Jeffery Cooper

Régularisation d'un opérateur intégral singulier elliptique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A9, p. A1-A6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
7e année, 1967/68, n° A.9

1er février 1968

RÉGULARISATION D'UN OPÉRATEUR INTÉGRAL SINGULIER ELLIPTIQUE

par Jeffery COOPER

1. Introduction.

CZ_1 est l'algèbre des opérateurs linéaires continus S de $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ dans $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ de la forme

$$S = H + K$$

où $H \in CZ_\beta^0$ avec $\beta > 1$ et K est un opérateur appliquant $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ dans $H^1(\underset{\sim}{R}^n)$ continuement. Il existe un homomorphisme d'algèbres

$$\sigma : \quad CZ_1 \to \bigcup_{\beta>1} G_\beta^0$$

défini par $\sigma_S = \sigma_H(x , \xi) \in G_\beta^0$ (avec $\beta > 1$). σ_S est appelé le symbole de l'opérateur S .

On se pose la question suivante : Soit $S \in CZ_1$ tel que $\sigma_S(x , \xi) \neq 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R}^n$ et $\xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\}$. Est-ce que S a un inverse ? L'exemple très simple qui suit implique qu'en général la réponse doit être négative.

Soit $P : L^2(\underset{\sim}{R}^n) \to H^1(\underset{\sim}{R}^n)$ un projecteur de rang fini. Alors $S = I - P \in CZ_1$ et $\sigma_S(x , \xi) = 1$ mais S n'a pas d'inverse.

Cependant, nous allons voir que S a un inverse, à un opérateur régularisant près.

2. Régularisation d'un opérateur intégral singulier elliptique.

THÉORÈME. - Soient $S \in CZ_1$ et $\sigma_S(x , \xi) \in G_\beta^0$ son symbole. On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$|\sigma_S(x , \xi)| \geqslant a \quad \text{pour tout } x \in \underset{\sim}{R}^n , \ \xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\} .$$

Alors, il existe un opérateur $T \in CZ_1$ qui est inversible de $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ dans $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$ et dont le symbole vérifie

$$\sigma_S \, \sigma_T = 1 .$$

Démonstration. - $|\sigma_S(x , \xi)| \geqslant a > 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R}^n$ et $\xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\}$, donc $F(x , \xi) = \sigma_S(x , \xi)^{-1}$ appartient aussi à G_β^0 .

$\sigma_S(x\,,\,\xi)$ est borné uniformément en x et ξ, donc $|F(x\,,\,\xi)|$ est borné inférieurement par un nombre > 0. Soit $\xi_0 \in \Sigma_n = \{\xi \in \underset{\sim}{R}^n : |\xi| = 1\}$ un point fixé, et posons :

$$a(x) = F(x\,,\,\xi_0)\,F(0\,,\,\xi_0)^{-1} \in C^\beta(\underset{\sim}{R}^n)$$

$$G(x\,,\,\xi) = F(x\,,\,\xi)\,a^{-1}(x)\,F(0\,,\,\xi)^{-1}\ .$$

$G(x\,,\,\xi) \in C^0_\beta$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|G(x\,,\,\xi)| \geqslant c > 0 \qquad \text{pour tout } x \in \underset{\sim}{R}^n\,,\ \ \xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\}\ .$$

De plus,

$$(1)\qquad \begin{cases} G(x\,,\,\xi_0) = 1 & \forall\ x \in \underset{\sim}{R}^n \\ G(0\,,\,\xi) = 1 & \forall\ \xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\}\ . \end{cases}$$

LEMME. - $G(x\,,\,\xi)$ <u>a une racine</u> m<u>-ième</u> (m <u>entier</u> $\geqslant 0$) $G_m(x\,,\,\xi)$ <u>appartenant à</u> G^0_β , <u>telle que</u> $G_m(x\,,\,\xi_0) = 1\ \ \forall\ x \in \underset{\sim}{R}^n$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\xi \in \Sigma_n$, et soit C un grand cercle passant par ξ_0 et ξ. On pose

$$\Phi(x\,,\,\xi) = \int_C \frac{dG}{G} = \int_0^\tau \frac{\sum_{j=1}^n G_j(x\,,\,\xi(t))\,\xi'_j(t)}{G(x\,,\,\xi(t))}\,dt$$

où $G_j(x\,,\,.) = \dfrac{\partial}{\partial\xi_j}G(x\,,\,.)$, et $t \to \xi(t)$ est une paramétrisation de C telle que $\xi(0) = \xi_0$ et $\xi(\tau) = \xi$.

L'intégrale existe parce que $|G(x\,,\,\xi)| \geqslant c > 0$ pour x et ξ. La définition est bonne parce que l'intégrale est indépendante du choix de la courbe entre ξ_0 et ξ. En effet, soient C_1 et C_2 deux courbes entre ξ_0 et ξ. Soient Γ_1 et Γ_2 leurs images dans le plan complexe par $G(x\,,\,\xi)$,

$$\int_{\Gamma_1}\frac{du}{u} = \int_{C_1}\frac{dG}{G} \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_2}\frac{du}{u} = \int_{C_2}\frac{dG}{G}\ .$$

Or, la courbe $\Gamma_1 - \Gamma_2$ est l'image de la courbe $C_1 - C_2$; $\Gamma_1 - \Gamma_2 \subset \underset{\sim}{C} - \{0\}$ et les conditions (1) entraînent que $\Gamma_1 - \Gamma_2$ est homotope au point $+1$. Donc, d'après un théorème de la théorie des fonctions ([2], p. 6)

$$\int_{\Gamma_1-\Gamma_2}\frac{du}{u} = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_{C_1} \frac{dG}{G} = \int_{C_2} \frac{dG}{G} \quad .$$

Montrons que Φ est bornée. Pour $\xi \in \Sigma_n$, nous prenons pour C le grand cercle passant par ξ_0 et ξ, tel que $C = \{\xi(t)\}$ avec

$$\begin{cases} \xi(0) = \xi_0 \\ \xi(\tau) = \xi \qquad\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \pi \\ |\xi'(t)| = 1 \end{cases}$$

Alors,

$$|\Phi(x , \xi)| = |\int_C \frac{dG(x , \xi)}{G(x , \xi)}|$$

(2)
$$= |\int_0^\tau \frac{\sum_{j=1}^n G_j(x , \xi(t))\, \xi_j'(t)}{G(x , \xi(t))} dt| \leqslant \frac{1}{c} \int_0^\tau (\sum_{j=1}^n |G_j(x , \xi(t))|^2)^{1/2} dt \quad ;$$

et $\sum_{j=1}^n |G_j(x , \xi)|^2$ est borné uniformément en x et ξ parce que $G(x , \xi) \in G_\beta^0$ $\beta > 1$.

Φ est continue. Soient ξ_1 et ξ_2 deux points de Σ_n. Soient $C_1 : \widehat{\xi_0 \xi_1}$, $C_2 : \widehat{\xi_0 \xi_2}$, $C_3 : \widehat{\xi_1 \xi_2}$ des courbes géodésiques. Alors $C_2 - C_3 - C_1$ est une courbe fermée, donc

$$\Phi(x , \xi_2) - \Phi(x , \xi_1) = \int_{C_2} \frac{dG}{G} - \int_{C_1} \frac{dG}{G} = \int_{C_3} \frac{dG}{G} \quad .$$

Quand $\xi_2 \to \xi_1$ sur la sphère Σ_n, la distance géodésique le long de C_3 tend vers zéro, et une majoration du type (2) entraîne que

(3)
$$\Phi(x , \xi_2) \to \Phi(x , \xi_1) \quad \text{uniformément } \forall\, x \in \underset{\sim}{R}^n \quad .$$

Maintenant, pour ξ fixe et $C : \widehat{\xi_0 \xi}$, $x , y \in \underset{\sim}{R}^n$,

$$\Phi(x , \xi) - \Phi(y , \xi) = \int_C \frac{dG(x , \xi)}{G(x , \xi)} - \int_C \frac{dG(y , \xi)}{G(y , \xi)}$$

$$= \int_C \frac{G(y , \xi)\, dG(x , \xi) - G(x , \xi)\, dG(y , \xi)}{G(x , \xi)\, G(y , \xi)} \quad .$$

Donc

$$|\Phi(x , \xi) - \Phi(y , \xi)| \leqslant \frac{1}{c^2} \int_C |G(y , \xi) \sum_j G_j(x , \xi) - G(x , \xi) \sum_j G_j(y , \xi)|\, dt \quad .$$

Alors $G(x\ ,\ \xi) \in G^0_\beta$ implique que

$$(4) \qquad \forall\ \xi \in \Sigma\ , \qquad \Phi(x\ ,\ \xi) \rightarrow \Phi(y\ ,\ \xi) \qquad \text{quand} \quad x \rightarrow y\ .$$

On déduit de (3) et (4) que Φ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \Sigma_n$.

Localement, $\Phi = L \circ G$ où L est une détermination du logarithme complexe. Donc Φ est un logarithme continu de G sur $\mathbb{R}^n \times \Sigma$; et nous pouvons prolonger Φ à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ en une fonction homogène de degré zéro telle que

$$(5) \qquad G(x\ ,\ \xi) = e^{\Phi(x,\xi)} \qquad \forall\ (x\ ,\ \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})\ .$$

Du fait que Φ est un logarithme continu de G , on a

$$\frac{\partial\Phi(x\ ,\ \xi)}{\partial x_i} = \frac{\partial G(x\ ,\ \xi)}{\partial x_i}\, G(x\ ,\ \xi)^{-1}$$

$$\frac{\partial\Phi(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial G(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi_j}\, G(x\ ,\ \xi)^{-1}$$

et on en déduit que $\Phi(x\ ,\ \xi) \in G^0_\beta$ parce que $|G(x\ ,\ \xi)| \geqslant c$ pour tout $(x\ ,\ \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$.

Alors, pour m entier, $m > 0$, nous posons

$$G_m(x\ ,\ \xi) = e^{\frac{1}{m}\Phi(x,\xi)}\ .$$

C. Q. F. D.

Revenons à la démonstration du théorème. $\Phi(x\ ,\ \xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}^n \times \{|\xi| \geqslant 1\}$ donc $G_m(x\ ,\ \xi) \rightarrow 1$ uniformément sur $\mathbb{R}^n \times \{|\xi| \geqslant 1\}$ quand $m \rightarrow +\infty$. De plus,

$$\frac{\partial G_m(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi_j} = \frac{1}{m}\, \frac{\partial\Phi(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi_j}\, G_m(x\ ,\ \xi)$$

et du fait que $\Phi(x\ ,\ \xi) \in G^0_\beta$, on déduit que

$$\frac{\partial G_m(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi_j} \rightarrow 0 \qquad \text{uniformément sur} \quad \mathbb{R}^n \times \{|\xi| \geqslant 1\}$$

quand $m \rightarrow +\infty$. De la même façon, on démontre que

$$(6) \qquad \frac{\partial^{|\alpha|}\, G(x\ ,\ \xi)}{\partial \xi^\alpha} \rightarrow 0 \qquad \text{uniformément sur} \quad \mathbb{R}^n \times \{|\xi| \geqslant 1\}$$

quand $m \rightarrow \infty$, pour tout α , $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2n$.

Soit $H \in CZ_\beta^0$ l'opérateur tel que $\sigma_H = G_m(x , \xi)$. On fait appel au théorème 2 de l'exposé 5 et on voit que pour m suffisament grand,

$$\|H - I\| < \frac{1}{2}$$

où la norme est celle des opérateurs linéaires continus de L^2 dans L^2. Donc pour m grand, H est inversible, ainsi que H^m.

Soit $H_1 \in CZ_\beta^0$ tel que $\sigma_{H_1} = a(x)$ et $H_2 \in H \in CZ_\beta^0$ tel que $\sigma_{H_2} = F(0 , \xi)$. On a $|a(x)| \geqslant c_1 > 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R}^n$, donc H_1 est inversible, $|F(0 , \xi)| \geqslant b > 0$ pour tout $\xi \in \underset{\sim}{R}^n - \{0\}$, donc d'après le théorème de l'exposé 4, H_2 est inversible. Il en résulte que $T = H_1 H_2 H^m$ est inversible et

$$\sigma(T) = \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} (\sigma_H)^m = a(x) F(0 , \xi) G(x , \xi) = F(x , \xi) .$$

C. Q. F. D.

Application. - Soit $S \in CZ_1$ vérifiant les hypothèses du théorème, et soit T l'opérateur inversible tel que $\sigma_S \sigma_T = 1$. On a $TS - I = K$ où K est un opérateur qui applique L^2 dans H^1. Donc l'équation

$$Sf = g \qquad (f , g \in L^2)$$

équivaut à l'équation

$$f + Kf = Tg .$$

Quand K est compact de L^2 dans L^2, cette dernière équation est du type de Fredholm dans L^2 et on peut appliquer la théorie de l'exposé 1.

3. Une décomposition des opérateurs différentiels.

THÉORÈME. - *Soit* $P(x , D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ *un polynôme différentiel, homogène de degré* m, *à coefficients* $a_\alpha(x) \in C^\beta(\underset{\sim}{R}^n)$, $\beta \geqslant 0$. *Alors, si* $u \in H^m(\underset{\sim}{R}^n)$

$$P(x , D)u = H\Lambda^m u$$

où H *est un opérateur intégral singulier de* CZ_β^0 *et*

$$\sigma_H = (-i)^m \frac{P(x , \xi)}{|\xi|^m} .$$

<u>Démonstration</u>. - Suivant l'exposé 4, on a $\frac{\partial u}{\partial x_j} = - iR_j \Lambda u$ où R_j est un opérateur de Riesz. Les R_j et Λ commutent, donc

$$D^{\alpha} u = (- i)^m R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \ldots R_n^{\alpha_n} \Lambda^m u = (- i)^m R^{\alpha} \Lambda^m u$$

et $P(x , D)u = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = (- i)^m \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) R^{\alpha} \Lambda^m u$. Mais, on sait que $\sigma(R_j) = \frac{\xi_j}{|\xi|}$ et, par conséquent,

$$\sigma_H = \sigma[(- i)^m \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) R^{\alpha}] = (- i)^m \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \frac{\xi^{\alpha}}{|\xi|^m} \quad .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[2] HEINS (Maurice). - Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1962 (Athena Series : Selected Topics in Mathematics).

[3] SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.