SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

ERIC VAN DER OORD

Indice d'une application linéaire. Théorème de Riesz. Opérateurs compacts dans L^2

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A1, p. A1-A8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° A.1

INDICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE. THÉORÈME DE RIESZ. OPÉRATEURS COMPACTS DANS L^2

par Eric VAN DER OORD

On considère des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Inverse relatif d'une application linéaire.

DÉFINITION 1. - On se place dans la catégorie des espaces vectoriels. Soit $U : F \to G$ une application linéaire. Une application linéaire $X : G \to F$ est un inverse relatif de U si l'on a :

$$UXU = U$$

$$XUX = X \quad .$$

PROPOSITION 1. - Avec les notations précédentes, $\mathrm{Im}(X)$ est supplémentaire de $\mathrm{Ker}(U)$, XU un projecteur P de F sur $\mathrm{Im}\, X$, UX un projecteur Q de G sur $\mathrm{Im}(U)$, et la donnée de X équivaut à celle des projecteurs P et Q. De plus, U induit une bijection U_X de $\mathrm{Im}(XU)$ sur $\mathrm{Im}\, U$, et X la bijection inverse.

1° Si U admet un inverse relatif X, on a :

$$XU\, XU = XU \quad ,$$

donc XU est un projecteur.

$$\mathrm{Im}\, X = \mathrm{Im}\, XUX \subset \mathrm{Im}\, XU \subset \mathrm{Im}\, X \quad ,$$

donc $\mathrm{Im}\, XU = \mathrm{Im}\, X$.

$$\mathrm{Ker}\, U \subset \mathrm{Ker}\, XU \subset \mathrm{Ker}\, UXU = \mathrm{Ker}\, U \quad ,$$

donc $\mathrm{Ker}\, XU = \mathrm{Ker}\, U$, et de même, la définition étant symétrique en U et X, UX est un projecteur de G sur $\mathrm{Im}\, U$.

2° Réciproquement, si l'on a les projecteurs P et Q, U induit un isomorphisme U_0 de $\mathrm{Im}\, P$ sur $\mathrm{Im}\, U$. Si J est l'injection de $\mathrm{Im}\, P$ dans F, on pose :

$$X = J\, U_0^{-1}\, Q \quad .$$

THÉORÈME 1. - La proposition précédente subsiste dans la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues.

En effet, alors $\operatorname{Im} P$ est fermé, donc J est continue, et U_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques (e. v. t.) d'après le théorème de Banach.

DÉFINITION 2. - On dit qu'une application linéaire U est régulière si elle admet un inverse relatif.

2. Opérateurs compacts.

DÉFINITION 3. - Soient F et G des e. v. normés, $U : F \to G$ une application linéaire ; on dit que U est compacte si l'image $U(B_F)$ de la boule unité F est relativement compacte dans G.

PROPRIÉTÉS.

- Une application linéaire compacte est continue.
- Si $V : G \to H$ est continue, VU est compacte.
- Si $V' : E \to F$ est continue, UV' est compacte.
- Une application linéaire continue, de rang fini, est compacte.
- En outre, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Si G est complet, l'espace $K(F, G)$ des applications linéaires compactes est fermé dans $L(F, G)$.

En effet, si $U \in \overline{K(F, G)}$, $U(B_F)$ est tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble P précompact dans G tel que

$$U(B_F) \subset B(P, \varepsilon) \quad ;$$

$U(B_F)$ est précompact, d'où le résultat, puisque G est complet (cf. BOURBAKI, [1], Topologie générale, chapitre 2, § 4, n° 2).

PROPOSITION 3. - Si $U : F \to G$ est compacte, sa transposée $U^* : G' \to F'$ est compacte.

Démonstration. - On a :

$$U^*(B_{G'}) = \{L \circ U \mid L \in B_{G'}\} \quad .$$

Donc $U^*(B_{G'})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur B_F, est isomorphe à $B_{G'}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $U(B_F)$. Or $B_{G'}$ est équicontinu, et $U(B_F)$ relativement compact, doù le résultat d'après le théorème d'Ascoli.

Remarque. - L'adhérence $L\mathfrak{F}(F , G)$ de l'ensemble des applications linéaires de rang fini dans $L(F , G)$ vérifie

$$L\mathfrak{F}(F , G) \subset K(F , G) \quad ,$$

lorsque G est complet.

On ne sait pas si l'inclusion inverse a lieu pour tout couple (F , G) d'espaces de Banach, la postuler constitue "l'hypothèse d'approximation". Elle est vraie si F ou G est un Hilbert.

3. Opérateurs à indice.

On se place dans la catégorie des espaces vectoriels.

DÉFINITION 4. - Une application linéaire $u : F \to G$ est dite d'indice fini $\chi(u)$ si son noyau et son image sont respectivement de dimension et codimension finies, et l'on pose :

$$\chi(u) = \dim \operatorname{Ker} U - \operatorname{codim} \operatorname{Im} U \quad .$$

Propriétés.

- Si U a un inverse relatif X , $\chi(X) = -\chi(U)$.
- Si F et G sont de dimension finie, $\chi(.)$ est constante sur $\operatorname{Hom}(F , G)$ et vaut $\dim F - \dim G$.

THÉORÈME 2. - Soit

$$F \xrightarrow{U} G \xrightarrow{V} H \quad .$$

Alors si deux des trois morphismes V , U , VU sont d'indice fini, le troisième l'est aussi, et l'on a :

$$\chi(VU) = \chi(V) + \chi(U) \quad .$$

Démonstration. - On décompose F , G , H de la manière suivante :

$$\begin{array}{lccccccccl} F = & & & \widetilde{F} & \oplus & F_2 & \oplus & F_1 & \qquad F_1 = \operatorname{Ker} U \, , & \qquad F_1 \oplus F_2 = \operatorname{Ker} VU \, , \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ G = & G_3 & \oplus & \widetilde{G} & \oplus & G_2 & \oplus & G_1 & \qquad G_1 \oplus G_2 = \operatorname{Ker} V \, , & \qquad \widetilde{G} \oplus G_2 = \operatorname{Im} U \, , \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ H = & H_1 & \oplus & \widetilde{H} & \oplus & H_2 & & & \qquad \widetilde{H} = \operatorname{Im} VU \, , & \qquad H_1 \oplus \widetilde{H} = \operatorname{Im} V \quad . \end{array}$$

On a des isomorphismes : $F_2 \to G_2$, $\widetilde{F} \to \widetilde{G} \to \widetilde{H}$, $G_3 \to H_1$.

Le théorème est alors aisé à vérifier en écrivant les définitions.

L'importance des opérateurs à indice est liée au fait suivant :

THÉORÈME 3. - Si F et G sont des espaces de Banach, et si $U : F \to G$ est continue et d'indice fini, alors U admet un inverse relatif continu.

En effet, $\mathrm{Ker}\, U$ est de dimension finie, donc admet un supplémentaire topologique. Il en est de même pour $\mathrm{Im}\, U$ en vertu du lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $U : F \to G$ un morphisme d'espaces de Banach. Si $\mathrm{Im}\, U$ est de codimension finie, $\mathrm{Im}\, U$ est fermé.

En effet, si N est un supplémentaire algèbrique (de dimension finie) de $\mathrm{Im}\, U$, le morphisme

$$U_1 : F \times N \to G$$
$$(f, t) \mapsto Uf + t$$

est continu surjectif, donc

$$\mathrm{Im}\, U \simeq F \times \{0\} / \mathrm{Ker}\, U \times \{0\}$$

est complet, donc fermé.

4. Propriétés de stabilité de l'indice.

Dans la suite de l'exposé, on restera dans la catégorie des espaces de Banach.

THÉORÈME 4. - Soient F et G des espaces de Banach, $U : F \to G$ un morphisme d'indice fini, X un inverse relatif continu de U. Alors si $T : F \to G$ vérifie $\|T\| < \frac{1}{\|X\|}$, $U + T$ est d'indice fini, et

$$\chi(U + T) = \chi(U) \quad .$$

En effet, $\underset{\sim}{1}_G + TX$ est inversible dans $L(G, G)$, donc d'indice nul, et :

$$\chi(X) = \chi(X(\underset{\sim}{1}_G + TX)) = \chi(XUX + XTX) = 2\chi(X) + \chi(U + T) \quad ,$$

d'où

$$\chi(U + T) = - \chi(X) = \chi(U) \quad .$$

THÉORÈME 5 (RIESZ). - Soient F un espace de Banach, $K : F \to F$ un endomorphisme compact de F ; alors $U = \underset{\sim}{1}_F - K$ est d'indice nul.

Démonstration.

1° $\mathrm{Ker}\, U$ est de dimension finie : en effet, $B_F \cap \mathrm{Ker}\, U \subset K(B_F)$; la boule unité de $\mathrm{Ker}\, U$ est compacte, donc $\mathrm{Ker}\, U$ est de dimension finie.

2° Im U est fermé : il suffit de montrer que la bijection continue

$$U_1 : F_0 \longrightarrow \operatorname{Im} U ,$$

où F_0 est un supplémentaire topologique de Ker U , est bicontinue ; dans le cas contraire, il existerait une suite f_n vérifiant

$$\forall n , \quad f_n \in F_0 , \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f_n - Kf_n = 0 \quad .$$

Or, K étant compacte, il existe une sous-suite f_{n_K} telle que $\lim_{K\to\infty} Kf_{n_K}$ existe ; si f est cette limite, elle doit vérifier :

$$\|f\| = 1 , \quad f \in F_0 , \quad f \in \operatorname{Ker} U$$

ce qui est impossible.

3° Alors $\operatorname{Im} U = (\operatorname{Ker} U^*)^{\perp}$, et Im U est de codimension finie, puisque $U^* = \underset{\sim}{1}_{F'} - K^*$, et que K^* est compacte.

4° Enfin $\chi(\underset{\sim}{1}_F + \lambda K)$ est une fonction définie pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, et le théorème 4 montre qu'elle est continue et localement constante. Elle est donc constante et

$$\chi(U) = 0 \quad .$$

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> U , K : F $\longrightarrow$ G . <u>Si</u> U <u>est d'indice fini et si</u> K <u>est compact,</u> U + K <u>est d'indice fini et</u> $\chi(U + K) = \chi(U)$.

Si X est un inverse relatif continu de U , on a

$$X.(U + K) = \underset{\sim}{1}_F + XK + (XU - \underset{\sim}{1}_F)$$

et XK et $XU - \underset{\sim}{1}_F$ sont compacts, d'où

$$\chi(U + K) = - \chi(X) = \chi(U) \quad .$$

<u>Application</u> : <u>Alternative de Fredholm</u>. - Si l'on a une équation $f - Kf = g$ (g donnée, f inconnue) dans un espace de Banach, K étant un opérateur compact, l'espace des solutions de l'équation $f - Kf = 0$ est de dimension finie n ; il existe alors n formes linéaires $L_1 , \dots , L_n$ indépendantes telles que les conditions $L_i(g) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, soient nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution f de l'équation $f - Kf = g$.

En particulier, si $f - Kf = 0 \implies f = 0$ (cas d'unicité), l'équation admet toujours une solution. Elle est donnée par $f = (1 - K)^{-1} g = g + Zg$, où

$$Z = (1 - K)^{-1} K$$

est encore un opérateur compact.

Exemple : Opérateurs compacts dans L^2. Opérateurs à noyau. - Soient X un espace topologique localement compact, μ une mesure de Radon positive sur X. On désignera par L^2 l'espace de Hilbert $L^2(X , \mu)$, et par $\underset{\sim}{L}^2$ l'espace

$$L^2(X \times X , \mu \otimes \mu) .$$

Si T est un endomorphisme continu de L^2, on notera $\|T\|$ sa norme

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \|\psi\|=1}} \langle \psi , T\varphi \rangle ,$$

$$\varphi , \psi \in L^2 , \quad \|\varphi\| = \left(\int |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} , \quad \langle \varphi , \psi \rangle = \int_X \varphi(t) \, \overline{\psi}(t) \, d\mu(t) .$$

La norme de $\underset{\sim}{L}^2$ sera notée $|||\cdot|||$.

Soit $K(x , y) \in \underset{\sim}{L}^2$; si φ , ψ sont deux fonctions quelconques de L^2,

$$\varphi(y) \, \psi(x) \in \underset{\sim}{L}^2 \quad \text{et} \quad |||\varphi(y) \, \psi(x)||| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\| .$$

On a alors,

$$\iint |K(x , y)| \, |\psi(x)| \, |\varphi(y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) \leqslant |||K||| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\| < + \infty$$

et le théorème de Fubini permet alors de conclure que l'application $\underset{\sim}{K} : L^2 \longrightarrow L^2$

$$(\underset{\sim}{K}\varphi)(x) = \int K(xy) \, \varphi(y) \, d\mu(y) \qquad (\varphi \in L^2)$$

est continue, et que l'on a

$$\|\underset{\sim}{K}\| \leqslant |||K||| .$$

DÉFINITION 5. - On dit que $\underset{\sim}{K}$ est l'opérateur intégral associé au noyau $K \in \underset{\sim}{L}^2$.

THÉORÈME 6. - L'application $\theta : \underset{\sim}{L}^2 \longrightarrow L(L^2 , L^2)$ définie par $\theta(K) = \underset{\sim}{K}$ est une injection continue dont l'image $\aleph(L^2 , L^2)$ est contenue dans $K(L^2 , L^2)$.

1° θ est continue : cela résulte de l'inégalité $\|\underset{\sim}{K}\| \leqslant |||K|||$.

2° θ est injective : $\|\underset{\sim}{K}\| = 0$ entraîne que K est orthogonal dans $\underset{\sim}{L}^2$ à toute fonction de la forme $\psi(x) \, \varphi(y)$, $\varphi , \psi \in L^2$. Or les fonctions de ce type forment un sous-ensemble total de $\underset{\sim}{L}^2$.

3° Si $K \in \underset{\sim}{L}^2$, $\underset{\sim}{K}$ est compact : En effet K est limite dans $\underset{\sim}{L}^2$ de fonctions en escalier, donc $(\|\underset{\sim}{K}\| \leqslant |||K|||)$ $\underset{\sim}{K}$ est limite, dans $L(L^2 , L^2)$, d'opérateurs de rang fini.

Remarque. - Pour $K \in \underset{\sim}{L}^2$, φ , $\psi \in L^2$, on a

$$\langle\psi , \underset{\sim}{K}\varphi\rangle = \iint K(xy)\ \varphi(y)\ \overline{\psi(x)}\ d\mu(x)\ d\mu(y) \quad .$$

Le théorème de Fubini montre alors que $\underset{\sim}{K}^*$ admet aussi un noyau :

$$(\underset{\sim}{K})^* = {}^t\overline{\underset{\sim}{K}} \quad \text{où} \quad {}^tK(xy) = K(yx) \quad .$$

THÉORÈME 7. - $\aleph(L^2 , L^2)$ <u>est un idéal à gauche dans</u> $L(L^2 , L^2)$. <u>Soit</u> $K \in \underset{\sim}{L}^2$, $T \in L(L^2 , L^2)$. <u>La formule</u> :

$$(\widetilde{T}K)(x , y) = T(K(. , y))(x)$$

définit une application continue $\widetilde{T} : \underset{\sim}{L}^2 \to \underset{\sim}{L}^2$.

En effet, pour presque tout y , $K(. , y) \in L^2$ et si l'on pose

$$k(y) = \|K(. , y)\| \quad ,$$

on a ,

$$k(y) \in L^2 \quad \text{et} \quad \|k\| = \|K\| \quad .$$

Or, T étant continu,

$$\|T(K(. , y))\| \leqslant \|T\| . k(y) \quad ,$$

d'où

$$\widetilde{T}K \in L^2 \quad \text{et} \quad \|\widetilde{T}K\| \leqslant \|T\| . \|K\| \quad .$$

Reste à montrer que $\underset{\sim}{\widetilde{T}K} = T \circ \underset{\sim}{K}$, or l'application continue

$$\alpha : \underset{\sim}{L}^2 \to L(L^2 , L^2)$$

$$K \longmapsto \underset{\sim}{\widetilde{T}K} - T \circ \underset{\sim}{K}$$

vérifie $\alpha(K) = 0$ chaque fois que K est de la forme $\psi(x)\ \varphi(y)$, ψ , $\varphi \in L^2$, puisqu'alors

$$\widetilde{T}K = T(\psi)(x) . \varphi(y)$$

comme l'ensemble des $\varphi(y)\ \psi(x)$ est total dans $\underset{\sim}{L}^2$, la proposition en résulte.

Remarque. - On a plus simplement, en utilisant un résultat sur l'intégration des fonctions vectorielles par rapport à μ (Bourbaki, [2] Intégration, ch. IV, § 4, n° 2, théorème I)

$$T(\int^{L^2} K(. , y)\ \varphi(y)\ d\mu(y)) = \int^{L^2} T(K(. , y))\ \varphi(y)\ d\mu(y)$$

T étant un opérateur continu de L^2 .

COROLLAIRE. - $\mathcal{K}(L^2, L^2)$ <u>est un idéal bilatère</u> : cela résulte du fait que $\mathcal{K}$ est fermé pour la transposition.

<u>Remarque</u>. - Si T est à noyau, $T = \underset{\sim}{S}$, on a

$$\widetilde{T}K(x, y) = \int S(x, z) K(z, y) d\mu(z) .$$

<u>Conséquence</u>. - Si dans l'équation $f - \underset{\sim}{K}f = g$ on est dans le cas d'unicité, on a $f = 1 + Zg$, avec $Z = (1 - K)^{-1} K$, donc Z <u>est associé à un noyau</u>.

<u>Remarque</u>. - On peut se demander s'il existe des opérateurs compacts de L^2 sans noyau. La réponse est affirmative en général. Si par exemple l'espace L^2 envisagé est séparable, soit $(e_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une base hilbertienne. Alors la suite d'opérateurs $(K_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$, définie par

$$K_p \varphi = \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \langle \varphi , e_n \rangle e_n$$

converge dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ vers un opérateur compact K dès que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Cependant il résulte de la théorie de Hilbert et Schmidt que cet opérateur n'est associé à un noyau que si $\sum|\alpha_n|^2 < +\infty$ (voir par exemple RIESZ et NAGY [4], p. 239 et seq.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chap. 1 et 2, 3e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1142 ; Bourbaki, 2).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] DIEUDONNÉ (Jean). - Foundations of modern analysis. - New York, Academic Press, 1960 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 10).

[4] RIESZ (Frédéric) et NAGY (Béla Sz.). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 3e édition. - Budapest, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.

[5] Séminaire de Mathématiques, dirigé par Adrien DOUADY et Paul KRÉE, Année 1965/66. Tome 2 : exposés 11 à 20. - Nice, Université de Nice, Faculté des Sciences, s. d. (multigraphié).