Marc Rogalski

Le théorème de Lévy-Khinčin

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 3 (1964), exp. nº 2, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A1_0>

LE THÉORÈME DE LÉVY-KHINČIN

par Marc ROGALSKI

Les fonctions définies négatives, ou "de type négatif", ont été introduites par SCHÖNBERG sur les groupes abéliens à propos du théorème suivant :

THÉORÈME. - *Soient* G *un groupe abélien, et* $\psi : G \to \mathbb{R}^+$; *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) a. $\rho(x , y) = \sqrt{\psi(x - y)}$ *est un écart sur* G ;

b. G , *muni de* ρ , *est isométrique à un sous-ensemble d'un hilbert réel*.

(2) ψ *est de type négatif, réelle, nulle en* 0 .

LÉVY-KHINČIN a donné une représentation intégrale des fonctions définies négatives *continues* sur $\mathbb{R}$, représentation qui permet d'expliciter la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité indéfiniment divisible, et de pouvoir exhiber, dans des cas intéressants, les espaces de Dirichlet, invariants par translation (cf. Travaux de DENY et BEURLING).

On en trouve une démonstration chez GNEDENKO et KOLMOGOROV, généralisable à $\mathbb{R}^n$, mais nécessitant quelques passages à la limite pénibles. BEURLING, en utilisant un espace fonctionnel convenablement choisi, a donné de ce théorème une démonstration beaucoup plus simple et plus élégante. C'est celle que nous reproduisons ici.

Les outils nécessaires seront essentiellement la transformation de Fourier sur un groupe localement compact abélien G (ici $\mathbb{R}^n$), avec le théorème de Bochner (représentation intégrale des fonctions de type positif sur G au moyen des caractères).

Nous utiliserons à ce propos le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Sur* $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}\hat{\mu}\, d\hat{x} = \int_G f\, d\mu$$

pour μ *mesure bornée sur* G *et* $f \in \mathcal{S}$, *espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini*.

Nous rappelons enfin que, sur $\mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier de $e^{-(|x|^2/2)}$ est $(\sqrt{2\pi})^n\, e^{-(|x|^2/2)}$, et que, si $f = \hat{g}$,

$$\frac{\partial \hat{g}(0)}{\partial \hat{x}_i} = \int_{\underset{\sim}{R}^n} f(x)\, x_i \, dx \ .$$

Pour toutes ces questions, on consultera avantageusement [3].

1. Fonctions définies négatives.

Définition. - Soit G un groupe abélien.
$\psi : G \to \underset{\sim}{C}$ est de type négatif (ou "définie négative") si $\forall\, n$, $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in G$, la forme hermitienne sur $\underset{\sim}{C}^n$

$$H_\psi(\rho) = \sum_{i,j} [\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)]\, \rho_i \overline{\rho_j}$$

est positive $(\rho \in \underset{\sim}{C}^n)$.

Remarque. - Si ψ est réelle, il suffit de considérer la forme quadratique H_ψ sur $\underset{\sim}{R}^n$.

On démontre facilement les résultats élémentaires suivants.

PROPOSITION 1.

1° $\psi(0)$ est réel $\geqslant 0$;

2° $\psi = \tilde{\psi}$ où $\tilde{\psi}$ désigne la fonction $x \rightsquigarrow \overline{\psi(-x)}$;

3° $\mathrm{Re}(\psi) \geqslant \psi(0) \geqslant 0$;

4° $\psi - \psi(0)$ est de type négatif ;

5° les fonctions de type négatif forment un cône convexe de $\underset{\sim}{C}^G$ simplement fermé ;

6° ψ de type négatif équivaut à

$$\begin{cases} \text{(a)} & \psi(0) \text{ réel } \geqslant 0 , \\ \text{(b)} & \psi = \tilde{\psi} , \\ \text{(c)} & \forall\, n ,\ \forall\, x_1 , \ldots , x_n \in G ,\ \forall\, \rho_1 , \ldots , \rho_n \end{cases}$$

tels que $\rho_1 + \ldots + \rho_n = 0$

$$\sum_{i,j} \psi(x_i - x_j)\, \rho_i \overline{\rho_j} \leqslant 0 \ ;$$

7° $\mathrm{Re}(\psi)$ est de type négatif.

Pour la démonstration de ces résultats, cf. [1].

Exemples de fonctions de type négatif.

a. ψ = constante $\geqslant 0$.

b. $G = \underset{\sim}{R}^n$, $\psi(x) = iL(x)$, où L est une forme linéaire réelle.

c. $G = \underset{\sim}{R}^n$, $\psi(x) = \varphi(x)$, forme quadratique positive.

PROPOSITION 2. - Si φ est de type positif, $\psi(x) = \varphi(0) - \varphi(x)$ est de type négatif, nulle en 0 , majorée en module par $2\varphi(0)$.

$\psi(0) = 0$ réel $\geqslant 0$, $\psi = \tilde{\psi}$ évidemment.

$$\sum_{i,j} \psi(x_i - x_j)\, \rho_i \overline{\rho_j} = \varphi(0)\ |\Sigma \rho_i|^2 - \Sigma\, \varphi(x_i - x_j)\, \rho_i \overline{\rho_j} .$$

Si $\Sigma \rho_i = 0$, comme φ est de type positif, la quantité précédente est négative. D'après la proposition 1, 6°, ψ est de type négatif.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. - Soit $\psi : G \to \underset{\sim}{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° ψ est de type négatif,

2° (a) $\psi(0) \geqslant 0$,

(b) $\forall\ t \geqslant 0$, $e^{-t\psi}$ est de type positif.

La démonstration, élémentaire, s'appuie sur le lemme suivant.

LEMME 1. - Si $\Sigma\, a_{ij}\, \rho_i \overline{\rho_j}$ est une forme hermitienne $\geqslant 0$ sur $\underset{\sim}{C}^n$, alors $\Sigma\, e^{a_{ij}}\, \rho_i \overline{\rho_j}$ en est encore une.

On démontre que : $\Sigma\, a_{ij}\, \rho_i \overline{\rho_j}$ positive et $\Sigma\, b_{ij}\, \rho_i \overline{\rho_j}$ positive $\Longrightarrow$ $\Sigma\, a_{ij}\, b_{ij}\, \rho_i \overline{\rho_j}$ positive, en décomposant en carrés. Puis on passe à la série exponentielle.

PROPOSITION 4. - Si ψ est de type négatif, $\sqrt{|\psi|}$ est sous-additive.

On peut supposer que $\psi(0) = 0$. Pour $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $H_\psi(\rho) \geqslant 0$. Le déterminant de cette forme est donc positif :

$$\begin{vmatrix} 2\ \mathrm{Re}\ \psi(x) & \psi(x) + \overline{\psi(y)} - \psi(x\ ,\ y) \\ \psi(y) + \overline{\psi(x)} - \psi(y - x) & 2\ \mathrm{Re}\ \psi(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

En développant, on arrive à $|\psi(x - y)| \leqslant (\sqrt{|\psi x|} + \sqrt{|\psi y|})^2$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> ψ <u>est de type négatif</u> continue <u>sur</u> $\underset{\sim}{R}^n$

$$|\psi(x)| = O(|x|^2) \ \text{à l'infini.}$$

Soit $n =$ partie entière de $|x|$. $|\psi(ny)| \leqslant n^2 |\psi(y)|$, d'après la proposition 4. Prenons $y = x/n$.

$$|\psi(x)| \leqslant n^2 |\psi(x/n)| \ .$$

Si

$$A = \sup_{|u| \leqslant 2} |\psi(u)| \ ,$$

qui est fini si ψ est continue,

$$|\psi(x)| \leqslant An^2 \leqslant A|x|^2 \ .$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $\psi : G \to \underset{\sim}{C}$, G <u>localement compact. Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) ψ <u>est de type négatif (resp. continue)</u>

(2) $\psi(x) = \lim_{x \to \infty} [c + \varphi_n(0) - \varphi_n(x)]$ où $c \geqslant 0$.

φ_n <u>est de type positif (resp. continue) la convergence étant simple (resp. uniforme sur tout compact)</u>.

(2) $\Longrightarrow$ (1) résulte de la proposition 2.

(1) $\Longrightarrow$ (2) $\psi = \psi(0) + \lim_{n\to\infty} n(1 - e^{-(\psi - \psi(0))/n})$.

$$\psi(x) = \psi(0) + \lim_{n\to\infty} [\varphi_n(0) - \varphi_n(x)] \ ,$$

où $\varphi_n(x) = n \, e^{-(\psi(x) - \psi(0))/n}$ est de type positif (proposition 3), continue si ψ l'est, tendant simplement vers ψ , et uniformément sur tout compact si ψ est continue.

C. Q. F. D.

D'après le théorème de Bochner sur $\underset{\sim}{R}^n$, si ψ est de type négatif, continue, nulle en 0 , il existe une suite de mesures de Radon μ_n , de masses 1 , telles que

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} n \int_{\underset{\sim}{R}^n} (1 - e^{-ix.y}) \, d\mu_n$$

uniformément sur tout compact.

Par un passage à la limite assez pénible, on peut démontrer alors le <u>théorème de Lévy-Khinčin</u> :

THÉORÈME 2A. - Sur $\underset{\sim}{R}^n$, toute fonction définie négative continue ψ non réelle est de la forme

$$\psi(x) = C + iL(x) + Q(x) + \int_{\underset{\sim}{R}^n - \{0\}} \left(1 - e^{-ix.y} - i\,\frac{x.y}{1 + |y|^2}\right) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)$$

où C est une constante $\geqslant 0$, L une forme linéaire réelle, Q une forme quadratique $\geqslant 0$, σ une mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée sur $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$, et ces quantités sont uniquement déterminées par ψ .

THÉORÈME 2B. - Sur $\underset{\sim}{R}^n$, toute fonction définie négative continue ψ réelle est de la forme :

$$\psi(x) = C + Q(x) + \int_{\underset{\sim}{R}^n - \{0\}} (1 - \cos x.y)\, \frac{1 + |y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)$$

où C est une constante $\geqslant 0$, Q une forme quadratique $\geqslant 0$, σ une mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée sur $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$, symétrique, et ces quantités sont uniquement déterminées par ψ .

Les réciproques (de telles fonctions sont de type négatif, continues) sont très faciles.

Nous démontrerons le théorème 2A par la méthode de BEURLING, la démonstration du théorème 2B ne nécessitant que quelques adaptations évidentes.

Nous allons pour cela introduire un espace fonctionnel qui nous sera très utile.

Remarque. - Bien sûr, $C = \psi(0)$. On peut donc supposer que $\psi(0) = 0$.

2. Démonstration du théorème de Lévy-Khinčin.

A. Espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$ à limites radiales en 0 .

1° Dans $\underset{\sim}{R}^n$, soient B la boule unité, S la sphère unité, $\omega = B\setminus(S \cup \{0\})$.
$\mathcal{C}(B)$ est isomorphe à l'espace.
$\mathcal{H}(\omega)$ = ensemble des fonctions φ continues sur ω , prolongeables par continuité à S et 0 en une fonction continue sur B .

2° Soit $\pi : \omega \xrightarrow{\sim} E = \underset{\sim}{R}^n - \{0\}$.

$\pi(y) = \dfrac{1 - |y|}{|y|}\, y^*$ si $y = |y|y^*$ où $y^* \in S$.

$\pi^{-1}(x) = \dfrac{x^*}{1 + |x|}$.

Si $y \to 0$, $\pi(y) \to +\infty$.

Si $y \to y^*$, $\pi(y) \to 0$.

Par π , $\mathcal{K}(\omega)$ se transforme en $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ = ensemble des fonctions f continues sur E , ayant une limite finie à l'infini et ayant des limites radiales en 0 , fonction continue f^* de x^* , et atteintes uniformément en x^* quand $|x| \to 0$.

3° Formes linéaires $\geqslant 0$ sur $\mathcal{E}$. - Elles sont de la forme $L(f) = \mu(f \circ \pi)$ où μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur B .

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \ ,$$

où $\mu_1 = \mu|\{\ \}$, $\mu_2 = \mu|\omega$, $\mu_3 = \mu|S$.

Si a est la masse de μ_1 , et si $\sigma = \pi(\mu_2)$, on a

$$L(f) = a\ f(\infty) + \int_E f(y)\ d\sigma(y) + \int_S f^*(y^*)\ d\nu(y^*)$$

où ν est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur S , bornée. Le triplet (a , σ , ν) est uniquement déterminé par μ .

Une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $\mathcal{E}$ est continue pour la forme $\|f\|_\infty$.

4° Un sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$. - Nous poserons

$$\mathcal{F} = \{f \mid f(y) = \hat{g}(y)\ \frac{1 + |y|^2}{|y|^2} \quad \text{où} \quad g \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \hat{g}(0) = \frac{\partial \hat{g}(0)}{\partial x_j} = 0 \ , \quad \forall\ j = 1 ,\ldots, n\}$$

$$f \equiv 0 \iff g \equiv 0 \ .$$

On a donc

$$\int g\ dy = \int y_j\ g\ dy = 0 \ , \quad \forall\ j = 1 \ , \ \ldots \ , n \ , \quad g \in \mathcal{S} \implies f(\infty) = 0$$

f est continue sur E .

Posons $y = ry^*$. Si $r \to 0$,

$$f(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{y_i\ y_j}{r^2} \frac{\partial^2\ \hat{g}(0)}{\partial y_i\ \partial y_j} + o(r)$$

qui a pour limité

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} y_i^*\ y_j^*\ \frac{\partial^2\ \hat{g}}{\partial y_i\ \partial y_j}(0) = f^*(y^*) \ ,$$

qui est une forme quadratique de y^* , donc continue.

$\mathcal{F}$ est donc bien un sous-espace de $\mathcal{E}$.

B. Forme linéaire $\geqslant 0$ sur $\mathfrak{F}$ attachée à une fonction de type négatif continue, nulle en 0.

Soit ψ une telle fonction.

Posons, $\forall f \in \mathfrak{F}$, donc de la forme $f = \hat{g}(y) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2}$:

$$L(f) = - \int_{\underset{\sim}{R}^n} \psi(y)\, g(y)\, dy .$$

PROPOSITION 5. - L est une forme linéaire sur $\mathfrak{F}$

1° positive,

2° continue pour la norme uniforme.

Démonstration. - Nous avons vu que $|\psi(y)| = O(|y|^2)$ quand $y \to \infty$. Donc $L(f)$ est bien définie, et est, bien sûr, linéaire.

$$\psi(y) = \lim_{\rho\to\infty} (\hat{\mu}_\rho(0) - \hat{\mu}_\rho(y))$$

uniformément sur tout compact, où μ_ρ est une mesure de Radon bornée $\geqslant 0$ sur $\underset{\sim}{R}^n$, de masse p, d'après le théorème 1 et le théorème de Bochner :

$$p(1 - e^{-(\psi(y))/p}) = \hat{\mu}_\rho(0) - \hat{\mu}_\rho(y) = \theta_p(y) \to \psi(y) .$$

1° Posons

$$L_\rho(f) = - \int_E \theta_\rho(y)\, g(y)\, dy$$

$$\begin{aligned} L_\rho(f) &= - \int_{\underset{\sim}{R}^n} \theta_\rho(y)\, g(y)\, dy \\ &= - \int_{\underset{\sim}{R}^n} \hat{\mu}_\rho(0)\, g(y)\, dy + \int_{\underset{\sim}{R}^n} \hat{\mu}_\rho(y)\, g(y)\, dy \\ &= - \int_{\underset{\sim}{R}^n} \hat{g}(y)\, \hat{\mu}_\rho(0)\, d\varepsilon_{(0)} + \int_{\underset{\sim}{R}^n} \hat{g}(y)\, d\mu_\rho(y) . \end{aligned}$$

Or $\hat{g}(0) = 0$. Donc

$$L_\rho(f) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} \hat{g}(y)\, d\mu_\rho(y) \text{ est } \geqslant 0 \text{ si } f \geqslant 0 .$$

2° $$L_\rho(f) = \int_{\underset{\sim}{R}^n - \{0\}} f(y) \frac{|y|^2}{1 + |y|^2}\, d\mu_\rho(y) ,$$

d'où :

$$|L_\rho(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\underset{\sim}{R}^n - \{0\}} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2}\, d\mu_\rho(y) .$$

3° LEMME 2. - <u>Soit</u> $Z \in \underset{\sim}{C}$, <u>tel que</u> $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$. <u>Posons</u> $u_n = n(1 - e^{-Z/n})$. $u_n \to Z$ <u>quand</u> $n \to +\infty$, <u>et</u> $\forall\, n$, $|u_n| \leqslant |Z|$.

4° Quand $\rho \to +\infty$, $L_\rho(f) \to L(f)$.

$$|\theta_\rho(y)| = \rho\,|1 - e^{-(\psi(y))/\rho}| \leqslant |\psi(y)|$$

d'après le lemme 2, car $\operatorname{Re} \psi \geqslant 0$.

Comme $|\psi(y)|\ |g(y)|$ est intégrable, on peut passer à la limite dans l'intégrale $\int_E \theta_\rho(y)\, g(y)\, dy$.

5° $L(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. $f \geqslant 0 \implies L_\rho(f) \geqslant 0$, et $L_\rho(f) \to L(f)$ quand $\rho \to +\infty$.

6° $|L(f)| \leqslant \|f\|_\infty \sup_\rho \int_E \dfrac{|y|^2}{1+|y|^2}\, d\mu_\rho(y)$. Ceci résulte du 2° par passage à la limite.

7° $\sup_\rho \int_E \dfrac{|y|^2}{1+|y|^2}\, d\mu_\rho(y) < +\infty$. Posons $\dfrac{|y|^2}{1+|y|^2}\, d\mu_\rho(y)\big|_E = d\nu_\rho(y)$, mesure sur E . Alors

$$\psi(x) = \lim_{\rho\to+\infty} \int_E (1 - e^{-ix.y})\, \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\nu_\rho(y) = \lim_{\rho\to\infty} \theta_\rho(x)$$

Multiplions les deux membres par $e^{-(|x|^2)/2}$ et intégrons sur $\underset{\sim}{R}^n$:

$$\int_{\underset{\sim}{R}^n} (1 - e^{-ix.y})\, e^{-(|x|^2)/2}\, dx = (\sqrt{2\pi})^n\, (1 - e^{-(|y|^2)/2}) .$$

La fonction $J(y) = (\sqrt{2\pi})^n\, \dfrac{1 - e^{-(|y|^2)/2}}{|y|^2}\, (1 + |y|^2)$ est minorée sur $\underset{\sim}{R}^n$ par $K > 0$.

$$\int_{\underset{\sim}{R}^n} \theta_\rho(x)\, e^{-(|x|^2)/2}\, dx = \int_E J(y)\, d\nu_\rho(y) \quad \text{réel} \geqslant 0 .$$

De $J(y) \geqslant K > 0$ et $|\theta_\rho| \leqslant |\psi|$, on peut donc déduire

$$\int_E d\nu_\rho(y) \leqslant 1/K \int_{\underset{\sim}{R}^n} |\psi(x)|\, e^{-(|x|^2)/2}\, dx = A$$

indépendant de ρ . Donc

$$\sup_\rho \int_E d\nu_\rho(y) = M < +\infty .$$

8° <u>Donc</u> $L(f)$ <u>est une forme linéaire</u> $\geqslant 0$ <u>continue pour la norme uniforme sur</u> $\mathfrak{F}$.

En effet, on a alors

$$|L(f)| \leqslant \|f\|_\infty \times M .$$

C. Q. F. D.

C. Prolongement de la forme linéaire L à l'espace $\mathcal{E}$.

1° LEMME 3. - L'adhérence $\overline{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ (pour la norme uniforme) est l'espace $\mathcal{B}_0$ des fonctions f de $\mathcal{E}$ nulles à l'infini, et dont les fonctions f^* sont les traces sur S de formes quadratiques.

Une limite uniforme de formes quadratiques étant une forme quadratique, $\mathcal{B}_0$ est fermé.

$$\mathfrak{F} \subset \mathcal{B}_0 \implies \overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{B}_0 .$$

Soit $f \in \mathcal{B}_0$, $f^*(y^*) = \sum_{i,j} y_i^* y_j^* \alpha_{ij}$. Soit $g \in \mathcal{S}$ telle que $\hat{g}(0) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_i} = 0$, $\forall\, i = 1 , \ldots , n$, telle que $\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y_i\, \partial y_j}(0) = 2\alpha_{ij}$, $\forall\, i , j$, telle que $\hat{g}$ soit nulle hors d'un voisinage U de 0 convenable, et approche f d'aussi près qu'on veut sur un voisinage V de 0 convenable.

En recollant g avec une fonction η de $\mathcal{S}$ telle que $\hat{\eta}$ soit à support en dehors d'un voisinage W convenable de 0 , et telle que $\hat{\eta}\,\frac{1 + |y|^2}{|y|^2}$ approche f , en dehors de W , d'aussi près qu'on le veut, on voit facilement qu'on peut approcher f d'aussi près qu'on le veut par une fonction de $\mathfrak{F}$.

C. Q. F. D.

2° Donc L se prolonge de façon unique à $\overline{\mathfrak{F}} = \mathcal{B}_0$ en une forme linéaire $\geqslant 0$ continue L^* .

3° LEMME 4. - Soit $\mathcal{E}_0$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des fonctions nulles à l'infini. On a

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^+ + \mathcal{B}_0 .$$

Soit $f \in \mathcal{E}_0$. Soit $a = \inf f$. Soit φ une fonction continue, égale à 1 sur un voisinage V de 0 , et à support compact. Ecrivons :

$$f = f - \inf(\varphi_a , f) + \inf(\varphi_a , f)$$

$g = \inf(\varphi_a , f) \in \mathcal{E}_0$, et g est constante au voisinage de 0 , donc $g \in \mathcal{B}_0$, car la constante 1 est la trace sur S de la forme quadratique $\sum y_i^2$

$$\eta = f - g \in \mathcal{E}_0^+$$

C. Q. F. D.

4° D'après un théorème de prolongement :

Si L^* est linéaire sur $\mathcal{B}_0$, sous-espace de $\mathcal{E}_0$, positive pour l'ordre sur $\mathcal{B}_0$ du cône $\mathcal{E}_0^+ \cap \mathcal{B}_0$, et si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{B}_0 + \mathcal{E}_0^+$, L^* se prolonge en $\overline{L}$, linéaire sur $\mathcal{E}_0$, positive sur $\mathcal{E}_0^+$.

(Démonstration par le théorème de Zorn, très classique.)

5° PROPOSITION 6. - L se prolonge en une forme linéaire positive $\tilde{L}$ à tout l'espace $\mathcal{E}$.

(a) Par π , $\mathcal{C}_0(B^*)$ se transforme en $\mathcal{E}_0$, ($\mathcal{C}_0(B^*)$ est l'espace des fonctions continues sur B^* , nulles en 0 , $B^* = B - \{0\}$).

$\overline{L}$ correspond à une forme linéaire $\geqslant 0$, μ , sur $\mathcal{C}_0(B^*)$, qui prolonge une mesure de Radon $\geqslant 0$, ν , sur $\mathcal{K}(B^*)$.

(b) Montrons que ν est bornée. Si ν n'était pas bornée, il existerait une suite de compacts K_n disjoints, et une suite de fonctions φ_n de $\mathcal{K}^+(B^*)$, à supports disjoints, telles que

$$1/n \times 1_{K_n} \leqslant \varphi_n \leqslant 1/n \ , \qquad \forall\ n$$

$$\nu(K_n) \geqslant n \ , \qquad \forall\ n$$

Donc

$$\nu(\varphi_n) \geqslant 1 \ , \qquad \forall\ n$$

Posons

$$f = \sum_{\rho=1}^{\infty} \varphi_\rho \ , \qquad f \in \mathcal{C}_0^+(B^*) \ ,$$

et

$$f_n = \sum_{\rho=1}^{n} \varphi_\rho \ , \qquad \varphi_\rho \in \mathcal{K}^+(B^*) \ , \quad \forall\ \rho$$

alors $f = \sup f_n$. Donc $\mu(f) \geqslant \mu(f_n) = \nu(f_n) \geqslant n$, $\forall\ n$, ce qui serait impossible.

(c) Donc $\nu \in \mathcal{M}^1(B^*)$, et se prolonge en $\tilde{\nu} \geqslant 0$ sur $\mathcal{C}_0^+(B^*)$ (continue pour la norme uniforme).

On a bien sûr $\tilde{\nu} \leqslant \mu$. Définissons $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{C}(B)$, en prolongeant μ . Posons $\tilde{\mu}(1) = m =$ masse de ν . Soit $f \in \mathcal{C}(B)$. Nous poserons :

$$\tilde{\mu}(f) = \mu[f - f(0)] + m \times f(0)$$

$\tilde{\mu}$ est évidemment linéaire.

Soit $f \in \mathcal{C}^+(B)$.

$$\mu[f - f(0)] \geqslant \tilde{\nu}[f - f(0)] \ .$$

Or $f - f(0) \geqslant - f(0)$. Donc

$$\mu[f - f(0)] \geqslant - mf(0) .$$

Donc

$$\tilde{\mu}(f) \geqslant 0 .$$

$\tilde{\mu}$ est donc une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $\mathcal{C}(B)$, prolongeant μ , et $\tilde{\mu}$ correspond à $\tilde{L}$ sur $\mathcal{E}$, prolongeant $\bar{L}$.

C. Q. F. D.

D. Représentation de Lévy-Khinčin.

PROPOSITION 7. - La forme $\tilde{L}$ peut s'écrire :

$$\tilde{L}(f) = mf(\infty) + \int_E f(y)\, d\sigma(y) + \int_S f^*(y^*)\, d\lambda(y^*)$$

où σ et λ sont deux mesures de Radon $\geqslant 0$ bornées respectivement sur E et S .

Cela résulte de A., 3°.

Démonstration du théorème 2A, existence. - Soit $f \in \mathfrak{F}$.

$$L(f) = \int_E f(y)\, d\sigma(y) + \int_S f^*(y^*)\, d\lambda(y^*)$$

$$= \int_E \hat{g}(y) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y_i\, \partial y_j}(0) \int_S \frac{y_i^*\, y_j^*}{2}\, d\lambda(y^*)$$

Posons $\frac{1}{2} \int_S y_i^*\, y_j^*\, d\lambda(y^*) = c_{ij}$.

$$\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y_i\, \partial y_j}(0) = - \int_{\underset{\sim}{R}^n} x_i\, x_j\, g(x)\, dx$$

Or on peut écrire, puisque $\hat{g}(0) = \frac{\partial \hat{g}(0)}{\partial y_j}(0)$, $\forall\, j$:

$$\hat{g}(y) = - \int_{\underset{\sim}{R}^n} g(x)\left(1 - e^{-ix.y} - \frac{ix.y}{1 + |y|^2}\right) dx$$

D'autre part, la fonction $g(x) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2} \left(1 - e^{-ix.y} - \frac{ix.y}{1 + |y|^2}\right)$ est bornée intégrable en $dx \otimes d\sigma(y)$.

Donc d'après le théorème de Fubini :

$$L(f) = - \int_{\underset{\sim}{R}^n} g(x)\left[\int_E \left(1 - e^{-ixy} \frac{ix.y}{1 + |y|^2}\right) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)\right] dx - \int_{\underset{\sim}{R}^n} \left(\sum_{i,j} x_i x_j\, c_{ij}\right) g(x)\, dx$$

soit :

$$- \int_{\underset{\sim}{R}^n} \psi(x)\, g(x)\, dx = - \int_{\underset{\sim}{R}^n} g(x)\left[Q(x) + \int_E \left(1 - e^{-ix\cdot y} - \frac{ix\cdot y}{1+|y|^2}\right) \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)\right] dx$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$, de moments d'ordre 0 et 1 nuls (c'est-à-dire telle que $\int g\, dx = \int \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = 0$, $\forall\ i$). D'où il résulte que

$$\psi(x) = k + \ell(x) + Q(x) + \int_E \left(1 - e^{-ix\cdot y} - \frac{ix\cdot y}{1+|y|^2}\right) \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)$$

où $k = \text{Cte}$, $\ell =$ forme linéaire.

$$\psi(0) = 0 \implies k = 0$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_S \Big(\sum_{i,j} x_i\, y_i^*\, x_j\, y_j^*\Big)\, d\lambda(y^*) = \frac{1}{2} \int_S \big(\Sigma\, x_i\, y_i^*\big)^2\, d\lambda(y^*)$$

Donc $Q \geqslant 0$.

Enfin, si ψ est non réelle, de $\psi = \widetilde{\psi}$, on tire

$$\ell(x) = iL(x)$$

où L est une forme linéaire réelle.

C. Q. F. D.

E. Unicité de la représentation.

Il suffit de montrer que si

$$\psi = c + iL(x) + \mathbf{Q}(x) + \int_E \left(1 - e^{-ix\cdot y} - \frac{ix\cdot y}{1+|y|^2}\right) \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y) ,$$

où $c = \text{Cte}$, L linéaire, $\mathbf{Q}$ quadratique, σ bornée, est nulle, alors $\sigma = 0$. On aura bien alors $Q = 0$, $L = 0$, $c = 0$.

Soit $f \in \mathcal{S}$, à moments d'ordre 0 , 1 et 2 nuls.

$$\int_{\underset{\sim}{R}^n} \psi f\, dx = - \int_E \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, \hat{f}(y)\, d\sigma(y) = 0 .$$

Or les fonctions $\frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, \hat{f}(y)$ forment un ensemble riche dans $K(\underset{\sim}{R}^n - \{0\})$.

Il en résulte que $\sigma = 0$.

C. Q. F. D.

3. Mesures de Radon positives, indéfiniment divisibles et fonctions de type négatif.

A. Mesure de probabilité indéfiniment divisible sur un groupe G localement compact abélien.

DÉFINITION. - Soit μ une mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse 1 sur G. On dit que μ est indéfiniment divisible (en abrégé : I. D.) si $\forall n$ entier > 0, il existe $\mu_{1/n}$ mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée telle que

$$\mu = (\mu_{1/n})^{*n}$$

$\mu_{1/n}$ est alors de masse 1.

Soit $\varphi = \hat{\mu}$, transformée de Fourier de μ, sur $\hat{G}$.

$$\varphi(\hat{x}) = \int_G (-x, \hat{x})\, d\mu(x) ,$$

$\varphi(0) = 1$, φ est continue, $|\varphi| \leqslant 1$, $\forall n > 0$, $\exists \varphi_{1/n}$ telle que $(\varphi_{1/n})^n = \varphi$.

PROPOSITION 8. - Si μ est I. D., alors $\hat{\mu} = \varphi$ est toujours différente de 0.

Soit $u_n(x) = |\varphi(x)|^{2/n}$. Quand $n \to \infty$, $u_n(x) \to u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi(x) = 0 \\ 1 & \text{si } \varphi(x) \neq 0 . \end{cases}$$

$$|\varphi_{1/n}|^2 = \varphi_{1/n} \times \overline{\varphi_{1/n}} = \widehat{\mu_{1/n} * \widetilde{\mu}_{1/n}} = \widehat{(\mu * \widetilde{\mu})_{1/n}}$$

est bien facile à établir ($\widetilde{\mu}$ est la mesure $\Gamma \to \mu(-\Gamma)$).

En prenant $(\mu * \widetilde{\mu})_{1/n} = \mu_{1/n} * \widetilde{\mu}_{1/n}$, on voit que $(|\varphi|^2)_{1/n}$ est positive et vaut $|\varphi|^{2/n}$. Donc

$$u_n(x) = \widehat{(\mu * \widetilde{\mu})_{1/n}}\,(x) = \widehat{\nu_n}(x) .$$

Or $\varphi(0) = 1$, φ continue $\Longrightarrow$ $\varphi \neq 0$ dans un voisinage V de 0 $\Longrightarrow$ $u = 1$ dans un voisinage V de 0.

$\widehat{\nu_n} \to u$ simplement, $u = 1$ dans un voisinage de 0. Donc u est une fonction de type positif continue à l'origine, donc partout. Donc il existe une mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse 1, π, telle que $u = \hat{\pi}$. Donc u est continue, et vaut 1 pour $x = 0$, donc $u \equiv 1$. Donc

$$\varphi(x) \neq 0 , \quad \forall x . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 5. - *Soit* C *une courbe continue sur* $\hat{G}$, *fermée. Soit* $\Gamma = \varphi(C)$, *où* $\varphi = \hat{\mu}$, μ *mesure* I. D. *Soit* $\varphi_{1/n} = \widehat{\varphi_{1/n}}$, $\varphi_n(C) = \Gamma_n$. *Alors,* $\forall\, n \geq 1$,

$$I(\Gamma\ ,\ 0) = I(\Gamma_n\ ,\ 0) = 0\ .$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_n"] & \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \arrow[l, "g_n"] \end{tikzcd}$$

Soit $g_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : u \rightsquigarrow u^n$

$$\varphi = g_n \circ \varphi_{1/n}\ .$$

Or g_n multiplie par n l'indice d'une courbe par rapport à l'origine, et $\Gamma = g_n(\Gamma_n)$.

Donc $I(\Gamma\ ,\ 0) = nI(\Gamma_n\ ,\ 0) = nK_n$, où $K_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Ceci n'est possible que si $K_n = 0$, $\forall\, n$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 9. - *Si* $\hat{G}$ *est connexe par arcs, il existe une détermination continue de* $\log \varphi(x)$ *qui vaut* 0 *en* 0 .

Soit $x \in \hat{G}$, $x \neq 0$. Il existe un arc C d'origine 0 , d'extrémité x . Posons

$$\log \varphi(x) = \int_{\varphi(C)} \frac{dZ}{Z}$$

$\log \varphi(x)$ est indépendante de C , car si on prend C' , on a :

$$\int_{\varphi(C)} \frac{dZ}{Z} = \int_{\varphi(C')} \frac{dZ}{Z}$$

grâce au lemme 5.

C. Q. F. D.

Nous supposerons dans la suite $\hat{G}$ *connexe par arcs.*

On démontre facilement les lemmes suivants :

LEMME 6. - *Si* μ *est* I. D., *les* $\mu_{1/n}$ *telles que* $(\mu_{1/n})^{*n} = \mu$ *sont bien déterminées, et sont* I. D.

LEMME 7. - *Le produit de convolution d'un nombre fini de mesures* I. D. *est* I. D.

LEMME 8. - *Pour tout rationnel* $r = p/q > 0$, *il existe une mesure* I. D. $\mu_{p/q}$ *unique telle que* $(\widehat{\mu_{p/q}})^q = \varphi^p$, $(\mu_{p/q})^{*q} = \mu^{*p}$, *et* $\forall\, r\ ,\ r' \in \mathbb{Q}_+$, $\mu_r * \mu_{r'} = \mu_{r+r'}$ *Enfin,* $\hat{\mu}_r = e^{r \log \varphi}$ *si* $\hat{\mu} = \varphi$.

On a donc un semi-groupe de mesures de Radon ≥ 0 de masses 1 : $(\mu_r)_{r \in \mathbb{Q}_+^*}$, qu'on peut compléter par $\mu_0 = \delta$.

PROPOSITION 10. - L'application $r \rightsquigarrow \mu_r$ est continue pour la topologie vague et pour la convergence étroite sur $\mathcal{M}^1(G)$.

Nous aurons besoin, pour démontrer cette proposition, du

LEMME 9. - Si $\widehat{\mu_n} \to \hat{\nu}$ simplement, μ_n et ν étant des mesures de probabilités, alors $\mu_n \to \nu$ vaguement (et même étroitement).

Il suffit de montrer la convergence sur un ensemble positivement riche $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{K}(G)$. Or il en existe un $\mathfrak{a}$ (par exemple $\mathcal{K}^+ \star \mathcal{K}^+$) dont les transformées de Fourier des éléments sont intégrables.

Soit donc $\psi \in \mathfrak{a}$.

$$\int_G \psi \, d\mu_n = \int_{\hat{G}} \hat{\psi} \, \hat{\mu}_n \, d\hat{x} ,$$

$|\hat{\psi} \, \hat{\mu}_n| \leq |\hat{\psi}|$ intégrable, et $\hat{\mu}_n \to \hat{\nu}$. Donc

$$\int_G \psi \, d\mu_n \to \int_{\hat{G}} \hat{\psi}\hat{\nu} \, d\hat{x} = \int_G \psi \, d\nu .$$

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition. - Si une suite de rationnels $r_n \to r$,

$$\mu_{r_n} = e^{r_n \log \varphi} \to e^{r \log \varphi} = \hat{\mu}_r$$

simplement, et même uniformément sur tout compact.

Donc $\mu_{r_n} \to \mu_r$ vaguement, et même étroitement,,puisque les masses se conservent.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. - Si $\hat{G}$ est connexe par arcs le semi-groupe $(\mu_r)_{r \in \mathbb{Q}_+}$ se plonge dans un semi-groupe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vaguement continu de mesures de Radon $\geqslant 0$ de masse 1 , unique.

Ce semi-groupe est étroitement continu, et chaque μ_t est I. D.

$\forall \, r \in \mathbb{Q}_+$, $\mu_r = e^{r \log \hat{\mu}}$. Si $r \to t \in \mathbb{R}_+$, $\mu_r \to e^{t \log \hat{\mu}}$ qui vaut 1 en 0 , et est continue de type positif, donc il existe μ_t unique $\geqslant 0$, de masse 1 telle que $\hat{\mu}_t = e^{t \log \hat{\mu}}$.

$$\widehat{\mu_t \star \mu_{t'}} = \widehat{\mu_t} \times \widehat{\mu_{t'}} = e^{(t+t') \log \hat{\mu}} = \widehat{\mu_{t+t'}} .$$

Donc

$$\mu_t \star \mu_{t'} = \mu_{t+t'} .$$

L'unicité du semi-groupe résulte de la continuité vague démontrée par le lemme 9.

C. Q. F. D.

On trouvera dans [1], le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Pour que $(\mu_t)_{t \in R_+}$ soit un semi-groupe de mesures de Radon de masses $\leqslant 1$, sur G, tendant vaguement vers δ à l'origine, il faut et il suffit qu'il existe ψ de type négatif continue sur $\hat{G}$ telle que

$$\forall\ t \geqslant 0\ , \qquad \widehat{\mu_t} = e^{-t\psi}\ .$$

Voir une démonstration à l'appendice (§ 4).

On peut alors démontrer le

THÉORÈME 5. - Si μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse 1 I. D. sur G de dual $\hat{G}$ connexe par arcs, il existe une fonction de type négatif continue ψ sur $\hat{G}$, unique telle que

$$\psi(0) = 0\ ,\quad \hat{\mu} = e^{-\psi}\ ,\ \text{c'est-à-dire}\quad \psi = -\log \hat{\mu}$$

(détermination construite plus haut).

La réciproque est évidente.

En effet, il existe ψ de type négatif, continue, telle que $\forall\ t \geqslant 0$, $\widehat{\mu_t} = e^{-t\psi}$, $t = 1 \implies \hat{\mu} = e^{-\psi}$.

$$\hat{\mu}(0) = 1 \implies \psi(0) = 0\ .$$

Inversement, ψ continue, $\psi(0) = 0$, et $\hat{\mu} = e^{-\psi} \implies \psi$ est la détermination de $-\log \hat{\mu}$ construite plus haut.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 6 de Lévy-Khinčin. - Soit μ une mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse 1 I. D. sur R^n.

1° Si μ est non symétrique : Il existe :

L forme linéaire réelle sur R^n,
Q forme quadratique $\geqslant 0$ sur R^n,
σ mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée sur $R^n - \{0\}$

uniques telles que :

$$\hat{\mu}(x) = \exp\left\{-\,iL(x) - Q(x) - \int_{R^n-\{0\}} \left(1 - e^{-ix.y} - \frac{ix.y}{1+|y|^2}\right) \frac{1+|y|^2}{|y|^2}\, d\sigma(y)\right\}$$

2° Si μ est symétrique : Il existe :

Q forme quadratique $\geqslant 0$ sur R^n
σ mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée symétrique sur $R^n - \{0\}$

uniques telles que :

$$\hat{\mu}(x) = \exp\{- Q(x) - \int_{\underset{\sim}{R}^n - \{0\}} (1 - \cos xy) \frac{1 + |y|^2}{|y|^2} d\sigma(y)\} .$$

En effet, $\hat{\check{\mu}} = \overline{\hat{\mu}}$. Donc si μ est symétrique, $\hat{\mu}$ et ψ sont réelles ($\check{\mu}$ = symétrique de μ).

Le théorème de Lévy-Khinčin exprime donc l'équivalence entre la donnée, sur $\underset{\sim}{R}^n$, de :

(a) Une fonction définie négative continue, nulle en 0 : ψ

(b) Une mesure de probabilité indéfiniment divisible : μ

(c) Un semi-groupe de mesures de probabilité vaguement continu : $(\mu_t)_{t \in \underset{\sim}{R}_+}$

(d) Un triplet formé d'une forme linéaire réelle, d'une forme quadratique ≥ 0 et d'une mesure de Radon bornée ne chargeant pas l'origine : (L , Q , σ)

Les probabilistes pourraient y ajouter la donnée d'un processus à accroissements indépendants qui se déduirait du semi-groupe $(\mu_t)_{t \in \underset{\sim}{R}_+}$.

4. Appendice : Démonstration du théorème 4.

1° Un tel semi-groupe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est étroitement continu. Donc, quand $t \to 0$, $\mu_t \to \delta$ étroitement

$$\widehat{\mu_t}(\hat{x})\ \widehat{\mu_s}(\hat{x}) = \widehat{\mu_{t+s}}(\hat{x}) .$$

Donc

$$\widehat{\mu_t}(\hat{x}) = \int_G (x , \hat{x})\, d\mu_t(x) \to (0 , \hat{x}) = 1$$

car $x \rightsquigarrow (x , \hat{x})$ est bornée continue. Donc $f(t)$: $t \rightsquigarrow \widehat{\mu_t}(\hat{x})$ est continue à droite en 0 , et vérifie $f(s + t) = f(s)\, f(t)$. C'est une exponentielle continue, et il existe $\psi(\hat{x})$ bien déterminée telle que l'on ait :

$$\forall\ t \geq 0 , \qquad \widehat{\mu_t}(\hat{x}) = e^{-t\psi(\hat{x})}$$

$$\widehat{\mu_t}(\hat{0}) = \int d\mu_t \leq 1 , \quad \forall\ t \geq 0 \implies \psi(\hat{0}) \text{ est réel } \geq 0 .$$

La proposition 3 prouve alors que ψ est de type négatif.

2° Montrons que ψ est continue. Soit $\hat{x}_j \to \hat{x}$ suivant un filtre $\mathfrak{F}$

$$e^{-t\psi(\hat{x}_j)} \to e^{-t\psi(\hat{x})} .$$

Donc il existe u_j tel que $\psi(\hat{x}_j) = u_j + 2K_j(i\pi)$ et $u_j \to \psi(\hat{x})$. Par suite

$$e^{-tu_j} \times e^{-2i\pi tK_j} \to e^{-t\psi(\hat{x})} ,$$

et $tK_j \to 0$ sur le cercle Γ , $|Z| = 1$, $\forall$ t réel $\geqslant 0$; ceci entraîne que $K_j = 0$ à partir d'un certain rang (séparer les cas où $tK_j - E(tK_j) \to 0$ ou 1 , ramener le 1er cas au 2e, en remplaçant t par $u = n - t \geqslant 0$ d'abord, puis u par $u/2$; si l'on est pas dans l'un de ces deux cas, considérer les sous-filtres qui y sont).

En définitive, si $\hat{x}_j \to \hat{x}$, $\psi(\hat{x}_j) \to \psi(\hat{x})$.

3° Inversement, soit ψ de type négatif continue sur $\hat{G}$. D'après la proposition 3, $\forall t \geqslant 0$, $e^{-t\psi}$ est de type positif, continue. D'après le théorème de Bochner, $\forall t \geqslant 0$, $\exists \mu_t \geqslant 0$ bornée sur G telle que $\widehat{\mu_t} = e^{-t\psi}$.

$$\int d\mu_t = \widehat{\mu_t}(0) = e^{-t\psi(0)} \leqslant 1$$

$$\widehat{\mu_{t+s}} = e^{-(t+s)\psi} = \widehat{\mu_t}\, \widehat{\mu_s} .$$

Donc $\mu_{t+s} = \mu_t \star \mu_s$.

4° $\mathfrak{A} = \mathcal{K}^+(G) \star \mathcal{K}^+(G)$ est positivement riche dans $\mathcal{K}(G)$, et $\hat{\mathfrak{A}}$ est formé de fonctions de $\hat{\mathcal{L}}(\hat{G})$ (cf. [3]).

Soit $f \in \mathfrak{A}$.

$$\int_G f(x)\, d\mu_t(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})\, \widehat{\mu_t}(\hat{x})\, d\hat{x} = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})\, e^{-t\psi(\hat{x})}\, d\hat{x} .$$

D'après le théorème de convergence dominée, quand $t \to 0$

$$\int_G f(x)\, d\mu_t(x) \to \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} = f(0) .$$

Donc $\mu_t \to \delta$ vaguement quand $t \to 0$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY (Jacques). - Notions sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires. - Faculté des Sciences d'Orsay, Département de Mathématiques, 1963.

[2] DENY (Jacques). - Sur les espaces de Dirichlet. Cours de la Faculté des Sciences d'Orsay, Année 1963/64 (non publié).

[3] RUDIN (Walter). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).