SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

JEAN-PIERRE CARPENTIER

Sur l'équation de convolution $\mu \star \pi = \pi$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 1 (1965-1966), exp. n° 7, p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 7

17 , 24 février et 2 mars 1966

SUR L'ÉQUATION DE CONVOLUTION $\mu \star \pi = \pi$

par Jean-Pierre CARPENTIER

Le but du présent exposé est l'étude, d'après Harry FURSTENBERG [7], d'une part de la représentation intégrale des fonctions sphériques et semi-sphériques, et d'autre part, du cône des solutions positives π d'une équation de convolution $\mu \star \pi = \pi$ sur un groupe semi-simple. Ces questions seront étudiées respectivement dans les parties I et II, mais il n'y sera pas question de groupe de Lie semi-simple, et les problèmes seront résolus pour un groupe localement compact vérifiant de fortes conditions topologiques et algébriques. Dans la partie III, par contre, nous montrerons que ces conditions sont réalisées pour les groupes de Lie semi-simples.

Auparavant, nous allons préciser nos notations, rappeller un certain nombre de résultats généraux, et en démontrer d'autres ; que ces résultats soient classiques, ou qu'ils ne soient qu'indirectement liés aux problèmes étudiés, il est préférable de les isoler des démonstrations déjà longues des parties I et II.

Introduction

1. Notations.

G étant un groupe localement compact, on notera :

e l'élément neutre de G ,

$\mathcal{K}(G)$ l'algèbre des fonctions continues réelles, à support compact, définies sur G ,

$\mathcal{K}^+(G)$ l'ensemble des fonctions positives où nulle de $\mathcal{K}(G)$,

$\mathcal{C}(G)$ l'algèbre des fonctions réelles continues sur G ,

$\mathcal{C}^+(G)$ l'ensemble des fonctions positives ou nulle de $\mathcal{C}(G)$,

$\mathcal{C}^1(G)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^+(G)$ valant 1 en e ,

$\mathfrak{M}(G)$ l'ensemble des mesures de Radon sur G ,

$\mathfrak{M}^+(G)$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur G ,

$\mathfrak{M}^1(G)$ l'ensemble des mesures de $\mathfrak{M}^+(G)$ de masse totale 1 ,

m_G ou $dm_G(g)$ ou dg désignera une mesure de Haar invariante à gauche, positive sur G ; pour un groupe compact, nous supposerons toujours que cette mesure est choisie de masse totale 1 .

Si f est une fonction sommable pour m_G , nous ne ferons pas de distinction entre la mesure fm_G et f .

Δ désignera la fonction modulaire, ε_t la mesure de Dirac en t .

2. Définitions.

DÉFINITION 1. - Soit X un espace topologique ; on dira que G opère continûment sur X (le plus souvent, on omettra continûment), si l'on s'est donné une application continue de $G \times X$ dans X , $(g , x) \longrightarrow gx$ telle que $ex = x$ et $g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$. Si, de plus, G opère transitivement sur X ($\forall x , y \in X$, $\exists g \in G$ tel que $g.x = y$) , X sera dit espace topologique homogène sur G (ou espace homogène, simplement).

Remarque. - Si H est un sous-groupe fermé de G , G/H est évidemment un espace homogène en ce sens sur G . Tous les espaces topologiques homogènes ne sont pas isomorphes à des espaces topologiques homogènes de ce type, mais ce sera, en fait, le cas pour tous ceux que nous envisagerons.

DÉFINITION 2. - Un homomorphisme de deux espaces topologiques homogènes X et Y sur G est une application continue f de X sur Y telle que $f(g.x) = g.f(x)$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$.

Remarques.

- Si $X = G/H$, la condition $f(gx) = gf(x)$ entraîne la continuité de f , car $g \longmapsto g.f(H)$ est continue, et puisque $g.f(H) = f(gH)$, cela suffit.

- Si f est bijective et bicontinue, c'est un isomorphisme.

- Si G opère sur X , on notera S_x , pour $x \in X$, le stabilisateur de x :

$$S_x = \{g \mid g \in G , g.x = x\} .$$

S_x est un sous-groupe fermé de G . L'application

$$j : G/S_x \longrightarrow X \text{ avec } j(gS_x) = g.x$$

est un isomorphisme algébrique continu ; elle sera bicontinue, et j sera un isomorphisme, lorsque X est séparé et G/S_x compact, ce qui se produira si un sous-groupe compact de G est transitif sur X .

Un cas particulier important d'espace topologique X , sur lequel G opère, est le cas où X est un espace vectoriel topologique et où, pour tout $g \in G$, $x \longmapsto gx$ est linéaire. Si on note T_g cette dernière application, $g \longmapsto T_g$ est une représentation linéaire de G .

Nous allons citer quelques espaces où G opère.

Prenant $X = \mathcal{C}(G)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, on peut définir deux représentations de G :

D : translation à droite, par $D_\gamma . f(g) = f(g\gamma)$, $\forall \gamma , g \in G$,

G : translation à gauche, par $G_\gamma . f(g) = f(\gamma^{-1} g)$, $\forall \gamma , g \in G$.

(Les vérifications à faire sont immédiates.)

$\mathcal{K}(G)$ est un sous-espace stable par D et G , nous noterons encore D et G les restrictions de D et G à $\mathcal{K}(G)$.

Prenant $X = \mathcal{M}^+(G)$, posons, pour $\mu \in \mathcal{M}^+(G)$:

$$(D'_\gamma(\mu))(f) = \mu(D_{\gamma^{-1}}(f)) \qquad \text{pour } f \in \mathcal{K}(G) \text{ et } \gamma \in G ,$$

$$(G'_\gamma(\mu))(f) = \mu(G_{\gamma^{-1}}(f)) \qquad \text{pour } f \in \mathcal{K}(G) \text{ et } \gamma \in G .$$

On vérifie immédiatement que G opère dans $\mathcal{M}^+(G)$ par

$$(\gamma , \mu) \longmapsto D'_\gamma(\mu) \quad \text{et} \quad (\gamma , \mu) \longmapsto G'_\gamma(\mu) .$$

D'autre part, il opère continûment pour la topologie vague : soit $f \in \mathcal{K}(G)$, il faut montrer que $\mu(D_{\gamma^{-1}}(f))$ tend vers $\mu_0(D_{\gamma_0^{-1}}(f))$ si μ tend vers μ_0 , et γ vers γ_0 par exemple. Or :

$$\mu(D_{\gamma^{-1}}(f)) - \mu_0(D_{\gamma_0^{-1}}(f)) = \mu[D_{\gamma^{-1}}(f) - D_{\gamma_0^{-1}}(f)] + (\mu - \mu_0)(D_{\gamma_0^{-1}}(f)) \quad ;$$

le deuxième terme tend vers 0 si μ tend vers μ_0 vaguement ; quant au premier terme, il tend vers 0 si γ tend vers γ_0 , pourvu que μ reste bornée sur un voisinage convenable du support de $D_{\gamma_0^{-1}}(f)$, ce qui est réalisé.

Prenant $X = \mathcal{C}^1(G)$, on définit D^1 et G^1 par

$$(D^1_\gamma \, f)(g) = \frac{f(g\gamma)}{f(\gamma)} \qquad (G^1_\gamma \, f)(g) = \frac{f(\gamma^{-1} \, g)}{f(\gamma^{-1})} \quad ,$$

(les vérifications sont immédiates, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

3. Groupes de Tikhonov.

DÉFINITION 3. - G est un groupe de Tikhonov si, pour toute représentation linéaire de G dans un espace vectoriel localement convexe E, et tout cône à base compacte C de E, G opérant continûment sur C, on a

$gC \subset C$ pour tout $g \in G \implies \exists\, u \in C$, gu proportionnel à u pour tout $g \in G$.

Remarques.

- Un groupe de Tikhonov a la propriété du point fixe, mais la réciproque est inexacte. Ainsi, tout groupe de Lie résoluble a la propriété du point fixe, mais le groupe

$$G = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x , y \in \mathbb{R}^{*+}\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} \mid u , v \in \mathbb{R}^{*+}\}$$

est résoluble, mais n'est pas groupe de Tikhonov : dans sa représentation naturelle il laisse stable le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$ sans y avoir de vecteurs propres.

- Par contre : tout groupe commutatif est de Tikhonov, donc tout groupe à un paramètre est de Tikhonov.

4. Produit de convolution.

Rappelons que si $\mu , \nu \in \mathcal{M}(G)$, $\mu \star \nu$ est la mesure, si elle existe, qui vérifie, pour tout $f \in \mathcal{K}(G)$,

$$\int_G f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(g) = \int_G f(x)\, d(\mu \star \nu)(x) \quad .$$

Si ν est absolument continue et de densité φ , $\mu \star \nu$ est absolument continue et de densité

$$\mu \star \varphi = \int_G \varphi(x^{-1} y)\, d\mu(x) \quad .$$

Si, par contre, μ est absolument continue et de densité Ψ , $\mu \star \nu$ est absolument continue et de densité

$$\Psi \star \nu = \int_G \Psi(xy^{-1}) \frac{d\nu(y)}{\Delta(y)} \quad .$$

Le produit de convolution d'une fonction de L^p et d'une fonction de L^q est continu et tend vers 0 à l'infini. Le support de $\mu \star \nu$ est contenu dans le produit des supports de μ et de ν .

Pour $\gamma \in G$,

$$\varepsilon_\gamma \star \mu = G'_\gamma \mu \quad \text{et} \quad \mu \star \varepsilon_\gamma = D'_{\gamma^{-1}} \mu \quad .$$

On notera parfois $\gamma\mu$ et $\mu\gamma$ ces mesures, pour simplifier.

On obtient facilement le lemme suivant.

LEMME 1. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure de Radon à support compact</u>, <u>alors l'application</u> $\nu \longmapsto \mu \star \nu$ <u>de</u> $\mathfrak{M}(G)$ <u>dans</u> $\mathfrak{M}(G)$ <u>est un endomorphisme linéaire continu pour la topologie vague</u>.

Nous allons étendre un peu la notation "produit de convolution".

Si X est un espace homogène localement compact sur G , et si $\mu \in \mathfrak{M}(G)$, $\nu \in \mathfrak{M}(X)$, on notera $\mu \star \nu$, si elle existe, la mesure sur X qui vérifie :

$$\int_X f(x)\ d(\mu \star \nu)x = \int_G \int_X f(gx)\ d\mu(g)\ d\nu(x) \quad .$$

Si μ_1 , $\mu_2 \in \mathfrak{M}(G)$, $\nu \in \mathfrak{M}(X)$, $\mu_1 \star (\mu_2 \star \nu)$ et $(\mu_1 \star \mu_2) \star \nu$ existeront en même temps et seront égaux.

Remarquons que, pour $g \in G$, $\nu \in \mathfrak{M}(X)$, $\varepsilon_g \star \nu$ est l'image de ν dans l'application de multiplication par g . On a $\varepsilon_g \star \varepsilon_x = \varepsilon_{gx}$.

Si pour $x \in X$, $m_G \star \varepsilon_x$ existe, c'est une mesure invariante sur X . Nous allons voir qu'en fait, on peut ramener cette extension au cas classique.

Fixons un point $x_0 \in X$, et soit $H_0 \subset G$ son stabilisateur. Fixons-nous encore une fonction continue à support compact sur H_0 , φ , telle que

$$\int_{H_0} \varphi(h)\ dm_{H_0}(h) = 1 \quad .$$

Les applications que nous allons définir seront relatives à φ et x_0 . Posons, pour $f \in \mathcal{K}(G)$, $x \in X$ tel que $gx_0 = x$,

$$f^{H_0}(x) = \int_{H_0} f(gh)\ dh \quad ,$$

l'intégrale ne dépend effectivement que de la classe à droite de g modulo H_0 . L'application $f \longmapsto f^{H_0}$ est linéaire et continue pour la topologie permettant de définir les mesures. L'application transposée $\mu \longmapsto \overline{\mu}$ de $\mathfrak{M}(X)$ dans $\mathfrak{M}(G)$ est telle que $\overline{\mu}$ a une mesure image dans X par $g \longmapsto gx_0$: c'est μ .

On a alors les relations (quand le produit de convolution existe) :

$$\mu \in \mathfrak{M}(G) \ , \quad \nu \in \mathfrak{M}(X) \ : \qquad \mu \star \overline{\nu} = \overline{\mu \star \nu}$$

$$\nu \in \mathfrak{M}(X) \ : \qquad \nu \geqslant 0 \implies \overline{\nu} \geqslant 0 \ .$$

La deuxième est évidente ; pour la première, faisons un calcul direct : pour $f \in \mathcal{K}(G)$, $\overline{\nu}(f) = \nu(f^{H_0})$, donc :

$$\mu \star \overline{\nu}(f) = \int_G \int_G f(g_1 \ g_2) \ d\mu(g_1) \ d\overline{\nu}(g_2) \ .$$

Or

$$\int_G f(g_1 \ g_2) \ d\overline{\nu}(g_2) = \int_X (\int_{H_0} f(g_1 \ g_2 \ h) \ dh) \ d\nu(g_2 \ x_0)$$

(avec une notation abusive),

$$\mu \star \overline{\nu}(f) = \int_G \int_X (\int_{H_0} f(g_1 \ g_2 \ h) \ dh) \ d\mu(g_1) \ d\nu(g_2 \ x_0)$$

et

$$\overline{\mu \star \nu}(f) = \int_X (\int_{H_0} f(gh) \ dh) \ d(\mu \star \nu)(gx_0) = \int_G \int_X (\int_{H_0} f(g_1 \ g_2 \ h) \ dh) \ d\mu(g_1) \ d\nu(gx_0)$$

ce qui montre bien l'égalité.

LEMME 2. - <u>Soient</u> K <u>un groupe compact</u>, μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>deux mesures positives sur</u> K . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $\forall \ \omega \in \mathfrak{M}(K) \ , \qquad \omega \star \mu_1 \geqslant 0 \implies \omega \star \mu_2 \geqslant 0$;

(2) $\exists \ \mu \in \mathfrak{M}^+(K)$ <u>tel que</u> $\mu_2 = \mu_1 \star \mu$.

<u>Démonstration</u>.

(2) $\implies$ (1) est évident.

(1) $\implies$ (2) . - Soit $C = \{\mu_1 \star \mu \mid \mu \in \mathfrak{M}^+(K)\}$; C est un cône convexe, et si $C' = \{\mu \mid \mu \in C \ , \ \|\mu\| \leqslant 1\}$, l'image réciproque de C' par $\mu \longmapsto \mu_1 \star \mu$ de $\mathfrak{M}^+(K)$ sur C est faiblement fermée et bornée, donc compacte ; C' est lui-même compact. Par suite, $C_1 = \{\mu \mid \mu \in C \ , \ \mu(1) = 1\}$ est une base compacte de C ; en particulier, C est faiblement fermé. Pour montrer que $\mu_2 \in C$, il suffit de montrer que toute forme linéaire continue, positive sur C , est positive sur μ_2 , d'après le théorème de Hahn-Banach. Pour cela, transformons l'hypothèse (1). Si $h \in \mathcal{C}(K)$ vérifie

$$\forall \ \mu \in \mathfrak{M}^+(K) \ , \quad (\mu_1 \star \mu)(h) \geqslant 0 \ ,$$

on a :

$$\int h(xy) \ d\mu_1(x) \ d\mu(y) \geqslant 0 \quad \text{ou encore} \quad \int d\mu(y) \int h(xy) \ d\mu_1(x) \geqslant 0$$

pour toute mesure μ , donc,

$$\forall\, y \in K\,, \qquad 0 \leqslant \int h(xy)\, d\mu_1(x) = (\mu_1 \star \check{h})(y^{-1}) \quad \text{avec} \quad \check{h}(x) = h(x^{-1}) \quad .$$

Donc, $\forall\, y \in K$, on a :

$$(1) \qquad (\mu_2 \star \check{h})(y) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\mu_2 \star \check{h})(x) = \mu_2(h) \geqslant 0 \quad .$$

LEMME 3. - Soient K un groupe compact, X et Y deux espaces homogènes compacts sur K, et θ une application de X dans $\mathfrak{M}^1(Y)$, vérifiant :

$$\theta(kx) = \varepsilon_k \star \theta(x) \quad \text{pour} \quad k \in K\,, \quad x \in X\,,$$

$$\forall\, \mu \in \mathfrak{M}(K)\,, \quad \forall\, x \in X\,, \qquad \mu \star \theta(x) \geqslant 0 \implies \mu \star \varepsilon_x \geqslant 0 \quad .$$

Alors il existe une application $j : Y \longrightarrow X$ telle que, pour $x \in X$, $j^{-1}(x)$ soit le support de $\theta(x)$.

Démonstration. - Il suffit évidemment de démontrer que $\{\mathrm{Supp}(\theta(x))\}_{x\in X}$ est une partition de Y.

C'est évidemment un recouvrement d'après (1), puisque, si $x_0 \in X$,

$$y_0 \in \mathrm{Supp}(\theta(x)) \neq \emptyset \quad (\text{masse} \ \ 1\ ) \ ;$$

pour tout $y \in Y$, il existe $k \in K$, $ky_0 \in Y$, et alors $y \in \mathrm{Supp}(\theta(kx_0))$.

Pour montrer qu'il s'agit en fait d'une partition, nous allons voir que :

$$k \in K\,, \quad y_0 \quad \text{et} \quad ky_0 \in \mathrm{Supp}(\theta(x_0)) \implies kx_0 = x_0 \quad .$$

Relevons les mesures dans X et Y par rapport à x_0 et y_0 comme il a été décrit plus haut. Soient $\nu_0 = \theta(x_0)$, K_1 et K_2 les stabilisateurs de x_0 et y_0 ; on a :

$$\begin{array}{ll} & \forall\, \mu \in \mathfrak{M}(K)\,, \quad \mu \star \nu_0 \geqslant 0 \implies \mu \star \varepsilon_{x_0} \geqslant 0 \\ & \text{ou} \\ (2) & \forall\, \mu \in \mathfrak{M}(K)\,, \quad \overline{\mu \star \nu_0} \geqslant 0 \implies \overline{\mu \star \varepsilon_{x_0}} \geqslant 0 \\ & \text{ou} \\ & \forall\, \mu \in \mathfrak{M}(K)\,, \quad \mu \star \overline{\nu_0} \geqslant 0 \implies \mu \star m_{K_1} \geqslant 0 \quad . \end{array}$$

On peut appliquer le lemme 3 : il existe $\omega \in \mathfrak{M}^+(K)$, $m_{K_1} = \overline{\nu_0} \star \omega$; en particulier, $\mathrm{Supp}\ \overline{\nu_0} \subset K_1$, et comme

$$ky_0 \in \mathrm{Supp}(\nu_0) \implies k \in \mathrm{Supp}(\overline{\nu_0}) \quad ,$$

on a $kx_0 = x_0$.

5. Frontière d'un groupe.

DÉFINITION 4. - Soit G un groupe localement compact à base dénombrable ; un espace homogène compact sur G est une frontière si, pour toute mesure π sur X, de masse totale 1, il existe une suite (g_n), $g_n \in G$, telle que $\varepsilon_{g_n} \star \pi$ tende vaguement vers une masse ponctuelle.

LEMME 4. - Si B_1 est une frontière de G, B un espace homogène séparé sur G, j un homomorphisme continu de B_1 sur B, alors B est une frontière.

Démonstration. - Soient $x_0 \in B_1$, $y_0 = j(x_0)$, H_1 et H_2 les stabilisateurs de x_0, y_0 : on a $H_1 \subset H_2$. Soit encore φ_2 une fonction continue à support compact de H_2 d'intégrale 1 sur H_2. Relevons alors, comme il est décrit plus haut, une mesure donnée $\mu \in \mathfrak{M}^1(B)$ (B est compact) en une mesure $\overline{\mu} \in \mathfrak{M}^1(G)$; soit ν l'image de $\overline{\mu}$ dans B_1, relativement à x_0. Il est immédiat que ν a pour image μ par j (c'était déjà le cas de $\overline{\mu}$ relativement à y_0). Alors, si $g_n \in G$ tel que $g_n \nu$ tende vers une mesure ponctuelle, $g_n \mu$ tend a fortiori vers une mesure ponctuelle.

LEMME 5. - Si B_1 est une frontière de G, et si j_1 et j_2 sont deux homomorphismes continus de B_1 sur un espace homogène séparé B, on a $j_1 = j_2$. En particulier, le seul endomorphisme de B_1 est l'identité. (Nous noterons (U) cette propriété.)

Démonstration. - Il suffit de montrer qu'il existe $x_0 \in B$ tel que $j_1(x_0) = j_2(x_0)$. Or si $x \in B_1$ fixé, posons

$$\pi = \frac{1}{2}\{\delta_{j_1(x)} + \delta_{j_2(x)}\} \quad .$$

Il existe une suite g_n telle que $g_n \pi$ tende faiblement vers une mesure ponctuelle. En extrayant éventuellement une suite, puisque B_1 est un compact métrisable, on peut supposer que $g_n x$ tend vers un point x_0. Alors $\delta_{j_1(x)}$ tend vers $\delta_{j_1(x_0)}$, $\delta_{j_2(x)}$ tend vers $\delta_{j_2(x_0)}$, et puisque $\frac{1}{2}(\delta_{j_1(x_0)} + \delta_{j_2(x_0)})$ est ponctuelle,

$$j_1(x_0) = j_2(x_0) \quad .$$

6. Rappel sur les représentations intégrales.

THÉORÈME 1. - Soit E un espace vectoriel topologique faible séparé, et soit X un cône convexe saillant faiblement complet ; on suppose que X est bien coiffé, que ses chapeaux sont métrisables, et on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points des génératrices extrémales de X. Alors, tout point de X est résultante d'une mesure conique maximale, localisable sur un chapeau en une mesure de Radon positive portée par $\mathcal{E}$ (voir G. CHOQUET [4]). Si, de plus, X est réticulé, la mesure conique en question est unique.

Si X admet une base fermée B, la mesure conique peut se localiser sur cette base en une mesure (positive) au sens de L. SCHWARTZ [10], portée par $B \cap \mathcal{E}$ et de masse finie. Si alors X est aussi réticulé, cette mesure est unique.

On en tire le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Soit C un cône convexe saillant faiblement fermé, de mesures positives, sur un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts : C est bien coiffé, ses chapeaux sont métrisables. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points des génératrices extrémales : tout point est résultante d'une mesure de Radon portée par l'intersection de $\mathcal{E}$ et d'un chapeau.

Si ψ est une fonction continue à support compact, telle que $\pi(\psi) > 0$ pour tout $\pi \in C$, et si $C_1 = \{\pi \mid \pi(\psi) = 1\}$, toute $\pi \in C$ est résultante d'une mesure sur C_1 portée par $C_1 \cap \mathcal{E}$.

Si enfin C est réticulé, cette dernière mesure est unique, et si ν est une mesure sur C_1, portée par $\mathcal{E} \cap C_1$ et ayant une résultante dans C, ν est positive.

Comme application, nous allons démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Soient G un groupe localement compact à base dénombrable, T un sous-groupe fermé, K un sous-groupe compact, tels que $TK = G$. Si une mesure positive π_0 sur G vérifie :

$$\forall\ t \in T\ , \qquad \varepsilon_t \star \pi_0 = \chi(t)\ \pi_0 \quad \text{avec} \quad \chi(t) \in \underset{\sim}{R} \quad \text{et} \quad \pi_0 \neq 0\ ,$$

alors :

χ est une exponentielle sur T bien déterminée,

$\pi_0 = m_T^{\chi} \star \mu_1$ pour une mesure positive μ_1 sur K avec $m_T^{\chi} = \chi^{-1}\ m_T$.

Démonstration. - Il est immédiat que $\chi(t_1\ t_2) = \chi(t_1)\ \chi(t_2)$ puisque

$$\varepsilon_{t_1} \star \varepsilon_{t_2} \star \pi_0 = \varepsilon_{t_1 t_2} \star \pi_0\ .$$

La continuité de χ en e résulte de celle de $(\varepsilon_t \star \pi_0)(\varphi)$ (pour une fonction φ telle que $\pi_0(\varphi) \neq 0$). Soit

$$C = \{\pi \mid \pi \in \mathfrak{M}^+(G)\ ,\ \ \forall\ t \in G\ ,\ \ \varepsilon_t \star \pi = \chi(t)\ \pi\}\ ;$$

c'est un cône convexe, saillant, vaguement fermé. Montrons qu'une mesure extrémale est portée par une seule classe à gauche modulo T : si $A \subset G$ est invariant à gauche par T $(TA = A)$, et si $\pi \in C$, $1_\Delta \pi$ est aussi dans C, donc si π est extrémale, $\pi = 1_\Delta \pi + 1_{C\Delta} \pi$ entraîne que l'un des termes de la somme est nul, puisqu'ils doivent être proportionnels, et donc que π a son support contenu dans une classe. Soit $T\gamma$, $\gamma \in K$, cette classe, et $\pi' = \pi \star \varepsilon_{\gamma^{-1}}$; π est portée par T et vérifie $\varepsilon_t \star \pi' = \chi(t)\,\pi'$. Par suite, $\chi\pi' = \pi''$ vérifie $\varepsilon_t \star \pi'' = \pi''$ et $\pi'' = \alpha m_T$ où $\alpha \in \underset{\sim}{R}$. En récapitulant, on voit que les mesures extrémales sont de la forme $\alpha m_T^\chi \star \varepsilon_\gamma$, où l'on peut se limiter à $\gamma \in K$. Soit alors ψ une fonction continue égale à 1 sur le support de K, à support compact. Pour $\pi \in C$, $\pi(\psi) \neq 0$, car $\pi(\psi) = 0 \implies \varepsilon_t \star \pi(\psi) = 0$, et puisque $KT = G$, $\pi = 0$. Soit C_1 la base définie par ψ : les points extrémaux de C_1 s'écrivent

$$\alpha(\gamma)\ m_T^\chi \star \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma$$

où $\alpha(\gamma) = \dfrac{1}{\int \psi(g\gamma)\ dm_T^\chi(g)} \neq 0$ est continue : $C_1 \cap \mathcal{E}$ est homéomorphe à K. On sait que, puisque $\pi_0 \in C$, il existe μ sur $C_1 \cap \mathcal{E}$ dont la résultante est π_0, donc, avec $e_\gamma = m_T^\chi \star \varepsilon_\gamma$

$$\int f(g)\ d\pi_0(g) = \int_{C_1 \cap \mathcal{E}} \int \alpha(\gamma)\ f(g\gamma)\ dm_T^\chi\ d\mu(e_\gamma)$$

ou encore, en transportant μ sur K :

$$\int f(g)\ d\pi_0(g) = \int_K \int_G \alpha(\gamma)\ d(g\gamma)\ dm_T^\chi\ d\mu(\gamma) \quad ,$$

d'où la réponse, en posant $\mu_1 = \alpha\mu$.

Nous appliquons dans la suite, le corollaire général à la situation suivante : G est un groupe localement compact, à base dénombrable d'ouverts, $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille commutative de mesures positives à supports compacts

$$\mu_\alpha \star \mu_\beta = \mu_\beta \star \mu_\alpha \ , \quad \forall\ \alpha\ , \beta \in A$$

et

$$C = \{\pi \mid \pi \in \mathfrak{M}^+(G)\ ,\ \forall\ \alpha \in A\ ,\ \mu_\alpha \star \pi = \pi\} \quad .$$

Du fait que μ_α est à support compact, C est faiblement fermé : nous pouvons appliquer au cône C les résultats rappelés.

De plus, nous avons :

PROPOSITION 2. - C <u>est réticulé</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soient π_1 et $\pi_2 \in C$, $\pi' = \inf(\pi_1, \pi_2)$ dans $\mathfrak{M}^+(G)$. Soit S le semi-groupe de mesures engendré par $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$;

$$S \star \pi' = \{\mu \star \pi' \mid \mu \in S\} .$$

On a $\mu \star \pi' \leqslant \mu \star \pi_i = \pi_i$ pour $i = 1 , 2$, donc $\mu \star \pi' \leqslant \pi'$. G étant à base dénombrable, S est séparable, soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans S . Montrons que $S \star \pi'$ admet une borne inférieure

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \mu_1 \star \mu_2 \star \dots \star \mu_n \star \pi' .$$

Cette limite existe car la suite est décroissante. On a $\mu_p \star \pi' \geqslant \pi$ pour $p \in \mathbb{N}$, donc $\pi \leqslant \mu \star \pi'$ pour $\mu \in S$: π est un minorant. Si ϖ est un minorant, on a

$$\varpi \leqslant \mu_1 \star \mu_2 \star \dots \star \mu_n \star \pi'$$

donc $\varpi \leqslant \pi$: π est la borne inférieure de $S \star \pi'$.

Il en résulte que, pour $\mu \in S$, $\mu \star \pi \leqslant \pi$ ($\mu \star \pi$ est aussi un minorant : $\mu \star \pi' \leqslant \pi'$) , donc $\mu \star \pi = \pi$ puisque $\pi \leqslant \mu \star \pi$ résulte de $\pi \leqslant \mu \star \nu \star \pi'$ pour $\nu \in S$.

Comme $\pi \leqslant \pi'$, $\pi_1 - \pi$, $\pi_2 - \pi$ sont positives, et puisque $\mu \star \pi = \pi$ pour $\mu \in S$: $\pi_1 - \pi$ et $\pi_2 - \pi$ sont dans C . Si $\pi_1 - \tilde{\pi}$ et $\pi_2 - \tilde{\pi}$ sont dans C , on a $\tilde{\pi} \leqslant \pi'$ et, pour $\mu \in S$, $\tilde{\pi} = \mu \star \tilde{\pi} \leqslant \mu \star \pi'$, donc $\tilde{\pi} \leqslant \pi$ et $\pi - \tilde{\pi} \in C$; donc $\pi = \inf(\pi_1 , \pi_2)$.

I. Multiplicateurs et fonctions semi-sphériques

1. Multiplicateurs.

DÉFINITION 5. - *Soient G un groupe localement compact et X un espace homogène sur G . Nous appellerons multiplicateur, une fonction $s : G \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ continue et vérifiant :*

$$\forall\ g_1\ g_2 \in G ,\quad x \in X ,\qquad s(g_1\ g_2 , x) = s(g_1 , g_2\ x)\ s(g_2 , x) .$$

Nous noterons $M(X)$ l'ensemble des multiplicateurs sur $G \times X$ (nous n'envisagerons des multiplicateurs que relativement au groupe appelé G dans toute la suite).

Remarques.

Si S_x désigne le stabilisateur de $x \in X$, $s(. , x)$ est une exponentielle sur S_x pour $s \in M(X)$.

Si p est une fonction continue sur X , à valeur dans $\mathbb{R}^{*+}$, on définit un multiplicateur s par $s(g , x) = \frac{p(gx)}{p(x)}$ (la vérification est immédiate) ; un tel multiplicateur sera dit trivial : nous noterons $B(X)$ l'ensemble des multiplicateurs triviaux.

Il est évident que $M(X)$ et $B(X)$ sont des groupes multiplicatifs commutatifs pour la multiplication des fonctions. Nous noterons $H(X) = \frac{M(X)}{B(X)}$. Il n'est pas difficile de voir que $H(X)$ est le premier groupe de cohomologie de G à valeurs dans $\mathcal{C}(X , \underset{\sim}{R}^{*+})$.

Nous ferons usage du multiplicateur suivant : X étant une classe d'intransitivité de G sur $\mathcal{C}^1(G)$ (où G opère par D^1 par exemple), on posera, pour $g \in G$, $f \in X$:

$$s(g , f) = f(g) \quad .$$

La continuité est immédiate, et l'on a bien :

$$s(g_1 g_2 , f) = f(g_1 g_2)$$

$$= \frac{f(g_1 g_2)}{f(g_2)} f(g_2) = (D^1_{g_2}(f))(g_1) f(g_2) = s(g_1 , D^1_{g_2} f) s(g_2 , f) \quad .$$

Si s est l'élément de $B(G)$ associé à f, on a $f(g) = s(g , e)$ pourvu que $f(e) = 1$. On a d'ailleurs

$$M(G) = B(G) \text{ , et } H(G) = \{1\} \quad .$$

Plus généralement :

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> K <u>est compact</u>, $H(G/K) = \{1\}$.

<u>Démonstration</u>. - Si $s \in M(G/K)$, $s(. , K)$ est une exponentielle sur K, qui est compacte, donc vaut 1 sur K. Si alors $k \in K$ et $g \in G$, on a

$$s(gk , K) = s(g , kK) s(k , K) = s(g , K) \quad ,$$

et $s(g , K)$ ne dépend que de la classe de g dans G/K ; posons $s(g , K) = p(\dot{g})$, où $\dot{g} = gK$: p est évidemment continue sur G/K. On a

$$s(g , g'K) = \frac{s(gg' , K)}{s(g' , K)} = \frac{p(gg'K)}{p(g'K)} \quad ,$$

donc

$$s \in B(G/K) \text{ et } B(G/K) = M(G/K) \quad ,$$

et $H(G/K) = \{1\}$.

DÉFINITION 6. - <u>Soit</u> K <u>un sous-groupe de</u> G ; $\sigma \in M(X)$ <u>est un</u> K-<u>multiplicateur si</u> $\sigma = 1$ <u>sur</u> $K \times X$. <u>Les</u> K-<u>multiplicateurs forment un groupe</u> $M_K(X)$.

PROPOSITION 4. - Soient X un espace sur G, et K compact $\subset G$. Alors l'application naturelle de $M_K(X) \longrightarrow H(X)$ est surjective. De plus, si K est transitif sur X, cette application est un isomorphisme.

Démonstration.

Si $s \in M(X)$, et σ défini par :

$$\sigma(g , \xi) = \frac{\int_K s(kg , \xi)\, dk}{\int_K s(k , \xi)\, dk} = \frac{\int_K s(k , g\xi)\, dk}{\int_K s(k , \xi)\, dk}\, s(g , \xi)$$

pour $g \in G$, $\xi \in X$: σ est un K-multiplicateur comme produit de deux multiplicateurs (deuxième forme), il est trivial sur K (première forme), et équivalent à s (deuxième forme). Ceci montre que l'application composée :

$$M_K(X) \longrightarrow M(X) \longrightarrow H(X)$$

est surjective.

Si K est transitif sur X, et si $\sigma \in M_K(X)$ est trivial, on a

$$\sigma(g , \xi) = \frac{p(g\xi)}{p(\xi)} .$$

K étant transitif, on a $\frac{p(k\xi)}{p(\xi)} = 1$ pour $k \in K$, donc p constant et $\sigma = 1$.

Nous allons donner deux lemmes faisant apparaître des multiplicateurs.

LEMME 6. - Si G est un groupe localement compact, K un sous-groupe compact, T un sous-groupe fermé tel que $G = KT$, χ une exponentielle positive sur T, $m_T^\chi = \chi^{-1} m_T$, alors $m_K \star m_T^\chi$ est absolument continue, et sa densité est donnée par $\lambda\sigma(. , T)$ où $\sigma \in M_K(G/T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

Démonstration. - $m_T^\chi = \chi^{-1} m_T$ vérifie

$$\varepsilon_t \star m_T^\chi = \chi(t)\, m_T^\chi \quad \text{et} \quad m_T^\chi \star \varepsilon_t = \frac{\chi(t)}{\Delta_T(t)}\, m_T^\chi .$$

Posons $\chi' = \frac{\chi}{\Delta_T}$ et $\nu = m_K \star m_T^\chi$. Pour $g = kt$, $m_K \star \varepsilon_g \star m_T^\chi = c\nu$, donc, pour ω à support compact,

$$m_K \star \omega \star m_T^\chi = c(\omega)\nu \quad \text{où} \quad c(\omega) \in \mathbb{R} .$$

Prenant une fonction φ continue à support compact, on a :

$$(m_K \star \varphi) \star (\varphi \star m_T^\chi) = c(\varphi \star \varphi)\nu$$

et l'on voit que ν est absolument continue et à densité continue. Soit $\nu = f m_G$.

De $\varepsilon_k \star \nu = \nu$ et $\nu \star \varepsilon_t = \chi'(t)\nu$ pour $t \in T$, $k \in K$, on tire :

$$f(kg) = f(g) \quad \text{et} \quad f(gt) = \chi'(t^{-1})\, f(g) \qquad \text{pour} \quad t \in T \ , \quad k \in K \ .$$

f ne s'annule pas : si $f(g_0) = 0$, $f(kg_0\, t) = 0$ pour $k \in K$ et $t \in T$ et $f = 0$, ce qui n'est pas. Posons donc $\sigma(g , \gamma T) = \frac{f(g\gamma)}{f(\gamma)}$. C'est légitime puisque

$$\frac{f(g\gamma t)}{f(\gamma t)} = \frac{f(g\gamma)\,\chi'(t^{-1})}{f(\gamma)\,\chi'(t^{-1})} = \frac{f(g\gamma)}{f(\gamma)} \quad \text{pour} \quad t \in T \ .$$

Il est immédiat que σ est un multiplicateur et qu'il vaut 1 sur $K \times G/T$ puisque $f(kg) = f(g)$ pour $k \in K$. On a bien

$$f(g) = f(e)\,\sigma(g , T) \ ,$$

et l'énoncé est établi avec $\lambda = f(e)$.

LEMME 7. - Soient G un groupe localement compact à base dénombrable, K un sous-groupe compact de G , X et Y deux espaces homogènes séparés sur G , et un homomorphisme j de X sur Y . On suppose que K est transitif sur X , donc sur Y .

Il existe alors une application unique $y \longmapsto \theta_y$ de Y dans $\mathfrak{M}^1(X)$ telle que:

θ_y a pour support $j^{-1}(y)$,

pour tout $k \in K$, $\theta_{ky} = \varepsilon_k \star \theta_y$.

Cette application vérifie en outre que, pour tout $g \in G$, $\varepsilon_{g^{-1}} \star \theta_{gy}$ est absolument continue par rapport à θ_y ; sa densité est continue sur $j^{-1}(y)$, et l'application

$$(g , x) \longmapsto \sigma(g , x) = \frac{d\varepsilon_{g^{-1}} \star \theta_{gj(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x) \ ,$$

qui est bien déterminée, est continue, et σ est un K-multiplicateur.

Démonstration. - Pour $y \in Y$, nous noterons S_y le stabilisateur de y dans G , et $K_y = K \cap S_y$ le stabilisateur de y dans K .

Il est immédiat que $j^{-1}(y)$ est un espace homogène sur K_y , et comme

$$\varepsilon_k \star \theta_y = \theta_y \quad \text{pour} \quad y \in K_y \ ,$$

θ_y est nécessairement la mesure K_y invariante, de masse totale 1 , de $j^{-1}(y)$. Il est alors évident que

$$\operatorname{Supp} \theta_y = j^{-1}(y) \ ;$$

comme $K_{ky} = kK_y k^{-1}$, pour $s \in K_{ky}$, on a $s = ks'k^{-1}$ avec $s' \in K_y$, donc

$$\varepsilon_s \star \varepsilon_k \star \theta_y = \varepsilon_k \star \varepsilon_{s'} \star \varepsilon_{k^{-1}} \star \varepsilon_k \star \theta_y = \varepsilon_k \star \varepsilon_{s'} \star \theta_y = \varepsilon_k \star \theta_y \quad ,$$

et $\varepsilon_k \star \theta_y = \theta_{ky}$.

Il reste à vérifier que cette application a les propriétés annoncées. Fixons $y \in Y$ et $x_0 \in j^{-1}(y)$, et notons N_{x_0} le stabilisateur de x_0 . Nous savons déjà que θ_y est l'image de m_{K_y} dans l'application $K \longrightarrow K/K \cap N_{x_0} \simeq X$; mais on peut aussi l'écrire, dans l'application composée $S_y \longrightarrow S_y/N_{x_0} \longrightarrow X$, comme image d'une fonction $\varphi \in \mathcal{K}^+(S_y)$, invariante par K_y , et telle que

$$\int \varphi(k)\, dm_{S_y}(k) = 1 \quad .$$

Compte tenu de $KN_{x_0} = G$, on peut écrire $g = kn$ où $k \in K$, $n \in N_{x_0}$; alors $gy = ky$ et $\theta_{gy} = \varepsilon_k \star \theta_y$, donc

$$\varepsilon_{g^{-1}} \star \theta_{gy} = \varepsilon_{n^{-1}} \star \theta_y \quad .$$

Cette mesure est l'image de la translatée de φ par n dans l'application $S_y \longrightarrow X$. Choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{K}^+(S_y)$, invariante par K_y , constante non nulle sur le support de $\varepsilon_{n^{-1}} \star \varphi$ et telle que $\int \psi(k)\, dm_{S_y}(k) = 1$. On voit que dans l'application $S_y \longrightarrow X$, $\varepsilon_{n^{-1}} \star \varphi$ a pour image $\varepsilon_{n^{-1}} \star \theta_y$ et que ψ a pour image θ_y . Or il existe une fonction $\rho_1 \in \mathcal{K}^+(S_y)$ telle que $\varepsilon_{n^{-1}} \star \varphi = \rho_1 \psi$, et d'après le lemme 7 $(\chi = 1)$, il existe $\rho_2 \in \mathcal{C}^+(S_y)$ telle que

$$\rho_2\, m_{K_y} \star m_{N_{x_0}} = m_{S_y}$$

(car $K_y N_{x_0} = S_y$ est immédiat). Posons $\rho = \rho_1 \rho_2$, on a, pour $f \in \mathcal{C}(X)$:

$$\int_X f(x)\, d(\varepsilon_{n^{-1}} \star \theta_y)(x) = \int_G f(gx_0)\, d(\varepsilon_{n^{-1}} \star \varphi m_{S_y})(g)$$

$$= \int_G f(gx_0)\, \rho(g)\, d(m_{K_y} \star m_{N_{x_0}})(g) = \int_{K_y} \int_{N_{x_0}} f(kgx_0)\, \rho(kg)\, dm_{K_g}(k)\, dm_{N_{x_0}}(g) \quad ,$$

et, puisque $gx_0 = x_0$,

$$= \int_{K_y} f(kx_0)\, dm_{K_y}(k) \int_{N_{x_0}} \rho(kg)\, dm_{N_{x_0}}(g) \quad .$$

Si on pose $\delta(k) = \int_{N_{x_0}} \rho(kg)\, dm_{N_{x_0}}(g)$, cette fonction est continue et

$$\int_X f(x)\, d(\varepsilon_{n^{-1}} \star \theta_y)(x) = \int_{K_y} f(kx_0)\, \delta(k)\, dm_{K_y}(k) = \int_X f(x)\, \overline{\delta}(x)\, d\theta_y(x) \quad ,$$

avec $\overline{\delta}(x) = \delta(k)$. Si $x = kx_0$ (puisque invariante par N_{x_0}), ceci montre que $(\varepsilon_{n^{-1}} \star \theta_y)(x)$ est absolument continue par rapport à θ_y et de densité $\overline{\delta}$ sur $j^{-1}(y)$.

De la démonstration précédente, il résulte aussi que :

$$\sigma : (g , x) \longrightarrow \frac{d\varepsilon_{g^{-1}} \quad \theta_{gj(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x)$$

est continue sur $N_{x_0} \times j^{-1}(x)$: il suffit de voir que l'on peut choisir ψ valable pour n dans un ouvert relativement compact, $\varepsilon_{n^{-1}} \star \varphi$ dépend alors uniformément de n , donc aussi δ et $\overline{\delta}$, ce qui suffit.

Avant d'achever la démonstration de la continuité, montrons les propriétés algébriques :

$\sigma(k , x) = 1$ si $k \in K$, car $\theta_{kj(x)} = \varepsilon_k \star \theta_{j(x)}$.

$\sigma(g_1 g_2 , x) = \sigma(g_1 , g_2 x)\, \sigma(g_2 , x)$:

$$\frac{d\varepsilon_{(g_1g_2)^{-1}} \star \theta_{g_1g_2j(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x)$$

$$= \frac{d\varepsilon_{g_2^{-1}} \star \varepsilon_{g_1^{-1}} \star \theta_{g_1j(g_2x)}}{d\varepsilon_{g_2^{-1}} \star \theta_{j(g_2x)}}(x) \times \frac{d\varepsilon_{g_2^{-1}} \star \theta_{j(g_2x)}}{d\theta_{j(x)}}(x)$$

$$= \frac{d\varepsilon_{g_1^{-1}} \star \theta_{g_1j(g_2x)}}{d\theta_{j(g_2x)}}(g_2\, x) \times \frac{d\varepsilon_{g_2^{-1}} \star \theta_{g_2j(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x) = \sigma(g_1 , g_2\, x).\sigma(g_2 , x) \quad .$$

Nous voyons alors que l'on peut définir $\overline{\sigma}(\dot{g} , x)$ pour $\dot{g} \in K\backslash G$ et $x \in X$, car

$$\sigma(kg , x) = \sigma(k , gx)\, \sigma(g , x) = \sigma(g , x) \quad \text{si} \quad k \in K \quad ;$$

donc $\overline{\sigma}$ étant défini sur $K\backslash G \times X$, σ est continu si, et seulement si, $\overline{\sigma}$ est continu. Or $\overline{\sigma}$ est continu sur $(K \cap N_{x_0})\backslash N_{x_0}$ puisque σ est continu sur $N_{x_0} \times X$; puisque l'application $(K \cap N_{x_0})\backslash N_{x_0} \longrightarrow K\backslash G$ est continue et bijective

$(KN_{x_0} = G)$, il suffit de montrer que sa réciproque est continue.

Considérons pour cela, puisque G est métrisable, K compact et $K\backslash G$ métrisable, une suite $\dot{g}_p$ de $K\backslash G$ tendant vers $\dot{g} \in K\backslash G$, et des représentants $\dot{g}_p$ et g de ces éléments dans G tels que g_p tende vers g (c'est possible grâce à la définition de la métrique sur $K\backslash G$). Ecrivons alors $g_p = k_p\, n_p$, $g = kn$ avec k , $k_p \in K$ et n_p , $n \in N_{x_0}$. Nous allons montrer, par l'absurde, que $\dot{n}_p \longrightarrow \dot{n}$ dans $(K \cap N_{x_0})\backslash N_{x_0}$. Supposons donc que $\dot{n}_p$ ne tende pas vers $\dot{n}$, il existe un ouvert 0 de N_{x_0} , voisinage ouvert de n invariant par $K \cap N_{x_0}$ à droite, tel qu'il y ait une infinité de n_p en dehors de 0 . En extrayant une suite n_{p_i} , on peut supposer qu'aucun n_{p_i} n'est dans 0 ; en procédant éventuellement à une seconde extraction, on peut supposer que k_{p_i} converge vers $k' \in K$. Alors

$$n_{p_i} = k_{p_i}^{-1}\, g_{p_i} \quad \text{tend vers} \quad k'^{-1} g = n' \ .$$

On a $g = k'n' = kn$, donc $k^{-1}\, k' = nn'^{-1}$ est dans $K \cap N_{x_0}$; par suite $n \in 0$, et $n' = k'^{-1}\, kn$ entraîne $n' \in 0$, ce qui est absurde. Donc $(K \cap N_{x_0})\backslash N_{x_0} \simeq K\backslash G$ et le lemme est établi.

Nous allons, pour finir, introduire une classe particulière de multiplicateurs. Pour x et $y \in E^+$, E espace vectoriel réticulé, nous noterons $x \succ y$ s'il existe $\lambda > 0$ tel que $x \geqslant \lambda y$. Nous avons le lemme algébrique :

LEMME 8. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces vectoriels réticulés, et</u> f <u>une application de</u> E <u>dans</u> F . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $\forall\, x\, ,\, y \in E^+ ,\quad f(x) \geqslant f(y) \implies x \geqslant y$,

(b) $\forall\, x \in E ,\qquad f(x) \geqslant 0 \implies x \geqslant 0$,

(c) $\forall\, x\, ,\, y \in E^+ ,\quad f(x) \succ f(y) \implies x \succ y$.

<u>Démonstration</u>.

(a) $\iff$ (b) . C'est évident.

Réciproquement, (c) $\implies$ (a) : si $f(x) \geqslant f(y)$, $x \in E^+$, $y \in E^+$; on a déjà $x \succ y$, donc il existe $\lambda > 0$, $x \geqslant \lambda y$. Choisissons λ_0 (qui existe) maximum avec cette propriété. Si $\lambda_0 \geqslant 1$, la propriété est établie. Si $\lambda_0 < 1$,

$$x - \lambda_0\, y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x - \lambda y) = f(x) - \lambda f(y) \geqslant (1 - \lambda) f(y) \quad ;$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x - \lambda y \geqslant \varepsilon y$ et $x \geqslant (\lambda + \varepsilon) y$, ce qui est absurde

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 9. - Soit $s \in M(X)$; les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall\ \omega \in \mathfrak{M}(X)$, $\forall\ g$,

$$\int s(g\ ,\ x)\ d\omega(x) \geqslant 0 \implies \omega \geqslant 0\ ,$$

(b) $\forall\ \omega_1\ ,\ \omega_2 \in \mathfrak{M}^+(X)$, $\exists\ \lambda > 0$, $\forall\ g$,

$$\int s(g\ ,\ x)\ d\omega_1(x) \geqslant \lambda \int s(g\ ,\ x)\ d\omega_2(x) \implies \omega_1 \succ \omega_2\ ,$$

(c) l'ensemble des fonctions $s(g\ ,\ .)$, pour $g \in G$, engendre $\mathcal{K}^+(X)$.

Démonstration.

(a) $\iff$ (b) résulte du lemme ci-dessus :

$$f\ :\ \mathfrak{M}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(G)\ ,\qquad f(\omega) = \int s(g\ ,\ x)\ d\omega(x)\ .$$

(a) $\iff$ (c) s'obtient en appliquant le théorème de Hahn-Banach.

DÉFINITION 7. - Un multiplicateur, vérifiant l'une des conditions équivalentes ci-dessus, est dit basique.

Remarque. - Si s est basique, les fonctions $s(.\ ,\ x)$ sont toutes distinctes ; s ne peut passer à l'image dans aucune image homomorphe de X .

Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

LEMME 10. - Si X est compact et si $s_1\ ,\ s_2 \in M(X)$, alors s_1 et s_2 sont équivalentes (modulo $B(X)$) ; s_1 basique $\iff$ s_2 basique.

Démonstration. - X étant compact, on a $s_1 \succ s_2 \succ s_1$, d'où l'équivalence d'après (b) du lemme 9.

2. Fonctions semi-sphériques et sphériques.

Soient G un groupe localement compact, K un sous-groupe compact de G , dont nous noterons m_K la mesure de Haar de masse totale 1 .

DÉFINITION 8. - Une fonction numérique Φ continue sur G est dite K-sphérique (plus brièvement : sphérique) si elle n'est pas identiquement nulle et si, pour tout $g_1\ ,\ g_2 \in G$, on a :

$$\int_K \Phi(g_1\ kg_2)\ dk = \Phi(g_1)\ \Phi(g_2)\ .$$

Remarques.

Φ est invariante à droite et à gauche par K .

$\Phi(e) = 1$, car $\int_K \Phi(k)\,dk = \Phi(e)$, puisque $\Phi(k) = \Phi(e)$ pour $k \in K$; et

$$\int_K \Phi(eke)\,dk = \Phi(e)\,\Phi(e) = \Phi(e) \quad .$$

Une fonction sphérique Φ vérifie la famille d'équations :

$$m_K \star \varepsilon_{g^{-1}} \star \Phi = \Phi(g)\,\Phi \quad .$$

Si $K = \{e\}$, Φ est une exponentielle.

Plus généralement, considérons sur $\mathfrak{M}(G)$ l'opérateur A_γ défini par

$$A_\gamma(\pi) = m_K \star \varepsilon_{\gamma^{-1}} \star \pi \quad .$$

A_γ est un opérateur continu pour la topologie vague, car $m_K \star \varepsilon_{\gamma^{-1}}$ est à support compact.

Considérons une mesure π qui soit vecteur propre pour tous les opérateurs A_γ $(\pi \neq 0)$. Il existe donc une fonction $\lambda(\gamma)$ bien déterminée telle que $A_\gamma \pi = \lambda(\gamma)\pi$.

$\lambda(\gamma)$ est une fonction continue, car si $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ et $\pi(\varphi) \neq 0$, $A_\gamma\,\pi(\varphi)$ est une fonction continue de γ (car $\gamma \longrightarrow \varepsilon_{\gamma^{-1}} \star \pi$ est une fonction continue, pour la topologie vague sur $\mathfrak{M}(X)$).

Alors soit μ une mesure à support compact, on a :

$$m_K \star \mu \star \pi = \int \lambda(\gamma^{-1})\,d\mu(\gamma).\pi = \check{\lambda}(\mu)\pi \ ,$$

avec $\check{\lambda}(\mu) = \int \lambda(\gamma^{-1})\,d\mu(\gamma)$ (ainsi $\check{\lambda}(\varepsilon) = \lambda(\gamma^{-1})$).

Prenons pour μ la mesure définie par $d\mu(g) = \varphi(g)\,dg$ où φ est une fonction positive, continue, à support compact, et qui n'est pas identiquement nulle. L'égalité $m_K \star \mu \star \pi = \check{\lambda}(\mu)\pi$, où $\check{\lambda}(\mu) \neq 0$, entraîne que π est absolument continue et définie par une fonction continue. Ceci est encore vrai si $\pi = 0$.

DÉFINITION 9. - <u>On appelle fonction semi-sphérique</u>, <u>un vecteur propre de tous les opérateurs</u> A_γ . <u>Nous avons démontré qu'un tel vecteur est effectivement une fonction continue</u>.

Soient f une fonction semi-sphérique, non identiquement nulle, et $\lambda(\gamma)$ défini par $A_\gamma f = \lambda(\gamma) f$. On a

$$A_{\gamma_2} A_{\gamma_1} f = A_{\gamma_2} \lambda(\gamma_1) f = \lambda(\gamma_1)\,\lambda(\gamma_2) f \quad .$$

Mais aussi :

$$A_{\gamma_2} A_{\gamma_1} f(g) = \int_K \int_K f(\gamma_1 k\gamma_2 k'g)\, dk\, dk' = \int_K dk \int_K f(\gamma_1 k\gamma_2 k'g)\, dk'$$

$$= \int_K \lambda(\gamma_1 k\gamma_2)\, f(g)\, dk$$

donc

$$\int_K \lambda(\gamma_1 k\gamma_2)\, dk.f(g) = \lambda(\gamma_1)\, \lambda(\gamma_2)\, f(g)$$

et comme f est non identiquement nulle, ceci montre que λ est une fonction sphérique.

PROPOSITION 5. - *On dira qu'une fonction* f *continue appartient à la fonction sphérique* Φ *si* $A_\gamma f = \Phi(\gamma)f$. *On a* :

Toute fonction semi-sphérique appartient à une fonction sphérique, unique, si f *n'est pas identiquement nulle* ;

Φ *appartient à* Φ ;

Une fonction semi-sphérique est invariante à gauche par G . *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit sphérique est qu'elle soit aussi invariante à droite non identiquement nulle, et valant* 1 *en* e .

Démonstration. - Tout ce qu'il y a à établir est que, si f est une fonction semi-sphérique, non identiquement nulle, invariante à droite et valant 1 en e , f est sphérique. Or, si $A_\gamma f = \lambda(\gamma)f$, on a

$$\lambda(\gamma) = \lambda(\gamma)\, f(e) = \int_K f(\gamma ke)\, dk = \int_K f(\gamma k)\, dk = f(\gamma) \quad ,$$

et f est sphérique.

Considérons maintenant Φ une fonction sphérique positive et C_Φ l'ensemble des fonctions semi-sphériques positives appartenant à Φ (y compris 0). Notons encore B_Φ , l'ensemble des éléments de C_Φ valant 1 en e .

PROPOSITION 6. - C_Φ *est un cône convexe, différent de* $\{0\}$, *vaguement fermé, stable par translation à droite* ; *il admet* B_Φ *comme base vaguement fermée et toute fonction de* C_Φ *non identiquement nulle, est partout strictement positive*.

Démonstration. - On $\Phi \in C_\Phi$, et C_Φ est évidemment un cône convexe. Il est vaguement fermé, car les opérateurs A_γ sont vaguement continus, et stable par translation à droite, car quels que soient γ et $\gamma' \in G$, $A_\gamma D_{\gamma'} = D_{\gamma'} A_\gamma$.

Si $f \in C_\Phi$ et $f(g_0) = 0$, pour tout $g \in G$, on a

$$\Phi(g)\ f(g_0) = 0 = \int_K f(gkg_0)\ dk \quad ,$$

et comme f est positive et continue, on a $f(gkg_0) = 0$ pour tout $k \in K$ et $g \in G$, donc f est identiquement nulle. Il en résulte que B_Φ est une base. Montrons que B_Φ est vaguement fermée. Pour cela, soit Ψ une fonction continue à support compact, invariante par K à droite, et telle que $\int_G \Psi(g)\ \Phi(g)\ dg = 1$. On a :

$$\int_G f(g)\ \Psi(g)\ dg = \int_K dk \int_G f(gk)\ \Psi(gk)\ dgk \quad ,$$

mais $dgk = dg$, car K est compact, et l'on a :

$$\int_G f(g)\ \Psi(g)\ dg = \int_K \int_G \Psi(g)\ f(gk)\ dg\ dk = \int_G \Psi(g) \int_K f(gk)\ dk\ dg$$

$$= \int_G \Psi(g)\ \Phi(g)\ f(e)\ dk = f(e)$$

et B_Φ est vaguement fermée.

3. Représentation intégrale des fonctions semi-sphériques par des multiplicateurs.

LEMME 11. - *Soient* X *un espace homogène sur* G *sur lequel* K *est transitif, et* $\sigma \in M_K(X)$. *Alors, pour tout* $x \in X$, $\sigma(.\ ,\ x)$ *est semi-sphérique et appartient à la fonction sphérique :*

$$\Phi(g) = \int_X \sigma(g\ ,\ x)\ dm(X) \quad ,$$

où m *est l'unique mesure sur* X *invariante par* K *et de masse totale* 1 .

Démonstration.

$$A_\gamma\ \sigma(g\ ,\ x) = \int_K \sigma(\gamma kg\ ,\ x)\ dk = \int_K \sigma(\gamma k\ ,\ gx)\ dk.\sigma(g\ ,\ x)$$

$$= \int_K \sigma(\gamma\ ,\ kgx)\ dk.\sigma(g\ ,\ x) = \int_X \sigma(\gamma\ ,\ y)\ d(m_K \star gx)(y).\sigma(g\ ,\ x) \quad ,$$

d'où le résultat, puisque $m_K \star gx$ est invariante par K et de masse totale 1 .

D'une manière générale, si X est un espace homogène sur G , et si $s \in M(X)$, dès que $s(.\ ,\ x_0) \in C_\Phi$, on a $s(.\ ,\ x) \in C_\Phi$ pour tout x ; on dira alors que s appartient à Φ . Il est facile de voir que les multiplicateurs appartenant à Φ sont des K-multiplicateurs.

THÉORÈME 2. - *Soient* G *un groupe localement compact,* K *un sous-groupe compact de* G , *et* T *un sous-groupe fermé de Tikhonov de* G *tels que* $G = KT$. *Soient* Φ *une fonction sphérique positive et* $h \in C_\Phi$, $h \neq 0$; *il existe alors* $\sigma \in M_K(G/T)$ *et* $\mu \in \mathcal{M}^+(G/T)$ *telles que :*

σ *appartienne à* Φ ,

$h(g) = \int_{G/T} \sigma(g\ ,\ x)\ d\mu(x)$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. - Soit $h \in C_\Phi$, $h \neq 0$, on a $A_\gamma h = \Phi(\gamma)h$. Soit C' le cône des mesures positives π vérifiant : $A_\gamma \pi$ proportionnel à h pour tout $\gamma \in G$. On a :

$h \in C'$,

C' est stable par translation à gauche (car $A_\gamma G_{\gamma'} = A_{\gamma'^{-1}\gamma}$),

C' est à base compacte pour la topologie vague : l'ensemble des π de C' , tel que $A_e \pi = h$, sera noté C'_1 .

En effet, C'_1 est vaguement fermé, A_e étant vaguement continu. Il suffit donc de montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, $\{\pi(\varphi)\}_{\pi \in C'_1}$ est borné. Or, si $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, il existe $\psi \in \mathcal{K}(G)$, invariante à gauche par K , qui majore φ . Alors $\pi \in C'_1$ étant positive, $|\pi(\varphi)| \leqslant \pi(\psi)$. Or,

$$m_K \star \pi(\psi) = \int_K \int_G \psi(kg)\ dk\ d\pi(g) = \int_G \psi(g)\ d\pi(g)$$

et

$$\pi(\psi) = \int_G h(g)\ \psi(g)\ dg \quad ,$$

ce qui démontre le résultat.

Considérons la représentation linéaire continue G' de G dans $\mathfrak{M}(G)$, elle laisse C' stable. Il en est donc de même de la restriction de cette représentation à T , et par suite, il existe $\pi \in C'$, $\pi \neq 0$, telle que, pour tout $t \in T$, $t \star \pi$ soit proportionnelle à π , $t \star \pi = \chi(t)\pi$.

D'après la proposition 1, on a $\pi = m_T^\chi \star \mu_1$, où μ est une mesure positive bornée sur G et χ une exponentielle sur T .

On a donc $m_K \star m_T^\chi \star \mu_1$ proportionnelle à h , et comme, d'après le lemme 6, $m_K \star m_T^\chi = r\sigma(. , T)m_G$, où $r \in \underset{\sim}{R}^{*+}$ et $\sigma \in M_K(G/T)$, on a

$$h = \sigma(. , T) \star \mu_1$$

où

$$h(g) = \int_G \sigma(g\gamma^{-1} , T)\ \frac{d\mu_1(\gamma)}{\Delta(\gamma)} = \int_G \frac{\sigma(g , \gamma^{-1} T)\ \sigma(\gamma^{-1} , T)}{\Delta(\gamma)}\ d\mu_1(\gamma)$$

et $\dfrac{\sigma(\gamma , T)}{\Delta(\gamma^{-1})}\ d\mu_1(\gamma^{-1})$ est une mesure bornée sur G dont on peut considérer l'image μ dans G/T qui est compact.

Par définition, on aura :

$$\int_{G/T} \sigma(g , x)\ d\mu(x) = \int_G \sigma(g , \gamma T)\ \frac{\sigma(\gamma , T)}{\Delta(\gamma^{-1})}\ d\mu_1(\gamma^{-1}) = h(g) \quad .$$

σ appartient à la fonction sphérique Φ' : $\Phi'(g) = \int_{G/T} \sigma(g\ ,\ x)\ dm(x)$ et par suite :

$$\Phi(g)\ h(e) = \int_K h(gk)\ dk = \int_K \int_{G/T} \sigma(gk\ ,\ x)\ d\mu(x)\ dk = \int_{G/T} \int_K \sigma(gk\ ,\ x)\ dk\ d\mu(x)$$

$$= \int_{G/T} \Phi'(g)\ \sigma(e\ ,\ x)\ d\mu(x) = \Phi'(g)\ h(e)\ ,$$

donc $\Phi = \Phi'$, et le théorème est démontré.

Nous allons, à l'aide du théorème de représentation intégrale et du résultat précédent, établir un résultat plus précis, mais sous des hypothèses plus fortes.

Notons $k_g = m_K \star g^{-1} \star m_K$ pour $g \in G$, et soit $\mathfrak{F}$ la famille $\{k_g\}_{g\in G}$. Il est équivalent de dire :

(1) $$m_K \star \gamma^{-1} \star f = \Phi(\gamma)f \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in G$$

ou de dire :

(2) $$\Phi(\gamma)^{-1}\ m_K \star \gamma^{-1} \star m_K = f \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in G\ .$$

En effet, l'une comme l'autre des propriétés entraîne $m_K \star f = f$ ((1) en faisant $\gamma = e$; (2) en faisant $\gamma = e$, puisque $m_K \star m_K = m_K$), et l'équivalence est alors évidente.

Pour une fonction sphérique positive Φ , notons $\mathfrak{F}_\Phi$ la famille des mesures $\{\Phi(\gamma)^{-1}\ k_\gamma\}$. On a donc $C_\Phi = C(\mathfrak{F}_\Phi)$.

THÉORÈME 3. - Supposons les hypothèses suivantes, notées (H) :

G est un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts ;

K est un sous-groupe compact de G ;

T est un sous-groupe de Tikhonov fermé de G ,

tels que :

$G = KT$,

G/T est une frontière de G ,

la famille $\mathfrak{F}$ est une famille permutable.

Soit alors Φ une fonction sphérique sur G :

(a) On peut appliquer au cône $C_\Phi = C(\mathfrak{F}_\Phi)$ les conclusions du théorème 1 avec la base B_Φ .

(b) Il existe un unique multiplicateur basique sur G/T , σ_Φ , appartenant à C_Φ . σ_Φ est un K-multiplicateur, et les éléments extrémaux de B_Φ sont les fonctions $\sigma_\Phi(. , x)$ où x parcourt G/T. Si $s \in M(G/T)$ et $x \in G/T$ sont tels que $s(. , x)$ soit extrémale dans B_Φ, $s = \sigma_\Phi$.

Nous démontrerons en même temps le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. - Sous les hypothèses (H) du théorème 3, supposons que X soit un espace homogène compact sur G, sur lequel K est transitif, et qu'il existe $s \in M(X)$, basique ; alors il existe un homomorphisme continu de G/T sur X, unique.

Remarque. - Si, dans le théorème 3, on suppose seulement que G/T a la propriété (U) (lemme 5), on peut encore conclure qu'il existe un multiplicateur $\sigma_\Phi \in M_K(G/T)$ unique tel que les $\sigma_\Phi(. , x)$ soient extrémales dans B_Φ et la famille des extrémales de B_Φ est alors $\{\sigma_\Phi(. , x)\}_{x\in G/T}$.

Démonstration du théorème 3. - (a) est évident puisque $C_\Phi = C(\mathfrak{F}_\Phi)$, et que la famille $\mathfrak{F}_\Phi$ est permutable comme la famille $\mathfrak{F}$.

Pour démontrer (b), remarquons d'abord que d'après le théorème 2, si h est extrémale sur B_Φ, on a :

$$h = \sigma(. , x) \quad \text{pour} \quad \sigma \in M_K(G/T) \quad \text{et} \quad x \in G/T \quad .$$

Si σ est un multiplicateur appartenant à Φ tel que, pour $x_0 \in G/T$, $\sigma(. , x_0)$ soit extrémal dans B_Φ, $\sigma(. , kx_0) = D_k\, \sigma(. , x_0)$ est aussi extrémal pour $k \in K$, et K étant transitif, tout $\sigma(. , x)$ est extrémal sur B_Φ.

Soient alors σ_1 et σ_2 deux K-multiplicateurs sur G/T, tels que $\sigma_1(. , x)$ et $\sigma_2(. , x)$ soient extrémaux, on va démontrer que $\sigma_1 = \sigma_2$.

Tout d'abord, $\Phi(g) = \int_{G/T} \sigma_i(g , x)\, dm(x)$ pour $i = 1 , 2$, et comme ces relations définissent immédiatement deux représentations intégrales de $\Phi \in C_\Phi$ par des éléments extrémaux, les supports des mesures de ces représentations sont égaux, ou encore :

$$\{\sigma_1(. , x)\}_{x\in G/T} = \{\sigma_2(. , x)\}_{x\in G/T} \quad .$$

Notons X cet espace muni de la structure d'espace homogène sur G définie par les opérateurs D^1_γ (voir introduction, § 2). Pour $i = 1 , 2$,

$$j_i : x \longmapsto \sigma_i(. , x)$$

est un homomorphisme de G/T sur X :

$$j_i(\gamma x)(g) = \sigma(g , \gamma x) = \frac{\sigma(g\gamma , x)}{\sigma(\gamma , x)} = D^1_\gamma\, \sigma(g , x) \quad \text{et} \quad j_i(\gamma x) = D^1_\gamma\, j_i(x) \quad .$$

Si G/T vérifie la propriété (U), $j_1 = j_2 = j$ et $\sigma_1(. , x) = \sigma_2(. , x)$ pour tout x : $\sigma_1 = \sigma_2$. La remarque est ainsi démontrée, en appelant $\sigma_\Phi = \sigma_1 = \sigma_2$ l'unique multiplicateur déterminant des extrémales de C_Φ ; la dernière partie du (b) du théorème 3 est aussi démontrée.

Pour achever, il reste à voir que σ_Φ est l'unique multiplicateur basique appartenant à Φ . σ_Φ basique exige que $j_1 = j_2$ soit une bijection, ce que nous allons d'abord prouver.

Pour démontrer que j est bijective, nous appliquons d'abord l'étude faite au lemme 7. On a sur $j^{-1}(\xi)$ une mesure positive, de masse totale 1 , θ_ξ , vérifiant :

pour $k \in K$, $\theta_{k\xi} = k\theta_\xi$;

pour $g \in G$, $g^{-1}\,\theta_{g\xi}$ est absolument continue par rapport à θ_ξ , et la fonction $\frac{dg^{-1}\,\theta_{g\xi}}{d\theta_\xi}(x)$ est entièrement déterminée sur le support de θ_ξ , soit $j^{-1}(\xi)$; elle est continue, et si l'on pose

$$\sigma(g\ ,\ x) = \frac{dg^{-1}\,\theta_{gj(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x)$$

cette fonction est bien déterminée, et c'est un K-multiplicateur sur G/T .

Posons $\sigma_1 = \sigma\sigma_\Phi$, et montrons que σ_1 appartient à Φ . Calculons

$$\psi(g) = \int_{G/T} \sigma_1(g\ ,\ x)\ dm(x) = \int_K \sigma_1(g\ ,\ kx_0)\ dk\ .$$

$\psi(g) = \int_K \int_{K'} \sigma_1(g\ ,\ kk'x_0)\ dk\ dk'$ pour tout $x_0 \in G/T$ et K' sous-groupe fermé de K . En prenant $K' = K_{\xi_0}$ où $\xi_0 = j(x_0)$, il vient :

$$\psi(g) = \int_K \int_{G/T} \sigma_1(g\ ,\ ky)\ d\theta_{\xi_0}(y)\ dk = \int_K \int_{G/T} \sigma_1(gk\ ,\ y)\ d\theta_{\xi_0}(y)\ dk\ .$$

Or

$$\int_{j^{-1}(\xi_0)} \sigma_1(g\ ,\ y)\ d\theta_{\xi_0}(y) = \int_{j^{-1}(\xi_0)} \frac{dg^{-1}\,\theta_{g\xi_0}}{d\theta_{\xi_0}}(y)\ \sigma_\Phi(g\ ,\ x_0)\ d\theta_{\xi_0}(y)$$

(car, pour $y \in j^{-1}(\xi_0)$, $j(y) = \xi_0$)

$$= \sigma_\Phi(g\ ,\ x_0) \int_{j^{-1}(\xi_0)} dg^{-1}\,\theta_{g\xi_0}(y) = \sigma_\Phi(g\ ,\ x_0)\ .$$

En reportant, on obtient :

$$\psi(g) = \int_K \sigma_\Phi(gk\ ,\ x_0)\ dk = \int_K \sigma_\Phi(g\ ,\ kx_0)\ dk = \Phi(g)\ .$$

Ainsi σ_1 appartient à Φ, et la relation qui s'exprime immédiatement dans C_Φ

$$\sigma_\Phi(g , x_0) = \int_{j^{-1}(\xi_0)} \sigma_1(g , y)\, d\theta_{\xi_0}(y)$$

prouve aussi que

$$\sigma_1(g , y) = \sigma_\Phi(g , x_0) \quad \text{pour} \quad y \in j^{-1}(\xi_0)$$

puisque $\sigma_\Phi(. , x_0)$ est extrémale, que le support de θ_{ξ_0} est $j^{-1}(\xi_0)$, et que $\sigma_\Phi(. , x_0)$ et $\sigma_1(. , y)$ sont dans B_Φ. En particulier, cette relation est valable pour $y = x_0$: $\sigma_1(g , x_0) = \sigma_\Phi(g , x_0)$, et comme ceci est vrai pour tout x_0: $\sigma_1 = \sigma_\Phi$. Donc $\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_\Phi} = 1$ identiquement, et $\frac{dg^{-1}\,\theta_{gj(x)}}{d\theta_{j(x)}}(x) = 1$. Pour ξ fixé et $x \in j^{-1}(\xi)$, on a donc :

$$\frac{dg^{-1}\,\theta_{g\xi}}{d\theta_\xi}(x) = 1 ,$$

et comme $j^{-1}(\xi)$ est le support de θ_ξ, on a :

$$g^{-1}\,\theta_{g\xi} = \theta_\xi \quad \text{où} \quad \theta_{g\xi} = g\theta_\xi \quad .$$

Ceci établi, et puisque G/T est une frontière de G, il existe une suite g_n, $g_n \in G$, telle que $g_n\,\theta_\xi$ tende vers une mesure ponctuelle. Or, si N_ξ est le normalisateur de ξ, $G = KN_\xi$, puisque K est transitif sur X, donc $g_n = k_n\,\gamma_n$, $k_n \in K$, $\gamma_n \in N_\xi$, et l'on peut toujours supposer que k_n tend vers une limite k. Alors

$$g_n\,\theta_\xi = k_n\,\gamma_n\,\theta_\xi = k_n\,\theta_{\gamma_n\xi} = k_n\,\theta_\xi$$

tend vers $k\theta_\xi = \theta_{k\xi}$ qui est une mesure ponctuelle. Ceci exige que son support $kj^{-1}(\xi)$ soit réduit à un point, et j est donc bijective : c'est donc un isomorphisme.

Montrons que σ_Φ est basique. C'est immédiat, puisque si μ est une mesure sur G/T telle que $h(g) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\mu(x)$ soit positive, on peut considérer l'image de μ par j, μ^*, et si $\sigma_x = \sigma(. , x)$, $h = \int_X \sigma_x\, d\mu(\sigma_x)$ est dans le cône C_Φ (car $h \geqslant 0$ et l'ensemble des solutions de $A_\gamma\, f = \Phi(\gamma)f$ est vaguement fermé, ou par vérification directe). D'après le corollaire 1, on peut conclure que μ^* est positive, et, j étant bijective, μ elle-même est positive.

Nous pouvons maintenant donner une forme précise de représentation intégrale. Si $h \in C_\Phi$, il existe une mesure positive μ sur X telle que h soit la résultante de μ . Si μ^* est la mesure sur G/T , image de μ par l'isomorphisme j^{-1} , on a

(1) $$h(g) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\mu^*(x) \quad .$$

En effet, par définition, pour toute fonction φ , à support compact sur G , on a

$$\int_G h(g)\, \varphi(g)\, dg = \int_{G/T} d\mu^*(x) \int_G \sigma_\Phi(g , x)\, \varphi(g)\, dg$$

$$\text{où} \quad \int_G [h(g) - \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\mu^*(x)]\, \varphi(g)\, dg = 0 \ , \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{K}(G)$$

et cette relation, puisque $h(g) - \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\mu^*(x)$ est continue, entraîne (1). De plus, la représentation de h , sous la forme (1), est unique, puisque σ_Φ est basique. (Nous achèverons la démonstration du th. 3 après celle du cor. 2.)

<u>Démonstration du corollaire 2</u>. - Soient $s \in M(X)$ basique, et σ le K-multiplicateur sur X équivalent à s ; σ est aussi basique, et si

$$\Phi(g) = \int_X \sigma(g , x)\, dm_X(x)$$

(où m_X est la mesure K-invariante de masse totale 1 sur X), Φ est sphérique, et, pour tout $\xi \in X$, $\sigma(. , \xi) \in \mathcal{C}_\Phi$. Donc, pour tout $\xi \in X$, il existe ω_ξ unique, $\omega_\xi \in \mathfrak{M}^+(G/T)$, telle que

$$\sigma(g , \xi) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\omega_\xi(x) \quad .$$

Si $k \in K$,

$$\sigma(g , k\xi) = \sigma(gk , \xi)$$

$$= \int_{G/T} \sigma_\Phi(gk , x)\, d\omega_\xi(x) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , kx)\, d\omega_\xi(x) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, dk\omega_\xi(x)$$

et d'après l'unicité

$$k\omega_\xi = \omega_{k\xi} \quad \text{pour} \quad k \in K \quad .$$

D'autre part, pour ξ_0 fixe dans X et $\mu \in \mathfrak{M}(K)$:

$$\int_X \sigma(g , \xi)\, d\mu \star \xi_0(\xi)$$

$$= \int_K \sigma(g , k\xi_0)\, d\mu(k) = \int_K \sigma(gk , \xi_0)\, d\mu(k) = \int_{G/T} \int_K \sigma_\Phi(gk , y)\, d\omega_{\xi_0}(y)\, d\mu(k)$$

$$= \int_{G/T} \int_K \sigma_\Phi(g , ky)\, d\omega_{\xi_0}(y)\, d\mu(k) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , y)\, d\mu \star \omega_{\xi_0}(y) \quad .$$

Alors, si on suppose $\mu \star \omega_{\xi_0}$ positif, on a

$$\int \sigma(g , \xi)\, d\mu \star \xi_0(\xi) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad g \in G \quad ,$$

et puisque σ est basique, $\mu \star \xi_0$ est positif.

On peut alors appliquer le lemme 3 à $\xi \longmapsto \omega_\xi$ de X dans $\mathcal{M}^1(G/T)$ (ω_ξ est de masse totale 1 , car $\sigma(e , \xi) = 1$) ; il existe j , homomorphisme de G/T sur X , mais j n'est, a priori, qu'un homomorphisme d'espaces homogènes sur K . Nous pouvons déjà affirmer que j est continu, car, pour $\xi_0 = j(T)$, $k \longrightarrow k\xi_0$ est continue de K dans X et comme G/T est muni de la topologie quotient de celle de K , cette propriété suffit.

Etudions donc $j(gx)$, et pour cela, nous allons comparer $g\omega_\xi$ et $\omega_{g\xi}$. Pour $g , \gamma \in G$, $\xi \in X$:

$$\sigma(g\gamma , \xi) = \sigma(g , \gamma\xi)\, \sigma(\gamma , \xi) = \sigma(\gamma , \xi) \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , y)\, d\omega_{\gamma\xi}(y) \quad ,$$

mais aussi :

$$\sigma(g\gamma , \xi) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g\gamma , z)\, d\omega_\xi(z) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , \gamma z)\, \sigma(\gamma , z)\, d\omega_\xi(z)$$

$$= \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , y)\, \sigma_\Phi(\gamma , \gamma^{-1} y)\, d\gamma\omega_\xi(y) \ ;$$

d'après l'unicité, il vient :

$$\sigma(g , \xi)\, d\omega_{\gamma\xi}(y) = \sigma_\Phi(\gamma , \gamma^{-1} y)\, d\gamma\omega_\xi(y)$$

qui entraîne que $\omega_{\gamma\xi}$ et $\gamma\omega_\xi$ ont même support, et comme ces supports sont, d'après le lemme 3, respectivement $j^{-1}(\gamma\xi)$ et $\gamma j^{-1}(\xi)$, on voit que, pour $x \in G/T$ et $\gamma \in G$, si $\xi = j(x)$: $x \in j^{-1}(\xi)$, donc

$$\gamma x \in \gamma j^{-1}(\xi) = j^{-1}(\gamma\xi) \quad \text{et} \quad j(\gamma x) = \gamma\xi = \gamma j(x) \quad .$$

Le corollaire est démontré.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème en montrant que, si s est un multiplicateur basique appartenant à Φ , $s = \sigma_\Phi$. En effet, nous sommes dans la situation du corollaire 2 avec $X = G/T$ et, G/T étant une frontière, j est l'identité. Par suite, pour tout $\xi \in G/T$, $\omega_\xi = \varepsilon_\xi$ et

$$s(g , \xi) = \int_{G/T} \sigma_\Phi(g , x)\, d\varepsilon_\xi(x)$$

donne $\sigma_\Phi(g , \xi) = s(g , \xi)$ et $s = \sigma_\Phi$.

II. Étude de l'équation de convolution $\mu \star \sigma = \sigma$

G étant un groupe localement compact, à base dénombrable d'ouverts, et μ une mesure positive donnée, nous désignerons par $C(\mu)$ le cône des mesures positives

σ telles que $\mu \star \sigma = \sigma$.

Si $\nu \in \mathfrak{M}^+(G)$ est à support compact et si $\sigma \in C(\mu)$, on a $\sigma \star \nu \in C(\mu)$. Ainsi, si σ_0 est une mesure extrémale dans $C(\mu)$, il est immédiat que, pour tout g dans G , $\sigma_0 \star \varepsilon_{g^{-1}}$ est aussi extrémale dans $C(\mu)$.

Si on considère

$$X = \{\sigma \mid \sigma \in C(\mu) \ , \ \exists\, g \in G \ , \ \sigma = \sigma_0 \star \varepsilon_{g^{-1}}\} \quad ,$$

X est un espace homogène sur G , pour $(g , \sigma) \longrightarrow \sigma \star \varepsilon_{g^{-1}}$. Dans le cas commutatif, et si le support de μ engendre G , cet espace homogène est : ou $\{\sigma_0\}$, ou la demi-droite engendrée par σ_0 , car $\mu \star \sigma_0 = \sigma_0$ s'écrit :

$$\sigma_0 = \int_G \varepsilon_x \star \sigma_0 \, d\mu(x) = \int_G \sigma_0 \star \varepsilon_x \, d\mu(x) \quad ,$$

et σ_0 étant extrémale, on a $\sigma_0 \star \varepsilon_x$ proportionnelle à σ_0 pour x dans le support de μ_0 (il faudrait évidemment justifier les intégrales écrites). Il en résulte alors que σ_0 est une fonction exponentielle sur G . Cette circonstance heureuse ne se produit plus dans le cas non commutatif, car $\varepsilon_x \star \sigma_0 \neq \sigma_0 \star \varepsilon_x$. Dans la suite, nous allons surtout étudier la structure de l'espace homogène X , d'ailleurs définie un peu différemment, et ceci dans un cas particulier.

Rappelons auparavant que le problème est encore simple si G est compact. Si f est une solution fonction, et si K est le sous-groupe fermé engendré par le support S de μ , soit :

$$A_g = \{g' \in K \mid f(g'^{-1} g) = \sup_{\gamma \in Kg} f(\gamma)\} \quad .$$

On voit que $A_g S \subset A_g$, ce qui, compte tenu du fait que K est compact, montre que $A_g = K$; f est constante sur les classes à droite modulo K , donc

$$f = m_K \star f \quad \text{si} \quad \int_K dm_K(k) = 1 \quad .$$

On voit alors facilement que les solutions mesures sont de la forme $m_K \star \nu$ où $\nu \in \mathfrak{M}^+(G)$, et que toutes ces mesures sont solutions si $\int_G d\mu(g) = 1$, tandis que si $\int_G d\mu(g) \neq 1$, seule 0 est solution. Si $K = G$, les seules solutions sont les constantes.

Notons S le support de μ et $S^{(n)} = \{g_1 \, g_2 \dots g_n \mid \forall\, i \ , \ g_i \in S\}$; nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *On suppose réalisées les hypothèses* (H) *du théorème* 3, *et* G *connexe. De plus,* $\mu \in \mathfrak{M}^+(G)$ *est absolument continue par rapport à* m_G , S *est compact, et il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $S^{(n)}$ *soit un voisinage de* 0 . *Enfin, on sup-*

pose que la densité de μ est bornée. Alors :

(1) Les éléments de $C(\mu)$ sont des fonctions continues partout positives et $B(\mu) = \{f \mid f \in C(\mu) , f(e) = 1\}$ est une base vaguement fermée de $C(\mu)$.

(2) On peut appliquer au cône $C(\mu)$ avec la base $B(\mu)$ les conclusions du théorème 1.

(3) Pour $f \in B(\mu)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est un point extrémal de $B(\mu)$,

(b) $f = s(. , x)$ pour $s \in M(G/T)$ et $x \in X$, où s est basique.

Par suite, si E_1 est l'ensemble des multiplicateurs basiques sur G/T tel qu'il existe un x avec $s(. , x) \in C(\mu)$, l'ensemble des points extrémaux est $\{s(. , x)\}_{(s,x)\in E\times G/T}$. Ces fonctions sont d'ailleurs deux à deux distinctes et, de plus, deux éléments distincts de E_1 sont non équivalents, si bien que le quotient de deux extrémales n'est pas invariant à droite par K .

1. Démonstration du théorème 4(1).

Posons $d\mu(g) = \psi(g)\, dg$. On a $\psi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$, donc $\psi \star \psi = \psi^{(2)}$ est une fonction continue. Par suite, si $\sigma \in \mathfrak{M}(G)$ vérifie $\mu \star \sigma = \sigma$, σ est absolument continue et, comme $\mu^{(2)} \star \sigma = \sigma$, σ est de densité continue. Soit alors $f \in C(\mu)$ et supposons $f(g_0) = 0$. On a

$$\mu \star f = f = \mu^{(n)} \star f$$

et $\mu^{(n)}$ a pour support $S^{(n)}$, voisinage de e .

De $f(g) = \int_G f(g'^{-1} g)\, d\mu^{(n)}(g')$, on tire que, si A est l'ensemble des 0 de f , et $S^{(n)(-1)} = \{g \mid g^{-1} \in S^{(n)}\}$, on a $S^{(n)(-1)} A \subset A$: A est ouvert et fermé non vide, donc $A = G$ et $f = 0$.

Alors, $B(\mu) = \{f \mid f \in C(\mu) , f(e) = 1\}$ est une base. Comme

$$f(e) = \mu^{(2)} \star f(e) = \int_G f(g^{-1})\, d\mu^{(2)}(g) = \int_G f(g^{-1})\, \psi^{(2)}(g)\, dg ,$$

et $\psi^{(2)}$ étant une fonction continue à support compact, $B(\mu)$ est vaguement fermée.

2. Démonstration du théorème 4(2).

Il n'y a rien à démontrer, toutes les hypothèses du théorème 1 étant vérifiées. Il ne reste plus à démontrer que le (3).

3. Démonstration du théorème 4(3).

(i) Première partie.

Pour cela, considérons un point extrémal f de $B(\mu)$. Soient

$$X = \{D^1_\gamma f \mid \gamma \in G\} \quad \text{et} \quad s(g, h) = h(g) \quad \text{pour} \quad g \in G, \quad h \in X \quad ;$$

nous avons déjà vu que X est un espace homogène sur G et que s est un multiplicateur. De plus, pour tout γ, $D^1_\gamma f$ est extrémal dans $B(\mu)$ puisque D^1_γ est linéaire continue, laisse stable $B(\mu)$ et que son inverse $D^1_{\gamma^{-1}}$ a les mêmes propriétés. Pour $\gamma \in G$, $h \in X$, nous noterons γh pour $D^1_\gamma h$, et alors, pour éviter des confusions, nous noterons de préférence par ξ l'élément générique de X, et $\xi_0 = f$.

LEMME 12. - K est transitif sur X ; X est compact et s est basique.

Démonstration du lemme.

1° Nous allons montrer qu'il existe $\rho_1 \in \mathcal{K}^+(G)$ telle que $f \star \rho_1 \geqslant f \star m_K$.

Nous utiliserons la notation : pour $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{M}^+(G)$, $\pi_1 \succ \pi_2$, si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\pi_1 \geqslant \varepsilon\pi_2$. C'est évidemment une relation de préordre.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{K}^+(G)$ avec $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(g) \geqslant 1$ pour $g \in KSK$. Posons $\rho = m_K \star \varphi \star m_K$. On a $\rho \in \mathcal{K}^+(G)$, $\rho(e) > 0$, $\rho \geqslant 1$ sur S et $m_K \star \rho \star m_K = \rho$. Il existe un entier m tel que $\mu^{(m)} \succ \rho$: si n est tel que $S^{(n)}$ soit un voisinage de 0, il existe $i \in \underset{\sim}{N}$ tel que $S^{(n)(i)} \supset S(\rho)$ et, pour $m = 2ni$, $\psi^{(m)}$ est différente de 0 sur le support de ρ, ce qui établi l'assertion annoncée. Comme d'autre part $\rho \geqslant 1$ sur S entraîne $\rho \succ \mu$, on a :

$$\rho \star f \prec \mu^{(m)} \star f = f = \mu \star f \prec \rho \star f \quad .$$

Mais $\rho = m_K \star \rho \star m_K = m_K \star \rho = \rho \star m_K$, et $\{m_K \star g \star m_K\}_{g\in G}$ est permutable ; on en déduit facilement, pour $\nu \in \mathfrak{M}(G)$:

$$(m_K \star \rho \star m_K)(m_K \star \nu \star m_K) = (m_K \star \nu \star m_K)(m_K \star \rho \star m_K)$$

$$\text{où} \quad \rho \star \nu \star m_K = m_K \star \nu \star \rho \quad .$$

En remarquant alors que $\rho^{(2)} \succ \rho$, on peut écrire :

$$\rho \star f \star \rho = \rho \star f \star \rho \star m_K = m_K \star f \star \rho \star \rho \succ m_K \star f \star \rho = \rho \star f \star m_K \quad ,$$

et comme $f \succ \rho \star f$ et $\rho \star f \succ f$, on a :

$$f \star \rho \succ f \star m_K \quad .$$

Il existe alors $M \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que $Mf \star \rho \geq f \star m_K$, $\rho_1 = M\rho$ convient.

2° Explicitant le résultat obtenu, il vient :

$$\int_G f(gg') \, \rho_1(g'^{-1}) \, dg' \geq \int_K f(gk) \, dk \quad .$$

Si on remplace f par $s(. \, , \, \xi_0)$:

$$\int_G s(gg' \, , \, \xi_0) \, \rho_1(g'^{-1}) \, dg' \geq \int_K s(gk \, , \, \xi_0) \, dk \quad ,$$

ou

$$\int_G s(g \, , \, g'\xi_0) \, s(g' \, , \, \xi_0) \, \rho_1(g'^{-1}) \, dg' \geq \int_K s(g \, , \, k\xi_0) \, s(k \, , \, \xi_0) \, dk \quad .$$

Considérons l'application continue $g \longmapsto s(. \, , \, g\xi_0)$ de G dans $B(\mu)$; les mesures π_1 , $\pi_2 \in \mathfrak{M}^+(G)$, définies par :

$$d\pi_1(g) = s(g \, , \, \xi_0) \, \rho_1(g^{-1}) \, dg \, , \qquad d\pi_2(g) = s(g \, , \, \xi_0) \, dm_K(g) \quad ,$$

sont de masse totale finie, et admettent des images ω_1 et ω_2 dans $B(\mu)$. On a donc :

$$\int_{B(\mu)} s(g \, , \, \xi) \, d\omega_1(\xi) \geq \int_{B(\mu)} s(g \, , \, \xi) \, d\omega_2(\xi) \quad .$$

Il est immédiat que ω_1 et ω_2 sont portées par X , et même ont pour supports des parties compactes de X . Si $\omega = \omega_1 - \omega_2$, ω a aussi son support dans X , et si ν est la résultante de ω dans $\mathfrak{M}(X)$, pour $\varphi \in \mathcal{K}^+(G)$, on a :

$$\nu(\varphi) = \int_X d\omega(\xi) \int_G s(g \, , \, \xi) \, \varphi(g) \, dg \geq 0 \quad .$$

Donc $\nu \geq 0$, et il est immédiat que $\mu \star \nu = \nu$, donc $\nu \in C(\mu)$, et on a $\omega \geq 0$ et $\omega_1 \geq \omega_2$.

3° En particulier, ω_2 est absolument continue par rapport à ω_1 . On voit que le support de μ_2 est $K\xi_0$; nous pouvons supposer que $\dot{K} = \emptyset$ pour démontrer la première assertion du lemme, car sinon $K = G$, et elle serait triviale. Alors si on remarque que la mesure de $K\xi_0$ pour μ_1 est aussi celle de KN_{ξ_0} pour π_1 , par définition, on voit que la mesure de KN_{ξ_0} pour π_1 est non nulle (celle de $K\xi_0$ pour μ_2 ne l'étant pas), donc la mesure de KN_{ξ_0} pour m_G est aussi non nulle. Cette propriété, démontrée pour ξ_0 , est aussi valable pour tout $\xi = \gamma\xi_0$ dans X : $K\gamma N_{\xi_0} \gamma^{-1}$ est de m_G-mesure non nulle ; il en est évidemment de même de $K\gamma N_{\xi_0}$ pour $\gamma \in G$, et G étant à base dénombrable d'ouverts, il n'existe qu'une infinité dénombrable de doubles classes distinctes $K\gamma N_{\xi_0}$ Comme chacune d'elles est fermée (N_{ξ_0} l'étant et K étant compact) et qu'elles recouvrent l'espace, on peut appliquer le théorème de Baire : il existe $\gamma \in G$ et $g_0 \in G$, intérieurs à $K\gamma N_{\xi_0}$. $K\gamma N_{\xi_0}$ étant stable par translation, à droite par N_{ξ_0}, et à gauche par K, pour tout $k \in K$, $g \in N_{\xi_0}$, $kg_0\, g$ est intérieur à $K\gamma N_{\xi_0} = Kg_0\, N_{\xi_0}$. $Kg_0\, N_{\xi_0}$ est donc ouvert, et fermé non vide : $Kg_0\, N_{\xi_0} = G$. Comme $e \in Kg_0\, N_{\xi_0}$,

$$Kg_0\, N_{\xi_0} = KeN_{\xi_0} \quad \text{et} \quad G = KN_{\xi_0} \quad .$$

K est transitif sur X.

Il en résulte immédiatement que X est compact, comme image continue de K. Si enfin $\pi \in \mathfrak{M}(X)$ est telle que $\int_X s(g\,,\,x)\,d\pi(x)$ soit positif, pour tout $g \in G$, on voit facilement que

$$h(g) = \int_X s(g\,,\,x)\,d\pi(x)$$

est la résultante de π, et qu'elle est dans $C(\mu)$, par suite (Théorème 1), π est positive. C. Q. F. D.

(ii) Deuxième partie de la démonstration du théorème 4(3).

Puisque K est transitif sur X, et qu'il existe un multiplicateur basique sur X, on peut appliquer le corollaire 2 : il existe un homomorphisme unique j de G/T sur X. Nous allons démontrer que j est bijectif, mais auparavant notons les deux lemmes suivants :

LEMME 13. - Si X est un espace homogène sur G, localement compact, et si $\mu \in \mathfrak{M}^+(G)$ est à support compact, les propriétés suivantes sont équivalentes pour $s \in M(X)$:

(α) $\forall\, x \in X$, $s(.\,,\,x) \in C(\mu)$,

(β) $\exists\, x \in X$, $s(.\,,\,x) \in C(\mu)$,

(γ) $\forall\, x \in X$, $\int_G s(g^{-1}\,,\,x)\,d\mu(g) = 1$.

(α) $\Longrightarrow$ (β) et (β) $\Longrightarrow$ (α), car $s(.\,,\,gx) = D_g^1\, s(.\,,\,x)$.

(α) $\Longrightarrow$ (γ), car si $s(.\,,\,x) \in C(\mu)$, $\mu \star s(.\,,\,x)(e) = 1$

$$\int s(g^{-1}\,,\,x)\,d\mu(g) = 1 \quad .$$

(γ) $\Longrightarrow$ (β), car si x_0 fixe, $x_0 \in X$,

$$\int_G s(g'^{-1}g\,,\,x_0)\,d\mu(g') = \int_G s(g'^{-1}\,,\,gx_0)\,s(g\,,\,x_0)\,d\mu(g') = s(g\,,\,x_0) \quad .$$

LEMME 14. - Si X est un espace homogène compact connexe sur G, localement compact, et sous les hypothèses du théorème 3 sur μ, il existe au plus un multiplicateur s tel que $s(.\,,x) \in C(\mu)$, dans chaque classe de $H(X)$.

Si $s_1 \sim s$, $s_1(.\,,x) \in C(\mu)$, $s(.\,,x) \in C(\mu)$ et

$$s_1(g\,,x) = \frac{p(g\,x)}{p(x)}\; s(g\,,x) \quad \text{où} \quad p \in \mathcal{C}(X) \quad .$$

On a $\int_G s(g^{-1}\,,x)\, d\mu^{(n)}(g) = 1$, car $s(.\,,x) \in C(\mu^{(n)})$, et de même

$$\int_G \frac{p(g^{-1}\,x)}{p(x)}\, s(g^{-1}\,,x)\, d\mu^{(n)}(g) = 1 \quad .$$

Par suite, $p(x) = \int_G p(g^{-1}\,x)\, s(g^{-1}\,,x)\, d\mu^{(n)}(g)$, et si A est l'ensemble des x de X dans lesquels p est maximum, cette égalité avec

$$\int_G s(g^{-1}\,,x)\, d\mu^{(n)}(g) = 1$$

entraîne $S^{(n)(-1)}\, A \subset A$, et A est donc ouvert, et fermé, donc $A = X$, p est constant et $s = s_1$. (A ouvert résulte, par exemple, de $S^{(n)(-1)}$ ouvert et du fait que X étant compact, si $x_0 \in X$ fixe, l'application $g \longmapsto gx_0$ est ouverte de G sur X).

(iii) Troisième partie de la démonstration du théorème 4(3).

Montrons maintenant que j est bijectif.

Tout d'abord, soient $\sigma \in M_K(X)$ équivalent à s ($s(g\,,x) = \frac{q(gx)}{q(x)}\,\sigma(g\,,x)$, où $q \in \mathcal{C}(X)$), Φ la fonction sphérique à laquelle appartient σ, et σ_Φ le K-multiplicateur basique associé. Nous allons démontrer qu'il existe $s_1 \in M(G/T)$ équivalent à σ_Φ et tel que $s_1(.\,,x) \in C(\mu)$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{C}(G/T)$ est muni de la norme et de la topologie de la convergence uniforme. Considérons l'application T de $\mathcal{C}(G/T)$ dans $\mathcal{C}(G/T)$, définie par

$$T_{(p)}(x) = \int_G p(g^{-1}\,x)\, \sigma_\Phi(g^{-1}\,x)\, d\mu(g) \quad ;$$

T est évidemment linéaire, et si $\|p\| \leqslant 1$,

$$\|T_{(p)}\| \leqslant \sup_{x\in G/T} \int_G \sigma_\Phi(g^{-1}\,,x)\, d\mu(g)$$

qui est une constante finie (par exemple, parce que $x \longmapsto \int_G \sigma_\Phi(g^{-1}\,,x)\, d\mu(g)$ est continue).

Soit alors ω_ξ, l'unique mesure sur G/T telle que :

$$\sigma(g\ ,\ \xi) = \int_{G/T} \sigma_{\Phi}(g\ ,\ x)\ d\omega_{\xi}(x)$$

et considérons :

$$Q = \{p \mid p \in \mathcal{C}^{+}(G/T)\ ,\ \forall\ \xi \in X\ ,\ \int_{G/T} p(x)\ d\omega_{\xi}(x) = q(\xi)\}\ .$$

Il est immédiat que Q est convexe, non vide (car $p = q \circ j$ est dans Q). En outre $T(Q) \subset Q$: si $p \in Q$,

$$\int_{G/T} T_p(x)\ d\omega_{\xi}(x) = \int_G \int_{G/T} p(g^{-1}\ x)\ \sigma_{\Phi}(g^{-1}\ ,\ x)\ d\mu(g)\ d\omega_{\xi}(x)$$
$$= \int_G \int_{G/T} p(x)\ \sigma_{\Phi}(g^{-1}\ ,\ x)\ dg^{-1}\ \omega_{\xi}(x)\ d\mu(g)$$

et comme

$$\sigma_{\Phi}(g\ ,\ g^{-1}\ x)\ dg\omega_{\xi}(x) = \sigma(g\ ,\ \xi)\ d\omega_{g\xi}(x) \qquad \text{(voir II, 3)}\ ,$$

on a :

$$\int_{G/T} T_p(x)\ d\omega_{\xi}(x) = \int_G \int_{G/T} p(x)\ \sigma(g^{-1}\ ,\ \xi)\ d\omega_{g^{-1}\xi}(x)\ d\mu(g)$$
$$= \int_G d\mu(g) \int_{G/T} p(x)\ \sigma(g^{-1}\ ,\ \xi)\ d\omega_{g^{-1}\xi}(x) = \int_G q(g^{-1}\ \xi)\ \sigma(g^{-1}\ ,\ \xi)\ d\mu(g) = q(\xi)$$

car $s(.\ ,\ \xi) \in C(\mu)$, donc

$$\int_G \frac{q(g^{-1}\ \xi)}{q(\xi)}\ \sigma(g^{-1}\ ,\ \xi)\ d\mu(g) = 1\ .$$

Remarquons que G/T est métrisable. En effet, G peut être métrisé par une distance invariante à droite, qui en fournit donc une sur G/T , pour laquelle l'application canonique est continue ; la topologie quotient étant compacte, cette distance définit la topologie quotient et même la structure uniforme quotient. Cette structure uniforme peut encore être définie par le système fondamental d'entourages

$$E_V = \{(kx\ ,\ x) \mid k \in V\ ,\ x \in X\}$$

où V est un voisinage de e dans K .

Montrons que $\overline{T(Q)}$ est compact : d'après le théorème d'Ascoli, il suffit de voir que $T(Q)$ est équicontinue. Calculons donc

$$V(p\ ,\ x\ ,\ k_1) = \int Tp(k_1\ x) - Tp(x)$$

pour $p \in Q$ et $k_1 \in K$.

$$V(p\ ,\ x\ ,\ k_1) = \left|\int_G (p(g^{-1}\ k_1\ x)\ \sigma_{\Phi}(g^{-1}\ ,\ k_1\ x) - p(g^{-1}\ x)\ \sigma_{\Phi}(g^{-1}\ ,\ x))\ d\mu(g)\right|$$
$$= \left|\int_G p(g^{-1}\ x)\ \sigma_{\Phi}(g^{-1}\ ,\ x)(dk_1^{-1}\ \mu(g) - d\mu(g))\right|\ .$$

Si nous notons alors λ la valeur absolue de $k_1^{-1}\mu - \mu$:

$$V(p,x,k_1) \leqslant \int_G p(g^{-1}x)\ \sigma_\Phi(g^{-1},x)\ d\lambda(g) \quad .$$

On en déduit que

$$V(p\ ,\ x\ ,\ k_1) \leqslant \int_K \int_G p(k^{-1}g^{-1}x)\ \sigma_\Phi(k^{-1}g^{-1}\ ,\ x)\ dk\ d\lambda k(g)$$
$$\leqslant A\int_G \int_K p(k^{-1}g^{-1}x)\ dk\ d\lambda k(g) \quad .$$

Or $\int_K p(k^{-1}g^{-1}x)\ dk = \int_{G/T} p(y)\ dm(y)$, où m est la mesure K-invariante sur G/T de masse 1 . En notant m_1 la mesure K-invariante de masse 1 sur X , si ν est définie par :

$$\nu(p) = \int_X \left(\int_{G/T} p(y)\ d\omega_\xi(y)\right) dm_1(\xi) \quad \text{pour} \quad p \in \mathcal{C}(G/T) \quad ,$$

ν est une mesure positive sur G/T de masse totale 1 , invariante par K , car

$$k \star \nu(p) = \int_X \left(\int_{G/T} p(ky)\ d\omega_\xi(y)\right) dm_1(\xi) = \int_X \left(\int_{G/T} p(y)\ d\omega_{k\xi}(y)\right) dm_1(\xi)$$
$$= \int_X \left(\int_{G/T} p(y)\ d\omega_\xi(y)\right) dk^{-1}m_1(\xi) = \int_X \left(\int_{G/T} p(y)\ d\omega_\xi(y)\right) dm_1(\xi) = \nu(p).$$

En particulier, d'après l'unicité de m , $\nu = m$ et

$$\int_{G/T} p(y)\ dm(y) = \int_X \left(\int_{G/T} p(y)\ d\omega_\xi(y)\right) dm_1(\xi) = \int_X q(\xi)\ dm_1(\xi) \quad .$$

D'autre part, puisque $d\mu(g) = \psi(g)\ dg$,

$$d\lambda(g) = |\psi(k^{-1}g) - \psi(g)|\ dg \quad .$$

Il en résulte que $\int_G d\lambda(g)$ tend vers 0 si k_1 tend vers e : si $\varepsilon > 0$ fixe, il existe $\overline{\psi} \in \mathcal{K}(G)$:

$$\int_G |\overline{\psi}(g) - \psi(g)|\ dg \leqslant \varepsilon/3$$

et donc

$$\int_G |\overline{\psi}(k_1^{-1}g) - \psi(k_1^{-1}g)|\ dg \leqslant \varepsilon/3 \quad ;$$

il existe alors V voisinage de e dans K , tel que $k_1 \in V$ entraîne $\int_G |\overline{\psi}(k_1^{-1}g) - \overline{\psi}(g)|\ dg \leqslant \varepsilon/3$, et donc $\int_G |\psi(k_1^{-1}g) - \psi(g)|\ dg \leqslant \varepsilon$. Comme :

$$V(p\ ,\ x\ ,\ k_1) \leqslant A\int_X q(\xi)\ dm_1(\xi) \times \int_G d\lambda(g) \quad ,$$

$V(p\ ,\ x\ ,\ k_1)$ tend uniformément vers 0 pour $p \in Q$ quand k tend vers e : $T(Q)$ est uniformément équicontinue, donc relativement compacte.

Comme $T(Q) \subset Q$, on peut appliquer le théorème du point fixe : il existe $p_0 \in Q$ tel que $T(p_0) = p_0$. On a :

$$\int p_0(g^{-1} x)\ \sigma_\Phi(g^{-1} , x)\ d\mu(g) = p_0(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in G/T$$

ou

$$\int \frac{p_0(g^{-1} x)}{p_0(x)}\ \sigma_\Phi(g^{-1} , x)\ d\mu(g) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in G/T \quad .$$

D'après le lemme 13, $s_1(g , x) = \dfrac{p_0(g^{-1} x)}{p_0(x)}\ \sigma_\Phi(g^{-1} , x)$ est tel que, pour $x \in G/T$, $s_1(. , x) \in C(\mu)$. On a alors

$$\int_{G/T} p_0(x)\ s_1(g , x)\ d\omega_\xi(x) = \int_{G/T} p_0(g^{-1} x)\ \sigma_\Phi(g^{-1} , x)\ d\omega_\xi(x)$$

$$= \int p_0(x)\ \sigma_\Phi(g , g^{-1} x)\ dg\omega_\xi(x) \quad ,$$

et d'après une formule déjà vue (fin de la démonstration du corollaire 2),

$$= \int p_0(x)\ \sigma(g , \xi)\ d\omega_{g\xi}(x) = \sigma(g , \xi)\ q(g\xi) = q(\xi)\ s(g , \xi) \quad .$$

Comme $p_0(x)\ s_1(. , x) \in C(\mu)$, l'égalité

$$\int_{G/T} p_0(x)\ s_1(g , x)\ d\omega_\xi(x) = q(\xi)\ s(g , \xi)$$

montre, puisque $s(. , \xi)$ est extrémal dans $C(\mu)$, que pour x dans le support de ω_ξ , $p_0(x)\ s_1(. , x)$ est proportionnelle à $s(. , \xi)$ ($j_1 : x \longmapsto s_1(. , x)$ est une bijection continue dont l'image est compacte, la formule ci-dessus s'interprète alors : $q(\xi)\ s(. , \xi)$ est la résultante d'une mesure portée par l'image du support de ω_ξ par j_1 ; les mesures de cet ensemble sont donc proportionnelles à $s(. , \xi)$ et leur densité, continue, $p_0(x)\ s_1(. , x)$ l'est aussi, leur support étant G). Par suite, pour $x_1 , x_2 \in j^{-1}(\xi)$, $s_1(. , x_1)$ et $s_1(. , x_2)$ étant proportionnels à $s(. , \xi)$, et valant tous deux 1 en e : $s_1(. , x_1) = s_1(. , x_2)$. Comme s_1 est basique, cette relation entraîne $x_1 = x_2$ et j est injectif. Le multiplicateur $s \in M(X)$ correspond donc à $\overline{s} \in M(G/T)$, lui aussi basique et $s(. , \xi) = \overline{s}(. , j^{-1}(\xi))$.

(iv) <u>Quatrième partie de la démonstration du théorème</u> 4(3).

Pour achever, nous allons démontrer que, si $s \in M(G/T)$ est basique et que $s(. , x) \in C(\mu)$, $s(. , x)$ est extrémal dans $B(\mu)$.

Nous allons pour cela démontrer que, si $s \in M(G/T)$ et si σ est le K-multiplicateur équivalent à s , σ appartenant à la fonction sphérique Φ , il existe $s_1 \in M(G/T)$, $s_1(. , x)$ étant extrémal dans $B(\mu)$ et le K-multiplicateur σ_1 , équivalent à s_1 appartenant à Φ , également.

Si nous supposons ce résultat établi, et si s est basique, σ l'est aussi, et $\sigma = \sigma_1 = \sigma_\Phi$. Il en résulte que s et s_1 sont équivalents, appartiennent tous deux à $C(\mu)$, donc sont égaux, d'après le lemme 14. Il est ainsi établi que, pour $x \in G/T$, $s(. , x)$ est extrémal dans $B(\mu)$.

Démontrons donc le résultat annoncé.

Notons E l'ensemble des points extrémaux de $B(\mu)$; pour $f \in E$, il existe $s_f \in M(G/T)$ et $x_f \in G/T$ tels que $s_f(. , x_f) = f$. Ce couple (s_f , x_f) est unique avec cette propriété, d'après le lemme 14.

Soit σ_f le K-multiplicateur équivalent à s_f , on a :

$$\sigma_f(g , x) = \frac{\int_K s_f(kg , x)\, dk}{\int_K s_f(k , x)\, dk}$$

et

$$\sigma_f(g , x_f) = \frac{\int_K f(kg)\, dk}{\int_K f(k)\, dk} .$$

Si $\Phi(f)$ est la fonction sphérique à laquelle appartient σ_f , on a :

$$\Phi_f(g) = \int_K \sigma_f(gk , x_f)\, dk = \frac{\int_K \int_K f(kgk')\, dk\, dk'}{\int_K f(k)\, dk} .$$

Soient maintenant $s_0 \in M(G/T)$ et $x_0 \in G/T$, tels que $s_0(. , x_0) \in C(\mu)$. Soient σ_0 le K-multiplicateur équivalent à s_0 , et Φ_0 la fonction sphérique associée; on a

$$\sigma_0(g , x) = \frac{\int_K s_0(kg , x)\, dk}{\int_K s_0(k , x)\, dk} \quad \text{et} \quad \Phi_0(g) = \frac{\int_K \int_K s_0(kgk' , x)\, dk\, dk'}{\int_K s_0(k , x)\, dk}$$

pour $x \in G/T$. D'après le théorème 4(2), il existe une mesure ν , portée par un compact de E dont $s_0(. , x_0)$ est la résultante. Remarquons alors que sur $C(\mu)$, l'application $h \longmapsto h(g)$, pour g fixe dans G , est continue pour la topologie vague ; en effet

$$h = \mu^{(2)} \star h \quad \text{et} \quad h(g) = \int h(g') \frac{\psi^{(2)}(gg'^{-1})}{\Delta(g')}\, dg' ,$$

ce qui démontre la propriété, $\psi^{(2)}$ étant continue à support compact.

Il en résulte que, pour $g \in G$:

$$s_0(g , x_0) = \int_E f(g)\ d\nu(f) \quad .$$

Alors :

$$\Phi_0(g) = (\int_K \int_K \int_E f(kgk')\ dk\ dk'\ d\nu(f))(\int_K s_0(k , x)\ dk)^{-1}$$

$$= (\int_E \Phi_f(g)(\int_K f(k)\ dk)\ d\nu(f))(\int_K s_0(k , x)\ dk)^{-1} .$$

Notons alors ν_1 la mesure définie par

$$d\nu_1(f) = \frac{(\int_K f(k)\ dk)\ d\nu(f)}{\int_K s_0(k , x)\ dk} \quad ;$$

on a

$$\Phi_0(g) = \int_E \Phi_f(g)\ d\nu_1(f) \text{ , où } \nu_1 \text{ ne dépend pas de } g .$$

Alors

$$\int_K \Phi_0(gkg)\ dk = \int_K \int_E \Phi_f(gkg)\ d\nu_1(f) \quad ,$$

donc

$$[\int_E \Phi_f(g)\ d\nu_1(f)]^2 = [\Phi_0(g)]^2 = \int_E [\Phi_f(g)]^2\ d\nu_1(f) \quad .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, cette dernière égalité entraîne que $\Phi_f(g)$ est constant à g constant, donc indépendant de f pour f dans le support de ν_1 ; il en résulte que $\Phi_0 = \Phi_f$ pour f dans le support de ν_1 qui est non vide : σ_f appartient à Φ_0 , et la propriété est établie.

Récapitulation.

(a) $\Longrightarrow$ (b) a été établi dans la troisième partie de la démonstration, (iii).

(b) $\Longrightarrow$ (a) est démontré dans la quatrième partie, (iv).

Le fait que les fonctions soient deux à deux distinctes résulte du lemme 13.

Le fait que E_1 ne rencontre chaque classe de $H(X)$ qu'en un point est le lemme 14.

III. Application aux groupes de Lie semi-simples

Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe, non compact, et de centre fini (nous dirons dans la suite simplement semi-simple), nous allons rapidement montrer que les théorèmes obtenus s'appliquent à ce cas (Théorèmes 3 et 4, Corollaire 2).

Tout d'abord, K étant un sous-groupe compact maximal, il existe un sous-groupe abélien A et un sous-groupe nilpotent N, tels que $G = K\,AN$, l'application canonique de $K\,AN$ sur G étant un difféomorphisme, AN étant un groupe résoluble, et le produit de K par AN étant semi-direct. De plus, AN est isomorphe à un groupe de matrices triangulaires complexes, à éléments réels dans la diagonale. D'autre part, il existe une involution sur G, $g \longmapsto g'$ vérifiant :

$g'' = g$,

$(g_1\, g_2)' = g_2'\, g_1'$,

$k^{-1} = k'$ pour $k \in K$,

si $P = \{g \mid g' = g\}$, $Pk = kP = G$ (voir [8] et [11]).

Nous allons en déduire le lemme suivant.

LEMME 15. - $\{m_K \star \varepsilon_g \star m_K\}_{g\in G}$ <u>est une famille commutative</u>.

<u>Démonstration</u>. - On étend l'involution aux fonctions sur G en posant $f'(x) = f(x')$, puis aux mesures en posant $\mu'(f) = \mu(f')$. Alors $(\varepsilon_g)' = \varepsilon_{g'}$ et $(m_K)' = m_K$. Pour $p \in P$,

$$(m_K \star \varepsilon_p \star m_K)' = m_K \star \varepsilon_p \star m_K \quad .$$

Soit $g \in G$, on a $g = kp$ avec $k \in K$, $p \in P$,

$$m_K \star \varepsilon_g \star m_K = m_K \star \varepsilon_p \star m_K \quad ,$$

donc

$$(m_K \star \varepsilon_g \star m_K)' = m_K \star \varepsilon_g \star m_K \quad .$$

Il en résulte que, pour toute mesure μ, $(m_K \star \mu \star m_K)' = m_K \star \mu \star m_K$. Alors

$$(m_K \star \varepsilon_{g_1} \star m_K \star m_K \star \varepsilon_{g_2} \star m_K)' = (m_K \star \varepsilon_{g_2} \star m_K)'\,(m_K \star \varepsilon_{g_1} \star m_K)' \quad ,$$

mais aussi

$$= (m_K \star (\varepsilon_{g_1} \star m_K \star m_K \star \varepsilon_{g_2}) \star m_K)' = m_K \star \varepsilon_{g_1} \star m_K \star m_K \star \varepsilon_{g_2} \star m_K \quad ,$$

d'où l'égalité des deux produits.

Pour appliquer les théorèmes, il nous suffit d'exhiber un groupe T ayant les propriétés voulues. Nous allons voir que le normalisateur de AN convient pour cela (AN lui-même convient déjà, mais les résultats sont d'autant plus intéressants que G/T est "petit").

LEMME 16. - Soit T un opérateur linéaire inversible de $\underset{\sim}{R}^n$ à valeurs propres strictement positives. Si pour un vecteur x, l'ensemble des vecteurs

$$\{T^n x \mid n \in \underset{\sim}{Z}\}$$

est borné, $Tx = x$.

Démonstration. - $\{T^n x \mid n \in \underset{\sim}{Z}\}$ engendre un sous-espace vectoriel stable de $\underset{\sim}{R}^n$, H. Ce sous-espace est même engendré par $\{T^n(x) \mid 1 \leqslant x < r\}$ pour un certain r. Il en résulte que, pour $y \in H$, $\{T^n y \mid y \in \underset{\sim}{Z}\}$ est borné, donc que l'ensemble des opérateurs T^n, $n \in \underset{\sim}{Z}$, est borné ; il en résulte que les valeurs propres de T sont sur le cercle unité, donc égales à 1. Par suite, on peut écrire, si T_1 est la restriction de T à H, $T_1 = I + N$, où I est l'identité de H, et N est un opérateur nilpotent sur H. Il existe $i \geqslant 1$, entier positif minimum, tel que $N^i = 0$. Si $i \geqslant 2$, on a $N^{i-1} \neq 0$, $N^i = 0$ et

$$(I + N)^p N^{i-2} = N^{i-2} + pN^{i-1}$$

est borné uniformément par rapport à p, donc $N^{i-1} = 0$; ceci est absurde, et il en résulte $i = 1$, $N = 0$, et $T_1 = I$, donc $Tx = x$.

PROPOSITION 7. - Soient G un groupe de Lie connexe, G_1 un sous-groupe de Lie fermé, distingué et connexe, de G. Notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_1$ leurs algèbres de Lie. On suppose que :

(a) G_1 est un groupe de Tikhonov,

(b) G/G_1 est de dimension 1,

(c) pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}\, x/\mathfrak{g}_1$ a des valeurs propres réelles.

Alors G est un groupe de Tikhonov.

Démonstration.

1° Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe, C un cône à base compacte de E, et supposons que G opère sur E en laissant stable C. G_1, étant de Tikhonov, a au moins un vecteur propre dans C : soit $x \neq 0$, $gx = \lambda(g)x$ pour $g \in G_1$, avec $\lambda(g) \in \underset{\sim}{R}$. L'application $g \longmapsto \lambda(g)$ est une exponentielle positive continue sur G_1, comme il est immédiat de le voir.

Réciproquement, soient λ une exponentielle positive continue sur G_1 et $C_\lambda = \{x \mid x \in C , \forall g_1 \in G_1 , g_1.x = \lambda(g_1)x\}$: C_λ est un cône convexe, éventuellement vide. D'autre part, pour $g \in G$, on a : $g^{-1} G_1 g \subset G_1$, on peut donc poser :

$$\lambda^g(g_1) = \lambda(g^{-1} g_1 g) \quad \text{pour} \quad g_1 \in G_1 ,$$

et λ^g est une exponentielle sur G_1 ; on voit que, si $x \in C_\lambda$:

$$g_1\, gx = gg^{-1}\, g_1\, gx = \lambda(g^{-1}\, g_1\, g)gx = \lambda^g(g_1)gx \quad ,$$

donc

$$gx \in C_{\lambda^g} \quad \text{et} \quad gC_\lambda \subset C_{\lambda^g} \quad .$$

Supposons $C_\lambda \neq \emptyset$, et soit L la forme linéaire définissant la base compacte de C . On a :

$$\lambda^g(g_1)\; L(gx) = g_1\, gx \qquad (g \in G \;,\; g_1 \in G_1) \quad ,$$

donc :

$$\lambda^g(g_1) = \frac{L(g_1\, gx)}{L(gx)} \quad ;$$

la fonction $z \longmapsto L(g_1\, z)$ pour $z \in B$, base compacte de C , est continue et jamais nulle $(L(g_1\, z) = 0 \implies g_1\, z = 0 \implies z = 0)$, donc il existe m et M , $0 < m \leqslant L(g_1\, z) \leqslant M$ pour $z \in B$ (on suppose que B est définie par $L(g) = 1$). Il en résulte que, g_1 étant fixé, $m \leqslant \dfrac{L(g_1\, gx)}{L(gx)} \leqslant M$, donc

$$\lambda^g(g_1) \in [m \;,\; M] \quad \text{pour} \quad g \in G \quad .$$

2° Soit G_1' l'adhérence du groupe dérivé de G_1 . Les exponentielles continues sur G_1 passent au quotient dans G_1/G_1' : il y a isomorphisme entre le groupe des exponentielles continues sur G_1/G_1' et le groupe des exponentielles continues sur G_1 . G_1/G_1' , étant connexe et abélien, est l'image homomorphe de son algèbre de Lie (avec la structure additive) par l'application exponentielle. Notons $\mathfrak{g}_1'$ l'algèbre de Lie de G_1' : $\mathfrak{g}_1' \supset [\mathfrak{g}_1 \;,\; \mathfrak{g}_1]$; de la remarque précédente, il résulte que l'on peut définir, par transposition, un homomorphisme injectif du groupe des exponentielles positives continues sur G_1/G_1' dans le groupe des exponentielles (pour l'addition) continues sur $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1'$. Si f est un homomorphisme de $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1'$ additif dans $\underset{\sim}{R}^{*+}$ multiplicatif, $\log \circ f$ est un homomorphisme de $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1'$ additif dans $\underset{\sim}{R}$ additif, et si f est continu, $\log \circ f$ est continu, donc linéaire,

$$\log \circ f \in (\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1')^* \quad .$$

Considérons enfin l'injection naturelle de $(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1')^*$ dans $\mathfrak{g}_1^*$: nous obtenons un homomorphisme injectif φ du groupe multiplicatif des exponentielles sur G_1 dans le groupe additif de $\mathfrak{g}_1^*$. Cherchons ce que devient, pour $g \in G$, l'homomorphisme $\lambda \longmapsto \lambda^g$. Puisqu'il s'écrit, en fonction de l'automorphisme intérieur $\hat{g}$ défini par g : $\lambda \longmapsto \lambda \circ \hat{g} = \lambda^g$, $\hat{g}$ passant au quotient dans G_1/G_1' , et définissant un automorphisme $\mathrm{Ad}\, g$ de $\mathfrak{g}$ (qui passe au quotient dans $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1'$), il en résulte que :

$$\varphi(\lambda^g) = \varphi(\lambda) \circ (\mathrm{Ad}\, g/\mathfrak{g}_1)$$

(essentiellement transport de structure). Mais l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G est surjective et la formule : $\exp \circ \mathrm{ad} = \mathrm{Ad} \circ \exp$ montre que $\mathrm{Ad}\, G = \exp \circ \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, et que $\mathrm{Ad}\, G$ est formée d'opérateurs, qui, restreints à $\mathfrak{g}_1$, ont des valeurs propres strictement positives. Il en est de même des opérateurs transposés et de leurs restrictions à un sous-espace stable : ainsi, sur l'image de φ , pour $g \in G$, $\varphi(\lambda) \longmapsto \varphi(\lambda^g)$ est un opérateur à valeurs propres strictement positives. Soit F l'espace vectoriel de fonctions :

$$F = \{\log \lambda \mid \lambda \text{ exponentielle positive sur } G_1\} \;;$$

l'application $\log \lambda \longmapsto \log \lambda^g$ est un opérateur linéaire, à valeurs propres positives ($\log \lambda \longleftrightarrow \varphi(\lambda)$ est un isomorphisme).

Soit λ_0 telle que $C_{\lambda_0} \neq \emptyset$. D'après le 1° ci-dessus, $\{\log \lambda_0^g(g_1)\}$ est borné pour tout g_1 , donc $\{\log \lambda_0^g\}$ est borné en norme, indépendamment de g . Il en résulte, d'après le lemme 16 appliqué à $T :\ \log \lambda \longrightarrow \log \lambda^g$, où

$$T^n :\ \log \lambda \longrightarrow \log \lambda^{g^n} ,$$

que $\log \lambda_0^g = \log \lambda_0$ pour tout $g \in G$, ou encore $\lambda_0^g = \lambda_0$; de $gC_{\lambda_0} \subset C_{\lambda_0^g}$, on tire donc $gC_{\lambda_0} \subset C_{\lambda_0}$.

3° G laisse donc C_{λ_0} stable ; soit $B_0 = B \cap C_{\lambda_0}$, et faisons opérer G sur B_0 en posant $\alpha(g).x = \dfrac{gx}{L(gx)}$ pour $x \in B_0$. La représentation α est triviale sur G_1 , donc définit une représentation $\overline{\alpha}$ de G/G_1 . Ce dernier groupe étant de dimension 1 , et B_0 étant compacte, $\overline{\alpha}$ a un point fixe dans B_0 : il est immédiat que ce point fixe est un point fixe pour α , donc un vecteur propre pour la représentation initiale.

COROLLAIRE 3. - <u>Un sous-groupe connexe du groupe des matrices triangulaires supérieures sur $\mathbb{C}$, à éléments réels dans la diagonale, est un groupe de Tikhonov.</u>

<u>Démonstration</u>. - Montrons d'abord que, pour le groupe des matrices triangulaires complexes, à éléments réels sur la diagonale, $\mathrm{Ad}\, x$ a ses valeurs propres réelles pour tout $x \in \mathfrak{g}$; en effet, il est facile de voir que ces valeurs propres sont les différences des éléments diagonaux de la matrice x , qui sont réels. Il en résulte que cette propriété est vraie aussi pour tout sous-groupe. Il suffit alors de remarquer qu'un tel groupe est résoluble, et qu'il existe une suite finie :

$$G = G_n \supset G_{n-1} \supset \ldots \supset G_0 = \{0\} \quad ,$$

avec G_{i+1}/G_i de dimension 1 , G_i distingué dans G_{i+1} et connexe, pour pouvoir démontrer par récurrence, à l'aide du théorème 4, que G_i est de Tikhonov : donc G_n est un groupe de Tikhonov.

COROLLAIRE 4. - Si G est un groupe de Lie semi-simple et si $G = K\,AN$ est une décomposition d'Iwasawa, AN est de Tikhonov.

Démonstration. - AN est isomorphe à un groupe de matrices triangulaires supérieures, à éléments réels dans la diagonale (voir [11]).

COROLLAIRE 5. - Avec les notations déjà introduites, soit G un groupe de Lie semi-simple : T est un groupe de Tikhonov.

Démonstration. - Le normalisateur de AN, T, peut aussi s'écrire $T = K_0\,AN$, où K_0 est le centralisateur de A dans K (voir [6]). En outre, N est le groupe dérivé de AN , et toute exponentielle positive λ sur AN est donc triviale sur N : λ est déterminée par ses valeurs sur A . Soient $k \in K_0$ et

$$\lambda^k : x \longmapsto \lambda(k^{-1}\,xk) = \lambda^k(x) \quad \text{pour} \quad x \in AN \quad ;$$

puisque $\lambda(k_0^{-1}\,ak_0) = \lambda(a)$ pour $a \in A$, on a $\lambda^{k_0} = \lambda$. Supposons alors que T opère sur un espace localement convexe E et que C soit un cône à base compacte sur lequel T opère continûment, et soit

$$C_\lambda = \{x \mid x \in C \ , \ \forall\, g \in AN \ , \ g.x = \lambda(g)x\} \quad ;$$

on a :

$$kC_\lambda \subset C_{\lambda^k} = C_\lambda \quad \text{pour} \quad k \in K_0 \quad .$$

Puisque AN est de Tikhonov, il existe λ telle que $C_\lambda \neq \{0\}$. Soit $x_0 \in C_\lambda$, $x_0 \neq 0$ et

$$x = \int_{K_0} k_0\, x_0\, dk_0 \quad ,$$

on a $k_0\, C_\lambda \subset C_\lambda$, donc $x \in C_\lambda$; il est manifeste que x est fixe par K , et, étant vecteur propre pour AN , il est vecteur propre pour T , ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONY (Jean-Michel). - Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 3e année, 1964, n° 5, 7 p.

[2] CHOQUET (Gustave) et DENY (Jacques). - Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 799-801.

[3] CHOQUET (Gustave). - Etude des mesures coniques ; cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 445-447.

[4] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 12, 15 p.

[5] DELZANT (Antoine). - Fonctions harmoniques sur un groupe semi-simple. I : Fonctions des espaces homogènes, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 7e année, 1962/63, n° 10, 19 p.

[6] FURSTENBERG (Harry). - A Poisson formula for semi simple Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 77, 1963, p. 335-386.

[7] FURSTENBERG (Harry). - Translation-invariant cones of functions on semi simple Lie groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 271-326.

[8] HELGASON (Sigudur). - Differential geometry and symmetric spaces. - New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics, 12).

[9] MOORE (Calvin C.). - Compactifications of symmetric spaces, Amer. J. of Math., t. 86, 1964, p. 201-218.

[10] SCHWARTZ (Laurent). - Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires. Cours 1964/65 (multigr.).

[11] Séminaire Sophus Lie : Théorie des algèbres de Lie, t. 1, 1954/55. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.