0, 1[$ est de classe C^∞ avec dérivées de tous ordres, nulles à l'origine ; on en déduit une fonction croissante $\psi \in C^\infty(\underset{\sim}{R}^+, \underset{\sim}{R})$ avec

$$\psi|_{[0,1]} = 0 \quad \text{et} \quad \psi|_{[2,\infty)} = 1 .$$

Prendre pour φ la symétrisée de la primitive de ψ s'annulant à l'origine.

On rappelle que $c_0 = \{x \in \underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}} \; ; \; 0 = \lim_{n\,\infty} x_n\}$ est un espace de Banach pour $\|x\| = \max_{n \in \underset{\sim}{N}} |x_n|$, non réflexif, car ℓ^1 est son dual.

Considérons alors

$$f \; : \; x \in c_0 \longrightarrow \sum_n \varphi(x_n) \in [0 , \infty[\; ;$$

$\forall \; x \in c_0$, $X = \{n \in \underset{\sim}{N} \; ; \; |x_n| > 1/2\}$ est fini, et si $\|y - x\| < 1/2$, alors

$$f(y) = \sum_{n \in X} \varphi(y_n) \; .$$

La restriction de f à la boule de centre x et de rayon $1/2$, composée de la projection associée à X qui est linéaire contimme, par une somme finie de fonctions indéfiniment dérivables, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

D'autre part, $f^{-1}([0 , 1])$ est immédiatement convexe, symétrique, et compris entre les boules de centre l'origine et de rayons 1 et 2 ; enfin l'intersection de toute demi-droite par $f^{-1}(1)$ est un point.

Finalement la jauge ν du voisinage $f^{-1}([0 , 1])$ de l'origine est solution en t de l'équation implicite $f(x/t) = 1$, or $\frac{\partial f}{\partial t}(x/\nu(x)) < 0$.

ν est donc une norme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $c_0 - \{0\}$.

4. THÉORÈME 8. - Soit E de Banach, si il existe $f \in \mathcal{C}^k(E , \underset{\sim}{R}) - \{0\}$ à support borné, alors la jauge d'un des voisinages bornés équilibrés de l'origine est de classe $\mathcal{C}^k$.

En effet, on peut supposer $0 \leqslant f \leqslant 1$, en considérant éventuellement $1 - e^{-f^2}$, et $f(0) > 0$ après une éventuelle translation.

Soient

$$a = \sup\{r \in \underset{\sim}{R}^+ \; ; \; \|x\| \leqslant r \implies f(x) \geqslant \frac{f(0)}{2}\} > 0$$

$$b = \inf\{r \in \underset{\sim}{R}^+ \; ; \; \|x\| \geqslant r \implies f(x) = 0\} < \infty \; ;$$

posons

$$\gamma(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(tx)\, dt} \qquad \text{si } x \neq 0 \, ,$$

γ est symétrique et positivement homogène.

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(tx)\ dt = \int_{-b/\|x\|}^{b/\|x\|} f(tx)\ dt \leqslant \frac{2b}{\|x\|}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(tx)\ dt \geqslant \int_{-a/\|x\|}^{a/\|x\|} \frac{f(0)}{2}\ dt = \frac{af(0)}{\|x\|}\ ,$$

donc la jauge γ est équivalente à la norme.

Enfin, f étant de classe $\mathcal{C}^k$, elle est k fois uniformément différentiable sur le segment $[-2b\frac{x}{\|x\|}, 2b\frac{x}{\|x\|}]$ compact, il en résulte que $\forall\ x \neq 0$, γ est de classe $\mathcal{C}^k$ en x, avec :

$$\gamma^2(x).\gamma'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} tf'(tx)\ dt\ .$$

En effet, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \rho > 0$: $\forall\ t \in [-\frac{2b}{\|x\|}, \frac{2b}{\|x\|}]$

$$\|u - tx\| \leqslant \rho \implies |f(u) - f(tx) - f'(tx).(u - tx)| \leqslant \varepsilon\|u - tx\|$$

alors, si $\|y - x\| \leqslant \inf\{\frac{\|x\|}{2}, \frac{\|x\|.\rho}{2b}\}$,

$$\begin{aligned}\Delta &= \left|1/\gamma(y) - 1/\gamma(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} tf'(tx).(y - x)\ dt\right|\\ &= \left|\int_{-2b/\|x\|}^{2b/\|x\|} [f(ty) - f(tx) - tf'(tx).(y - x)]\ dt\right|\\ &\leqslant \int_{-2b/\|x\|}^{2b/\|x\|} \varepsilon\|ty - tx\|\\ &= \|y - x\|.\varepsilon\left(\frac{2b}{\|x\|}\right)^2\ .\end{aligned}$$

Cette construction constitue une réponse partielle à la question soulevée dans le théorème 1 ; mais l'obtention d'une norme, c'est-à-dire d'une jauge sous-additive, ne semble pas immédiate ; en particulier, la norme, associée à l'enveloppe convexe du voisinage borné équilibré de l'énoncé, peut n'être même pas différentiable [3].

---

[3] on rencontre cette situation dans l'espace de Hilbert séparable ℓ^2 ; mais sa description précise est trop longue pour figurer ici.

Dans cet ordre d'idées, R. BONIC et J. FRAMPTON ont annoncé [2] le résultat suivant :

Soit D un domaine borné de ℓ^p , avec $p \notin 2\mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^n(D , \mathbb{R})$ où $n \geqslant p$, alors $f(\overline{D}) \subset \overline{f(\partial D)}$.

Ainsi, il n'existe pas dans ℓ^p de fonction à support borné de classe supérieure à p , si $p \notin 2\mathbb{N}$; mais d'autre part on sait que

$$\| \|_p \in \mathcal{C}^k(\ell^p - \{0\} , \mathbb{R}^+) \text{ où } k = \sup\{n \in \mathbb{N} ; \quad n < p\} .$$

5. LEMME 9.

Ce lemme généralise une construction utilisée par J. DIEUDONNÉ pour prouver la paracompacité des espaces métriques séparables.

Soient E un espace topologique, $V(x , r)$ une famille d'ouverts de E , indexée par $E \times \mathbb{R}$ et telle que

$$\forall\, r > 0 , \quad x \in V(x , r)$$

$$\forall\, \rho < r , \quad \overline{V(x , \rho)} \subset V(x , r)$$

$$V(x , r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(x , r - (1/n)) .$$

Alors, étant donnée une suite $((x_n , r_n)) \in (E \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, posons $B_n = V(x_n , r_n)$ $V_1 = B_1$, et définissons par récurrence

$$V_n = B_n - \bigcup_{\ell=1}^{n-1} \overline{V(x_\ell , r_\ell - (1/n))} .$$

Il est trivial que V_n est ouvert, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n \subset B_n$; d'autre part :

(1) $\cup V_n = \cup B_n$, car $\forall\, x \in \cup B_n$, soit $p = \inf\{n \in \mathbb{N} ; \quad x \in B_n\}$, $\forall\, \ell < p$, $x \notin B_\ell$, donc

$$x \notin \bigcup_{\ell=1}^{p-1} \overline{V(x_\ell , r_\ell - (1/p))}$$

et comme $x \in B_p$, il vient $x \in V_p$.

(2) (V_n) est localement fini, car $\forall\, x \in \cup B_n$, $\exists\, \ell \in \mathbb{N} :$ $x \in B_\ell$, donc $\exists\, p \in \mathbb{N}$:

$$x \in V(x_\ell , r_\ell - (1/p))$$

or $\forall\, n \geqslant p$, le voisinage de x , $V(x_\ell , r_\ell - (1/p))$ est inclus dans $\overline{V(x_\ell , r_\ell - (1/n))}$, donc disjoint de V_n .

Cas particulier. - En particulier, soit g une fonction numérique sur $E \times E$ continue par rapport à y (pour tout x), avec $\forall x \in E$, $g(x, x) \leqslant 0$. On peut poser

$$V(x, r) = \{y \in E ; \; g(x, y) < r\} .$$

6. Condition suffisante de $\mathcal{C}^k$-normalité.

(1) Soit E un espace vectoriel normé admettant un voisinage borné équilibré de l'origine, dont la jauge γ est de classe $\mathcal{C}^k$.

$\forall (x, r) \in E \times \mathbb{R}$, notons $V(x, r)$ la pseudo-boule $\{y \in E ; \; \gamma(y - x) < r\}$; on obtient facilement en composant γ par des fonctions numériques de variable réelle convenables (cf. lemme 7),

$$\varphi \in \mathcal{C}^k(E, [0, 1]) \text{ telle que } y \in V(x, r) \iff \varphi(y) > 0 ,$$

$$\psi \in \mathcal{C}^k(E, [0, 1]) \text{ telle que } y \in \overline{V(x, r)} \iff \psi(y) = 1 .$$

Alors, étant donnée une suite de pseudo-boules B_n, désignons par φ_n et $\psi_{n,\ell}$ respectivement les fonctions associées à $V(x_n, r_n)$ et $V(x_\ell, r_\ell - (1/n))$; il vient, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x \in V_n \iff \varphi_n(x) \prod_{\ell=1}^{n-1} [1 - \psi_{n,\ell}(x)] > 0 ,$$

et par suite, la somme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \prod_{\ell=1}^{n-1} [1 - \psi_{n,\ell}(x)]$$

étant localement finie, c'est une fonction α de classe $\mathcal{C}^k$, positive et telle que :

$$\alpha(x) > 0 \iff x \in \cup V_n = \cup B_n .$$

(2) Si de plus E est séparable, sachant que

$$\forall R \subset \mathbb{R} , \qquad \bigcup_{r \in R} V(0, r) = V(0, \sup R)$$

et que, par suite, la base d'entourages de l'espace E, associée aux pseudo-boules est stable par réunion, appliquons le théorème suivant qui s'apparente à un théorème de Lindelöf :

THÉORÈME 10. - *Soient X un espace uniforme, D une partie de X partout dense, et $\mathcal{V}$ une base d'entourages symétriques stable par réunion quelconque, alors tout ouvert Ω de X est la réunion des $W(x)$ tels que $x \in D \cap \Omega$, $W \in \mathcal{V}$, et $W(x) \subset \Omega$.*

Il en résulte que tout ouvert Ω de E est réunion dénombrable de pseudo-boules, donc il existe $\alpha \in \mathcal{C}^k(E , [0 , \infty))$ telle que $\alpha(x) > 0 \iff x \in \Omega$. De même si A est fermé, il existe $\beta \in \mathcal{C}^k(E , [0 , \infty))$, telle que :

$$\beta(x) > 0 \iff x \notin A .$$

Finalement, si $A \subset \Omega$,

$$\theta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \in \mathcal{C}^k(E , [0 , 1])$$

vérifie :

$$\theta(x) = 1 \iff \beta(x) = 0 \iff x \in A ,$$

$$\theta(x) = 0 \iff \alpha(x) = 0 \iff x \notin \Omega .$$

Nous appellerons $\mathcal{C}^k$-normale, toute variété X où, quels que soient A et B fermés disjoints, il existe :

$$\theta \in \mathcal{C}^k(X , [0 , 1]) \quad \text{telle que} \quad \theta_{|A} = 0 \quad \text{et} \quad \theta_{|B} = 1 .$$

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 11. - Tout espace vectoriel normé séparable, qui admet une jauge de classe $\mathcal{C}^k$, est $\mathcal{C}^k$-normal.

La séparabilité du modèle a été indispensable pour pouvoir utiliser la construction du paragraphe 5 ; il semble néanmoins qu'une adaptation convenable de la méthode suivie par G. MOKOBODSKI (et qu'il a exposée à ce séminaire) pour démontrer la paracompacité des métrisables, permettrait de se dispenser de cette hypothèse.

7. Théorème de partition de l'unité.

Nous dirons qu'un espace vectoriel normé est du type $\mathcal{H}$ si l'origine admet une base de voisinages difféomorphes à l'espace tout entier.

Alors :

PROPOSITION 12. - Une variété paracompacte de classe $\mathcal{C}^k$, dont les modèles sont $\mathcal{C}^k$-normaux et de type $\mathcal{H}$, admet pour tout recouvrement ouvert, une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^k$, subordonnée à ce recouvrement.

En effet, étant donné un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de X, il existe un atlas sur X, tel que l'image de chaque carte soit le modèle tout entier et que les domaines des cartes forment un recouvrement plus fin que $\mathcal{R}$; X étant paracompact (donc aussi régulier), il existe un recouvrement ouvert localement fini $(\Omega_i)_{i \in I}$ tel que le recouvrement (Ω_i) raffine le précédent ; X étant paracompact, donc normal, il existe d'après N. BOURBAKI ([3], p. 87), un recouvrement ouvert $(A_i)_{i\in I}$ tel que $\forall\ i \in I$, $\overline{A_i} \subset \Omega_i$.

Transportons, au moyen des coordonnées locales, une fonction de partition associée (axiome de choix) dans le modèle aux images de $\overline{A_i}$ et Ω_i ; soit θ_i la fonction obtenue en prolongeant le résultat par zéro sur le complémentaire de $\overline{\Omega_i}$

$$\forall\ i \in I\ ,\quad \theta_i \in \mathcal{C}^k(X\ ,\ [0\ ,\ 1])\quad \text{et}\quad \theta_i(x) > 0 \iff x \in \Omega_i\ .$$

La somme $\sum \theta_i$, strictement positive puisque $(\Omega_i)_{i\in I}$ forme un recouvrement, est localement finie, donc de classe $\mathcal{C}^k$.

Par suite, la partition de l'unité

$$\left(\frac{\theta_i}{\sum_{i\in I} \theta_i}\right)_{i\in I}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et subordonnée à $\mathcal{R}$.

Remarque. - Un espace vectoriel normé, qui admet une jauge γ de classe $\mathcal{C}^k$, est de type $\mathcal{K}$.

En effet, ses pseudo-boules lui sont difféomorphes, car

$$x \in V(a\ ,\ r) \longrightarrow \frac{r(x - a)}{\sqrt{r^2 - \gamma^2(x - a)}} \in E$$

est de classe $\mathcal{C}^k$, même au point a (comme γ^2 en 0) et

$$x \in E \longrightarrow \frac{rx}{\sqrt{r^2 + \gamma^2(x)}} + a \in V(a\ ,\ r)\ ,$$

qui est de classe $\mathcal{C}^k$, est sa réciproque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.) and PHELPS (R. R.). - The support functionals of a convex set, Convexity, p. 27-35. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Proceedings of the Symposia in pure Mathematics, 7).

[2] BONIC (R.) and FRAMPTON (J.). - Differentiable functions on certain Banach spaces, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 393-395.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Livre III : Topologie générale, Chap. 9, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[4] CUDIA (Dennis F.). - The geometry of Banach spaces ; Smoothness, Trans. Amer. math. Soc., t. 110, 1964, p. 284-314.

[5] JAMES (Robert C.). - Weakly compact sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 113, 1964, p. 129-140.

[6] LANG (Serge). - Introduction to differentiable manifolds. - New York, Interscience Publishers, 1962.

[7] PHELPS (R. R.). - A representation theorem for bounded convex sets, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 976-983.

[8] RESTREPO (Guillermo). - Differentiable norms in Banach spaces, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 413-414.

[9] ŠMULIAN (V. L.). - Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espace de Banach, Mat. Sbornik, N. S., t. 9, 1941, p. 545-561.