SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

ANDRÉ SOMEN

Emploi des harmoniques sphériques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A3, p. A1-A9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
7e année, 1967/68, n° A.3
16 novembre 1967

EMPLOI DES HARMONIQUES SPHÉRIQUES

par André SOMEN

0. Préambule.

CALDERÓN, dans le § 6 de [3], p. 28-37, propose une nouvelle démonstration du théorème 3 de l'exposé précédent de notre séminaire (COURRÈGE [4], page 3). C'est le théorème 4.4 de ma causerie.

Le lecteur est dès maintenant invité à construire, à l'aide du passage cité de CALDERÓN et des §§ 2.6 et 2.7, pages 36-44 de BOCHNER [1], un exposé personnel en délaissant d'emblée l'esquisse qui suit.

Le mathématicien aura pour loi le retour aux textes sources, plutôt que la quête de commentaires parasites.

1. Notations [Les étoiles renverront aux numéros correspondants du § 5, appendice].

On se place dans $\underset{\sim}{R}^n$ (n entier $\geqslant 2$) muni du produit scalaire $(v, w) \longmapsto (v|w)$ euclidien. L'ouvert complémentaire de l'origine est noté $\underset{\sim}{R}_n^*$

Voici par ordre d'entrée en jeu d'autres notations.

(1) $\mathcal{P}_\delta$ = ensemble des polynômes homogènes de degré $\delta > 0$, à n variables réelles et à coefficients complexes.

(2) $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, le laplacien de $\underset{\sim}{R}^n$.

(3) $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}$ = ensemble des polynômes qui appartiennent à $\mathcal{P}_\delta$ et qui sont des fonctions harmoniques dans $\underset{\sim}{R}^n$.

Pour $n = 3$ et pour chaque δ , ces polynômes sont baptisés par ROBIN ([11], tome I, chapitre III, § 36, page 141) "harmoniques sphériques ordinaires".

Pour n quelconque, MÜLLER ([10], définition 1, page 2) parle d'"harmoniques sphériques [régulières] d'ordre δ en dimension n ".

(4) $\Sigma = \Sigma_n$ = sphère unité de $\underset{\sim}{R}^n$.

(5) $\sigma = \sigma_n$ = la mesure superficielle familière sur Σ_n (prise comme dans l'exposé précédent ([4], page 1) : sa masse totale ne vaut pas 1).

(6) $\mathfrak{L}^2(\Sigma)$ = ensemble des fonctions complexes mesurables et de carré intégrable pour la mesure σ sur Σ .

(7) $g(\delta)$ = dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{P}_\delta$ pour δ entier positif ; et $g(\delta) = 0$ pour $\delta < 0$.

(8) $|v|$ = longueur du vecteur $v \in \underset{\sim}{R}^n$.

(9) $\mathcal{P}_\delta|\Sigma$ = ensemble des restrictions à Σ des polynômes appartenant à $\mathcal{P}_\delta$.

(10) $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}|\Sigma$ est défini avec (3), comme (9) l'est avec (1).

(11) $(Y_{k,\delta})_k$ = une suite finie de polynômes appartenant à $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}$, dont les restrictions à Σ forment une base orthonormale quelconque de $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}|\Sigma$ (qui est un sous-espace hilbertien de dimension finie de $\mathfrak{L}^2(\Sigma)$).

L'abréviation Vp sera lue "valeur principale" (voir COURRÈGE [4], théorème 2, page 3).

La transformée de Fourier $\mathfrak{F}f$ d'une fonction f à n variables vaut au point $p \in \underset{\sim}{R}^n$

(12) $$\mathfrak{F}f(p) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} f(v)\, \exp(-\, i(v|p))\, dv \ .$$

(conformément à la note (10), bas de page 3 de l'exposé précédent [4] ; la convention commune à BOCHNER et à CALDERÓN est différente).

(13) $\sum_{k,\delta}$ désignera la sommation selon les couples $(k\ ,\ \delta)$ d'entiers positifs où δ parcourt tout $\underset{\sim}{N}$, mais $k = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ g(\delta) - g(\delta - 2)$.

Aucune de ces notations ne met en évidence le rôle de la dimension n .

2. Quelques résultats d'algèbre.

2.1*. THÉORÈME.

(i) Avec les notations (1) et (7) du § 1, la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{P}_\delta$ vaut

$$\dim \mathcal{P}_\delta = g(\delta) = \binom{n + \delta - 1}{\delta} \ .$$

(ii) L'application linéaire $\mathcal{P}_\delta \to \mathcal{P}_{\delta-2}$: $P \longmapsto \Delta P$ est surjective (δ entier $\geqslant 2$).

(iii) On a pour δ entier positif

$$\dim \mathcal{P}_{\delta,\Delta} = g(\delta) - g(\delta - 2) \ .$$

On prendra note du fait que dim $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}$ croît moins vite qu'un polynôme en δ quand δ tend vers l'infini.

2.2. Exemples de polynômes harmoniques homogènes.

2.2.1. Cas $\delta = 0$. L'espace $\mathcal{P}_{0,\Delta} = \mathcal{P}_0$ est constitué des constantes : dim $\mathcal{P}_{0,\Delta} = 1$.

2.2.2. Cas $\delta = 1$. L'espace $\mathcal{P}_{1,\Delta} = \mathcal{P}_1$ est constitué des formes linéaires : dim $\mathcal{P}_{1,\Delta} = n$.

2.2.3. Cas $n = 2$, $\delta \geqslant 2$. Ici dim $\mathcal{P}_{\delta,\Delta} = 2$. Identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par $(x , y) \longmapsto z = x + iy$. Les deux fonctions de z : $\mathrm{Re}(z^\delta)$, $\mathrm{Im}(z^\delta)$ forment une base de $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}$.

[La valeur au point $z \in \mathbb{C}$ d'un polynôme harmonique est la moyenne de ses valeurs sur la circonférence de centre z et de rayon 1 . Une étude des polynômes P vérifiant la propriété "discrète" analogue

$$P(z) = \frac{1}{4}(P(z + 1) + P(z - 1) + P(z + i) + P(z - i))$$

est donnée dans SPITZER ([12], chapitre III, § 13, E3, pages 131-133).]

2.2.4*. Cas $n = 3$. Ici dim $\mathcal{P}_{\delta,\Delta} = 2\delta + 1$. Pour $\delta = 2$, en partant de la liste

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 - y^2 - z^2 , & 2y^2 - z^2 - x^2 , & 2z^2 - x^2 - y^2 , \\ xy , & yz , & zx , \end{array}$$

on obtient une base de $\mathcal{P}_{2,\Delta}$ en omettant un des trois polynômes de la première ligne.

2.3. La fonction $v \longmapsto |v|^{2\delta}$ (notation (8) du § 1) fournit un exemple, mis en jeu en 2.4, de polynôme homogène de degré pair 2δ .

2.4*. THÉORÈME. - Chaque polynôme P homogène de degré δ se développe en

$$P(v) = \sum_k |v|^{2k} H_{\delta-2k}(v) \qquad (v \in \mathbb{R}^n) \tag{14}$$

(où $\sum_k$ désigne la sommation selon les entiers k vérifiant $0 \leqslant 2k \leqslant \delta$), avec $H_{\delta-2k} \in \mathcal{P}_{\delta-2k,\Delta}$, de manière unique.

En omettant dans le second membre de (14) les facteurs $|v|^{2k}$, on résoud dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$ le problème intérieur de DIRICHLET pour la donnée frontière $P \in \mathcal{P}_\delta|\Sigma$ (notation (9) du § 1).

3. Quelques résultats d'analyse.

3.0. Ce paragraphe transcrit certains des énoncés de CALDERÓN ([3], § 6, pages 31-35) qui concourent à la démonstration de notre théorème principal 4.4, et qui restent intéressants détachés de ce contexte.

Leurs démonstrations invoquent souvent les formules

$$\int_V (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,d\tau = \int_{\partial V} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) d\sigma \quad ,$$

$$\int_V (f\,\Delta g + (\operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} g))\,d\tau = \int_{\partial V} f\frac{\partial g}{\partial n}\,d\sigma$$

(avec des notations et des hypothèses courantes en géométrie différentielle). On les trouve dans FLANDERS ([7], § 7.1, page 83), et pour $n = 3$ dans BRICARD ([2], chapitre VI, formules (79,1) et (79,3), page 144).

3.1*. THÉORÈME. - Dans l'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, les sous-espaces $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}|\Sigma$ (où δ parcourt $\mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux et leur somme directe est partout dense.

3.2*. Comme $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}|\Sigma$ est un sous-espace hilbertien (de dimension finie) de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ la forme linéaire $P \longmapsto P(s')$ $(s' \in \Sigma)$ sur $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}$ provient du produit scalaire

$$\int_{v'\in\Sigma} P(v')\; Q_{s'}(v')\; d\sigma(v') \quad ,$$

où $Q_{s'} \in \mathcal{P}_{\delta,\Delta}$ ne dépend que de δ et du point s' pris sur Σ .

3.3*. THÉORÈME. - Soient δ entier positif et $(Y_{k,\delta})_k$ une suite de polynômes harmoniques homogènes de degré δ , dont les restrictions à Σ donnent une base orthonormale de $\mathcal{P}_{\delta,\Delta}|\Sigma$ (conformément au théorème 2.1, k varie de 1 à $g(\delta) - g(\delta - 2)$) .

Alors la fonction

$$\sum_k (Y_{k,\delta})^2 = C \qquad \text{(somme finie !)}$$

est constante sur Σ , et ne dépend que de n et δ :

$$C = \frac{g(\delta) - g(\delta - 2)}{\text{masse totale de } \sigma_n} \quad .$$

[Sachant que C est constante, l'intégration sur Σ montre qu'elle est indépendante du choix de la base orthonormale.]

3.4. Cet énoncé évoque les relations

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\delta\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\delta\theta\right)^2 = \frac{1}{\pi} \qquad (\delta \text{ entier positif}) \ !$$

Quand $n = 2$, les formules donnant les coefficients d'une série de Fourier permettent de deviner le développement trigonométrique de $Q_{s'}(\theta)$, où θ parcourt la circonférence unité (voir 3.2 pour la notation $Q_{s'}$).

Dans le même ordre d'idées, les théorèmes 2.4, 3.1, 3.6 prennent eux-aussi un visage familier dans le cadre $n = 2$.

3.5*. THÉORÈME. - Soit $P \in \mathcal{P}_{\delta,\Delta}$, normalisé par $\|P\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} = 1$. Avec

$$|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n ,$$

posons

$$\partial_\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} .$$

On a alors avec une constante ne dépendant que de $|\beta|$ et n

$$|(\partial_\beta P)(v)| \leqslant \text{Cte } |v|^{\delta-|\beta|} \, \delta^{(n/2)+|\beta|-1} \qquad (v \in \mathbb{R}^n) .$$

3.6*. THÉORÈME. - Prenons pour chaque entier positif δ une suite $(Y_{k,\delta})_k$ de polynômes comme dans l'énoncé 3.3. Soit f définie sur Σ et appartenant à $\mathcal{L}^2(\Sigma)$. D'où le développement

(15) $$f \simeq \sum_{k,\delta} b_{k,\delta} \, Y_{k,\delta}$$

de f en série orthogonale. Alors les assertions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe sur Σ une fonction $\mathfrak{f}$ indéfiniment dérivable telle que, presque partout sur Σ, on ait $f = \mathfrak{f}$.

(ii) On a pour tout entier r positif

(16) $$\sum_{k,\delta} \delta^r \, |b_{k,\delta}| < \infty .$$

Enfin, si ceci a lieu, le second membre de (15) converge absolument, et uniformément sur Σ, vers $\mathfrak{f}$.

Si une famille de nombres $b_{k,\delta}$ vérifie la propriété résumée par (16), nous dirons qu'ils sont "à décroissance rapide par rapport à δ".

4. Schéma de la démonstration du théorème principal 4.4.

4.1*. Si la transformation de Fourier est normalisée comme en (12), § 1, on obtient, quand P est un polynôme harmonique homogène de degré δ, la relation

$$\mathfrak{F}(P\exp(-\tfrac{1}{2}|\ |^2)) = i^{\delta}\,(2\pi)^{n/2}\,P\exp(-\tfrac{1}{2}|\ |^2) \qquad (P\in\mathcal{P}_{\delta,\Delta})$$

qui intervient dans la preuve de 4.2.

4.2*. THÉORÈME. - Soit P un polynôme harmonique, homogène de degré δ strictement positif. Alors la fonction

$$(17)\qquad v \longmapsto P(v)\,|v|^{-n-\delta} \qquad (v\in \underset{\sim}{R}_n^*)$$

est positivement homogène de degré $-n$, de moyenne nulle sur Σ (autrement dit, orthogonale dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ aux constantes).

La transformée de Fourier de la valeur principale de la fonction (17) vaut au point $p\in\underset{\sim}{R}_n^*$

$$(18)\qquad \gamma_\delta\,P(p)\,|p|^{-\delta} \quad ,$$

où, quand δ tend vers l'infini, la valeur absolue du coefficient γ_δ (lequel vaut

$$(19)\qquad \gamma_\delta = i^{\delta}\,\pi^{n/2}\,\frac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\frac{n+\delta}{2})} \qquad)$$

reste bornée, et celle de son inverse, $\frac{1}{|\gamma_\delta|}$, croît moins vite qu'un polynôme en δ.

Cette transformée de Fourier (18) est positivement homogène de degré zéro et de moyenne nulle sur Σ.

4.3. Prolongement positivement homogène à $\underset{\sim}{R}_n^*$ des développements 3.6(15) valables sur Σ.

4.3.1. Soit f positivement homogène de degré $-n$, indéfiniment dérivable sur $\underset{\sim}{R}_n^*$ et de moyenne nulle sur Σ. Le développement (15) de 3.6 valable pour $v'\in\Sigma$:

$$(20)\qquad f(v') = \sum_{k,\delta} b_{k,\delta}\,Y_{k,\delta}(v') \qquad (\text{où } b_{1,0} \text{ est nul})$$

fournit un développement

$$f(v) = \sum_{k,\delta} b_{k,\delta} \, Y_{k,\delta}(v) \, |v|^{-n-\delta} \qquad (v \in \underset{\sim}{R}_n^*) \tag{21}$$

absolument convergent, et uniformément convergent sur tout compact excluant l'origine. Les restrictions à chaque sphère centrée à l'origine des termes du second membre de (21) sont de moyenne nulle et deux à deux orthogonales (pour la mesure superficielle de cette sphère).

4.3.2. Résultats analogues pour le degré zéro : remplacer dans le second membre de 4.3.1(21) les facteurs $|v|^{-n-\delta}$ par $|v|^{-\delta}$.

4.4*. THÉORÈME PRINCIPAL. - L'ensemble des valeurs principales des fonctions positivement homogènes de degré $-n$, indéfiniment dérivables sur le complémentaire de l'origine et de moyenne nulle sur Σ est appliqué bijectivement par la transformation de Fourier

$$\mathrm{Vp}\ f \longmapsto \mathfrak{F}(\mathrm{Vp}\ f)$$

(voir COURRÈGE [4], page 2) sur l'ensemble des fonctions positivement homogènes de degré zéro, indéfiniment dérivables dans le complémentaire de l'origine et de moyenne nulle sur Σ .

Pour le voir, il faut d'abord légitimer

$$\mathfrak{F}(\mathrm{Vp} \sum_{k,\delta} \ldots) = \sum_{k,\delta} \mathfrak{F}(\mathrm{Vp} \ldots) \quad ,$$

où les parenthèses des deux membres renferment respectivement la valeur principale du second membre de 4.3.1(21), et celle du terme d'indice (k, δ) de cette série 4.3.1(21). Pour ce faire, il suffit de recourir au théorème 2, page 3, de COURRÈGE [4].

Pour établir la bijectivité souhaitée dans l'énoncé, on remarquera que la transformation $b_{k,\delta} \longmapsto \gamma_\delta \, b_{k,\delta}$ (où γ_δ est le coefficient étudié à la fin du théorème 4.2) est une permutation de l'ensemble des suites à décroissance rapide par rapport à δ (terminologie introduite à la fin de 3.6).

Le théorème 3.6 apparaît comme la clef de cette méthode.

5. Appendice (au sens figuré : qui peut être coupé).

Les numéros suivis de APP. renvoient aux numéros antérieurs suivis d'une étoile.

2.1. APP. : Pour 2.1(i), voir FELLER ([6], exemple (b) du § 5, chapitre II, page 39).

Voir CALDERÓN ([3], pages 28-31 du § 6) : il est loisible de rédiger cette partie dans le style de GLAESER [8].

Pour $n = 3$, une solution explicite de $\Delta X = P$ $(P \in \wp_\delta$, $X \in \wp_{\delta+2})$ est donnée par ROBIN ([11], tome I, chapitre III, § 37, formule (16), page 147).

2.2.4. APP. : D'après KELLOG ([9], chapitre V, § 5, page 140).

2.4. APP. : Preuve dans CALDERÓN ([3], § 6, proposition 3, page 31) ; ou, pour $n = 3$, ROBIN ([11], tome I, chapitre III, § 44, formule (67), page 179).

3.1. APP. : Proposition 3(d) et théorème 2 de CALDERÓN ([3], § 6, page 31). Pour l'orthogonalité, voir ROBIN ([11], tome I, § 43, formule (47), page 168). Pour $n = 3$, le développement en série orthogonale, prévu par 3.1^*, est écrit par ROBIN ([11], tome II, chapitre VI, § 105, formule (204), page 341).

3.2. APP. : CALDERÓN ([3], § 6, page 32) nomme $Q_{s'}$ une "harmonique zonale de pôle s' ".

<u>L'aspect géométrique</u> de la classification des harmoniques sphériques est donné par le § 40, pages 155-158, et le § 42, pages 165-168, de ROBIN([11], tome I) ; pour n quelconque, lire "la bible"([5], tome 2, chapitre XI, §§ 11.1, 11.2, 11.3, pages 232-240).

3.3. APP. : Voir CALDERÓN ([3], § 6, corollaire du théorème 3 et début de la preuve du théorème 4, pages 32-33).

3.5. APP. : CALDERÓN ([3], § 6, théorème 4, page 33).

3.6. APP. : CALDERÓN ([3], § 6, théorème 5, page 35).

4.1. APP. : En théorie analytique des nombres, cette relation est baptisée "formule de Hecke" : Voir BOCHNER ([1], théorème 2.7.3, page 43), (où i^n doit être lu i^r), ou CALDERÓN ([3], § 6, lemme 1, pages 35-36).

4.2. APP. : CALDERÓN ([3], § 6, théorème 6, page 36).

4.4. APP. : CALDERÓN ([3], § 6, théorème 5, page 35).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (Salomon). - Harmonic analysis and the theory of probability [2nd printing]. - Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1960 (California Monographs in mathematical Sciences).

[2] BRICARD (Raoul). - Le calcul vectoriel. 12e édition. - Paris, A. Colin, 1964 (Collection Armand Colin, 112. Section Mathématiques).

[3] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones à ecuaciones diferenciales hiperbólicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, Departamento de Matemática, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).

[4] COURRÈGE (Philippe). - Transformation de Fourier pour les fonctions homogènes de degré $-n$ sur $\underset{\sim}{R}^n$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.2, 15 p.

[5] ERDELYI (A.), MAGNUS (W.), OBERHETTINGER (F.) and TRICOMI (F. G.). - Higher transcendental functions, Vol. 1-3. - New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1953-1955.

[6] FELLER (William). - An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. 3rd edition. - New York, J. Wiley and Sons ; London, Chapman and Hill, 1968.

[7] FLANDERS (Harley). - Differential forms with applications to the physical sciences. - New York, London, Academic Press, 1963 (Mathematics in Science and Engineering, 11).

[8] GLAESER (Georges). - Théorie intrinsèque des polynômes en dualité, Bull. Sc. math., 2e série, t. 85, 1961, 1re partie, p. 17-28.

[9] KELLOGG (Oliver Dimon). - Foundations of potential theory. - Berlin, J. Springer, 1929 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 31) [Nouveau tirage : New York, Ungar].

[10] MÜLLER (Claus). - Spherical harmonics. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 17).

[11] ROBIN (Louis). - Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Vol. 1-3. - Paris, Gauthier-Villars, 1957-1959 (Collection technique et scientifique du C. N. E. T.).

[12] SPITZER (Frank). - Principles of random walk. - Princeton, Toronto, New York [etc.], D. Van Nostrand, 1964 (The University Series in higher Mathematics).