Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Eric Van der Oord

# Opérateurs de Calderón-Zygmund dans $\mathbb{R}^n$. I

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A5, p. A1-A9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A6_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND DANS $\mathbb{R}^n$ . I.

par Eric VAN DER OORD

## 1. Introduction. Rappels et compléments sur les exposés A.2 et A.4.

Dans l'éxposé A.2, on a introduit l'espace vectoriel $G_E^{-p}$ des fonctions définies dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , à valeurs complexes, homogènes de degré $-p$ , dont les restrictions à la sphère unité $\Sigma$ de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à un espace vectoriel $E$ de fonctions sur $\Sigma$ . En fait, on se borne aux cas où $E = \mathcal{L}^2(\Sigma)$ , $E = \mathcal{L}^\infty(\Sigma)$ , $E = C^K(\Sigma)$ ($K \in \mathbb{N}$ ou $K = +\infty$) .

Dans ces cas, $E \subset \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , ce qui permet de poser

$$\overset{\circ}{G}{}_E^{-p} = \{f \in G_E^{-p} \mid \int_\Sigma f \, d\sigma = 0\}$$

où $\sigma$ est, comme d'habitude, la mesure associée à la métrique euclidienne sur $\Sigma$ .

Enfin, pour $h \in G_E^{-p}$ , on pose, pour $0 < \varepsilon \leqslant \eta < +\infty$ , $h_{\varepsilon\eta}(Z) = h(Z)\chi_{[\varepsilon,\eta]}(|Z|)$ , où $\chi_A$ désigne la fonction caractéritique de $A$ .

On a vu que si $k \in \overset{\circ}{G}{}_E^{-n}$ , on peut lui associer une distribution tempérée en valeur principale, par la formule :

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \langle \mathrm{Vph} , \varphi\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to+\infty}} \langle h_{\varepsilon\eta} , \varphi\rangle ,$$

et on a le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soient $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ et $\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi)$ la valeur au point $\xi$ de la transformée de Fourier de $h_{\varepsilon\eta}$ . Alors, il existe une constante $C$ , indépendante de $\varepsilon$ , $\eta$ , $h$ , $\xi$ telle que $|\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi)| \leqslant C\|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ ; $\hat{h}_{\varepsilon\eta}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ vers une fonction $\hat{h} \in \overset{\circ}{G}{}^{0}_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)}$ qui, en tant que distribution tempérée, est égale à la transformée de Fourier de Vph . De plus :

Si $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)}$ , $\hat{h} \in \overset{\circ}{G}{}^{0}_{C(\Sigma)}$ .

Si $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty(\Sigma)}$ , $\hat{h} \in \overset{\circ}{G}{}^{0}_{C^\infty(\Sigma)}$ et $h \longmapsto \hat{h}$ est une bijection de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty(\Sigma)}$ sur $\overset{\circ}{G}{}^{0}_{C^\infty(\Sigma)}$ .

Plus précisément, pour $\xi \neq 0$ , on pose $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$ . Alors, pour $h \in \overset{\circ}{G}{}_E^{-n}$ , on a

$$\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi) = \int_\Sigma F_{\varepsilon,\eta}(\theta , \xi)\, h(\theta)\, d\sigma(\theta) ,$$

$$\hat{h}(\xi) = \hat{h}(\xi') = \int_\Sigma G(\theta , \xi')\, h(\theta)\, d\theta ,$$

où (cf. exposé A.2, pages 4 et 7) :

(a) $G(\theta , \xi')$ est un noyau sur $\Sigma$ qui ne dépend que du produit scalaire $(\theta , \xi')$ , tel que :

(1) $$\int_\Sigma |G(. , \xi')|^2\, d\sigma = \text{Cte} < +\infty .$$

Cela entraîne que $\underset{\sim}{G} : f \longmapsto \int_\Sigma G(\theta , .)\, f(\theta)\, d\sigma(\theta)$ est un opérateur compact de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ , et un opérateur continu de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\Sigma)$ ,

(2) $$\int_\Sigma |G(\theta , \xi'_1) - G(\theta , \xi'_2)|\, d\theta = \varphi(|\xi'_1 - \xi'_2|) \qquad \text{avec } \varphi \in C(\underset{\sim}{R}^+) .$$

Il en résulte que $\underset{\sim}{G}$ est un opérateur continu de $C(\Sigma)$ qui transforme les parties bornées de $C(\Sigma)$ en parties équicontinues, donc $\underset{\sim}{G}$ est encore compact dans $C(\Sigma)$ .

(b) On a $\sup_{\xi,\varepsilon,\eta} \|F_{\varepsilon\eta}(. , \xi)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} < +\infty$ ,

$F_{\varepsilon\eta}(\theta , \xi)$ converge simplement vers $G(\theta , \xi')$ lorsque $\varepsilon \to 0$ , $\eta \to \infty$ ;

$F_{\varepsilon\eta}(. , \xi) - G(. , \xi')$ converge vers $0$ dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ uniformément par rapport à $\xi$ sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ , $\eta \to \infty$ .

En conséquence, $\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi) \xrightarrow[\eta\to\infty]{\varepsilon\to 0} \hat{h}(\xi)$ uniformément sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$ .

(c) L'invariance de $G$ par rotation montre que si $\omega$ est une rotation quelconque de centre $0$ , on a :

(0) $$\underset{\sim}{G}f(\omega\xi') - \underset{\sim}{G}f(\xi') = \int_\Sigma [G(. , \omega\xi') - G(. , \xi')]f(.)\, d\sigma = \int_\Sigma G(\theta , \xi')[f(\omega\theta) - f(\theta)]\, d\sigma(\theta) ,$$

ce qui entraîne que si $f \in C^K(\Sigma)$ , $\underset{\sim}{G}f \in C^K(\Sigma)$ . On peut montrer que pour $K < +\infty$, $\underset{\sim}{G}$ est un opérateur compact de $C^K(\Sigma)$ , donc non inversible, cependant on a montré (exposé A.2, page 11) que $\underset{\sim}{G}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $C^\infty(\Sigma)$ sur $C^\infty(\Sigma)$ . En fait, la formule (0) montre que $\underset{\sim}{G}$ est continu de $C^\infty(\Sigma)$ dans $C^\infty(\Sigma)$ , donc d'après le théorème de Banach, un automorphisme d'espace de Fréchet.

Un dernier résultat concerne la continuité de $\underset{\sim}{G}^{-1}$ . Il résulte de la démonstration du théorème 3 de l'exposé A.2 que $\underset{\sim}{G}^{-1}$ se prolonge en un opérateur continu de $C^n(\Sigma)$ dans $C(\Sigma)$ . (En fait, on ne l'a démontré que pour les fonctions de moyenne nulle sur $\Sigma$ ; mais $G(. , \xi')$ est de moyenne non nulle sur $\Sigma$ , donc $\underset{\sim}{G}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions constantes sur $\Sigma$ , d'où le résultat, qui servira par la suite.)

Dans l'exposé A.4, on a démontré les résultats suivants :

($\alpha$) Si $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{E}^2(\Sigma)}$ , alors, pour tout $f \in \mathcal{E}^2$ la fonction $\underset{\sim}{h}_{\varepsilon\eta} f = h_{\varepsilon\eta} \star f$ converge dans $\mathcal{E}^2$ vers une fonction $\underset{\sim}{h}f$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\eta \to +\infty$ .

($\beta$) Pour $f \in \mathcal{S}$ , on a

$$\underset{\sim}{h}f(X) = (2\pi)^{-n} \int_{\underset{\sim}{R}^n} e^{i(X,\xi)}\, \hat{h}(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \ .$$

($\gamma$) $f \longmapsto \underset{\sim}{h}f$ est un opérateur continu de $\mathcal{E}^2$ dont la norme est

$$\|\hat{h}\|_\infty \leqslant \text{Constante } \|h\|_{\mathcal{E}^2(\Sigma)} \ .$$

La fonction $\hat{h} \in \overset{\circ 0}{G}_{\mathcal{E}^\infty(\Sigma)}$ a été appelée le symbole de l'opérateur $\underset{\sim}{h}$ , dont le noyau est $h$ .

Dans cet exposé, nous allons généraliser ces résultats à une classe plus large de noyaux.

## 2. Noyaux de classe $C_b^\infty$ .

Pour chaque $K$ entier $\geqslant 0$ et $\beta$ réel $\geqslant 0$ , on désignera par $G_\beta^{-K}$ l'ensemble des fonctions $h : \underset{\sim}{R}^n \times (\underset{\sim}{R}^n - \{0\}) \to \underset{\sim}{C}$ telles que :

(i) $\forall\, x \in \underset{\sim}{R}^n$ , $h(x , .) \in G^{-K}_{C^\infty(\Sigma)}$ ;

(ii) Pour chaque indice de dérivation $\alpha \in \underset{\sim}{N}^n$ , la fonction $(x , z) \longmapsto \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} h(x , z)$ est de classe $C_b^\beta$ sur $\underset{\sim}{R}^n \times \Sigma$ (c'est-à-dire de classe $C^{[\beta]}$ avec toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant [\beta]$ bornées et ses dérivées d'ordre $[\beta]$ uniformément höldériennes d'ordre $\beta - [\beta]$ sur $\underset{\sim}{R}^n \times \Sigma_n$ . En d'autres termes, on a :

$$G_\beta^{-K} = \{h(x , Z) \mid (x \longmapsto h(x , .)) \in C_b^\beta[\underset{\sim}{R}^n , G^{-K}_{C^\infty(\Sigma)}]\} .$$

On notera $\overset{\circ}{G}{}^{-K}_{\beta}$ l'ensemble $\{f \in G^{-K}_{\beta} \mid \forall\, \alpha \in \underset{\sim}{R}^n ,\ f(x\ ,\ .) \in \overset{\circ}{G}{}^{-K}_{C^\infty(\Sigma)}\}$ .

Pour $f \in G^{-K}_{\beta}$ , $f_{\varepsilon\eta}(x\ ,\ z) = f(x\ ,\ z)\ \chi_{[\varepsilon,\eta]}(|z|)$ .

Pour $f \in \overset{\circ}{G}{}^{-K}_{\beta}$ , $\hat{f}(X\ ,\ t) = [\widehat{f(X\ ,\ .)}](t)$ .

Notre but est de donner un sens à la formule :

$$\underset{\sim}{h}f(X) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_{\underset{\sim}{R}^n} h_{\varepsilon\eta}(X\ ,\ Z)\ f(X - Z)\ dZ\ , \qquad h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}\ ,\quad f \in \mathcal{L}^2\ .$$

et de montrer

1° que $\underset{\sim}{h}$ est un opérateur de $\mathcal{L}^2$ dans $\mathcal{L}^2$ ;

2° comment les propriétés de $\underset{\sim}{h}$ se rattachent à celles du "symbole" $\hat{h}$ ;

3° enfin que $\underset{\sim}{h}$ est un opérateur "neutre", en ce sens qu'il envoir $H^m \cap C^\alpha$ dans $H^m \cap C^\alpha$ pour $m < \alpha < \beta$ (cette dernière étude sera faite dans l'exposé A.6).

Ces trois propriétés sont conséquence des trois suivantes :

1° Si $f \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ , $x \longmapsto f(x\ ,\ .)$ est une application continue et bornée de $\underset{\sim}{R}^n$ dans $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ ;

2° La $C^\infty$-dérivabilité de $f \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ par rapport à la deuxième variable ;

3° La classe $C^\beta$ de $f \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$ par rapport à la première variable.

## 3. Opérateurs de $\mathcal{L}^2(\underset{\sim}{R}^n)$ associés aux fonctions de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\beta}$

THÉORÈME 1. - Soit $h : \underset{\sim}{R}^n \times (\underset{\sim}{R}^n - \{0\}) \to \underset{\sim}{C}$ une fonction telle que l'application $x \longmapsto h(x\ ,\ .)$ soit continue et bornée de $\underset{\sim}{R}^n$ dans $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ , lorsqu'on munit ce dernier espace de la norme $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ . Alors,

1° pour $f \in \mathcal{L}^2$ , la fonction $\underset{\sim}{h}_{\varepsilon} f(X) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} h_{\varepsilon}(X\ ,\ Z)\ f(X - Z)\ dZ$ appartient à $\mathcal{L}^2$ ;

2° lorsque $\varepsilon \to 0$ , $\eta \to +\infty$, $\underset{\sim}{h}_{\varepsilon} f$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers une fonction $\underset{\sim}{h}f$ , $\underset{\sim}{h}$ est un opérateur continu de $\mathcal{L}^2$ , et il existe une constante $A$ telle que :

$$\|\underset{\sim}{h}\| \leqslant A \sup_{x \in \underset{\sim}{R}^n} \|h(x\ ,\ .)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}\ .$$

Démonstration. - L'existence de $A$ mise à part, les propriétés énoncées sont évidentes si $h$ est de la forme :

$$h(X\ ,\ Z) = \sum_{K=1}^{n} a_K(X)\ \varphi_K(Z)\ ;\qquad \forall\ K\ ,\ \ a_K \in C_b(\underset{\sim}{R}^n)\ ,\ \ \varphi_K \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}\ .$$

L'idée de la démonstration est de passer à une série :

($\alpha$) $h(x\ ,\ .) = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m(x)\ \varphi_m(.)$ ; $a_m \in C_b(\mathbb{R}^n)$ , $\varphi_m \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ , la convergence de la série ayant lieu en un sens à préciser. Opérons d'abord formellement :

($\beta$) $\underset{\sim}{h}_\varepsilon\ f(x) = \sum_m a_m(x)[\varphi_{m,\varepsilon} \star f](x)$ , $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .

($\gamma$) $|\underset{\sim}{h}_\varepsilon\ f(x)|^2 \leqslant (\sum_m |a_m^2(x)|).(\sum_m |\varphi_{m\varepsilon} \star f(x)|^2)$ . Une première condition, (1), sera que l'on ait

(1) $\quad \sum |a_m(x)|^2 \leqslant \text{Cte}\ \|h(x\ ,\ .)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \leqslant \text{Cte}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|h(X\ ,\ .)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} = C^2$ .

($\delta$) Alors : $\|\underset{\sim}{h}_\varepsilon\ f\|_2^2 \leqslant C^2 \sum_m \|\varphi_{m,\varepsilon} \star f\|_2^2 = C^2 \sum_m \|\widehat{\varphi}_{m\varepsilon}.\hat{f}\|_2^2.(2\pi)^{-n}$ .

($\varepsilon$) $\sum_m \|\widehat{\varphi}_{m\varepsilon}\ \hat{f}\|_2^2 = \sum_m \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}_{m\varepsilon}(\xi)|^2\ |\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi = \int \sum_m |\varphi_{m,\varepsilon}(\xi)|^2\ |\hat{f}(\xi)|^2$

$$\leqslant (\sup_\xi \sum_m |\varphi_{m,\varepsilon}|^2).\|f\|_2^2 ,$$

d'où $\|\underset{\sim}{h}_\varepsilon\ f\|_2^2 \leqslant C^2 \|\sum_m |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon}|^2\|_\infty\ \|f\|_2^2$ , puisque $(2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ .

La deuxième condition, (2), sera donc que $\sum_m |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon}|^2$ soit une fonction essentiellement bornée, indépendamment de $\varepsilon$ .

(2) $$\sup_{\xi,\varepsilon,\eta} \|\sum_m |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon,\eta}(\xi)|^2\| < +\infty\ .$$

Remarquons que l'on remplit la condition (1) en prenant pour $\varphi_n$ des fonctions (par exemple $C^\infty$ ) dont les traces sur $\Sigma$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\{f \in \mathcal{L}^2(\Sigma)\ |\ \int f\ d\sigma = 0\}$ . Dans ce cas, ($\alpha$) a le sens d'une convergence dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ pour chaque $x$ . Nous allons montrer que, pour un tel choix des $(\varphi_m)$ , la condition (2) est vérifiée.

Cela provient du lemme suivant :

LEMME. - Soit $H_0 = \{f \in \mathcal{L}^2(\Sigma)\ |\ \int_\Sigma f\ d\sigma = 0\}$ ( $H_0$ peut être considéré comme l'espace des restrictions à $\Sigma$ des fonctions de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ ), $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H_0$ . Alors,

1° $\sum_n |\widehat{\varphi_{n,\varepsilon,\eta}}|^2(\xi)$ est une fonction uniformément bornée sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

2° $\sum_m |\widehat{\varphi}_m|^2(\xi)$ est une fonction **constante**.

On a en effet

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \int_\Sigma G(\xi' , \theta)\, \varphi_n(\theta)\, d\theta , \qquad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|} ,$$

$$\hat{\varphi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi) = \int_\Sigma F_{\varepsilon\eta}(\theta , \xi)\, \varphi_n(\theta)\, d\theta .$$

Soit $p$ la projection orthogonale de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ sur $H_0$ , on a

$$\sum \hat{\varphi}_n(\xi)^2 = \|p(G(\xi' , .))\|^2_{H_0} = \mathrm{Cte} ,$$

$$\sum \hat{\varphi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi) = \|p(F_{\varepsilon\eta}(. , \xi))\|^2_{H_0} \leqslant \mathrm{Cte} .$$

En outre, d'après ce qu'on a vu dans l'introduction (alinéa 6) :

$$\sum |\hat{\varphi}_n(\xi) - \hat{\varphi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi)|^2 = \|p[F_{\varepsilon\eta}(. , \xi) - G(. , \xi')]\|^2_{H_0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\ \eta\to\infty]{} 0$$

uniformément sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$ .

Soit donc $(\varphi_m)_{m\in \underset{\sim}{N}}$ une base hilbertienne de $H_0$ (*). Alors, les conditions (1) et (2) sont vérifiées. L'égalité ($\alpha$) traduit une convergence dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ pour chaque $x$ . Pour étudier ($\beta$), posons pour un instant :

$$(\beta') \quad \tilde{\underset{\sim}{h}}_\varepsilon f(t , x) = \sum_m a_m(t)(\varphi_{m,\varepsilon} \star f)(x) .$$

Comme la convolution est une application continue de $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$ dans $C_b(\underset{\sim}{R}^n)$ (muni de la norme de la convergence uniforme), la série ($\beta'$) converge, pour chaque $t$ , dans $C_b(\underset{\sim}{R}^n)$ . Il résulte de la continuité de $t \longmapsto h(t , .)$ que la convergence est uniforme sur tout compact par rapport à $t$ . Donc ($\beta$) traduit une convergence de fonctions continues et bornées uniforme sur tout compact.

Les lignes ($\gamma$), ($\delta$), ($\varepsilon$), prouvent alors que $\underset{\sim}{h}_\varepsilon f \in \mathcal{L}^2$ , et que les opérateurs $\underset{\sim}{h}_\varepsilon$ forment une famille équicontinue.

Le même raisonnement prouve que la série $\sum_m a_m(X)(\varphi_m f)(X)$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers une fonction $\underset{\sim}{h}f$ , et à nouveau les mêmes majorations donnent

$$\|\underset{\sim}{h}f - \underset{\sim}{h}_\varepsilon f\|^2_2 \leqslant C^2\|f\|^2_2 \,\|\sum_n |\hat{\varphi}_m - \hat{\varphi}_{m\varepsilon}|^2\|_{\infty, A} ,$$

où la dernière expression représente une norme uniforme sur le support $A$ de $\hat{f}$ .

---

(*) $H_0$ étant toujours identifié à $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ .

Le dernier résultat du lemme montre que $\underset{\sim}{h}_\varepsilon f$ converge dans $\mathcal{L}^2$ lorsque $\varepsilon \to 0$, dès que $\hat{f}$ a un support compact ne contenant pas l'origine. Or, l'ensemble de ces fonctions est dense dans $\mathcal{L}^2$, et les $\underset{\sim}{h}_\varepsilon$ forment une famille équicontinue, le théorème est complètement démontré.

COROLLAIRE. - Si, de plus, l'application de $\underset{\sim}{R}^n$ dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, $x \longmapsto h(x\,,\,.)|_\Sigma$ est de classe $C_b^m$, $m \in \underset{\sim}{N}$, alors $\underset{\sim}{h}$ opère continûment de $H^m$ dans $H^m$ et, pour $\forall\, \alpha \in \underset{\sim}{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, il existe des fonctions $h_\alpha^\gamma(X\,,\,Z)$, $\gamma \leqslant \alpha$, telles que :

$$x \longmapsto h_\alpha^\gamma(X\,,\,.)|_\Sigma$$

$$\underset{\sim}{R}^n \to H_0$$

soit de classe $|\gamma|$ et que $D^\alpha(\underset{\sim}{h}f) = \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \underset{\sim}{h}_\alpha^\gamma(D^\gamma f) \quad (|\alpha| \leqslant m)$.

Démonstration. - Prenons $f \in H^m \cap C^m$ dans la ligne $(\beta)$ de la démonstration du théorème 1, on peut dériver chaque terme

$$a_n(X)(\omega_{n\varepsilon} \star f)(X)$$

suivant la formule de Liebnitz, puis poursuivre les calculs en groupant les termes en $D^\gamma f$. On trouve :

$$D^\alpha(\underset{\sim}{h}_\varepsilon f) = \sum_{\gamma\leqslant\alpha} (\underset{\sim}{h}_\varepsilon)_\alpha^\gamma (D^\gamma f)\,, \qquad \forall\, \alpha\,, \quad |\alpha| \leqslant m\,,$$

avec, bien entendu, $h_\alpha^\gamma = \dfrac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial X^{\alpha-\gamma}} h(X\,,\,Z).\dfrac{\alpha!}{\gamma!\,(\alpha-\gamma)!}$. Si ensuite, on fait tendre $\varepsilon \to 0$, les $(\underset{\sim}{h}_\varepsilon)_\alpha^\gamma f$ convergent dans $\mathcal{L}^2$ pour tout $\alpha$, $|\alpha| \leqslant m$, tout $\gamma \leqslant \alpha$, et le théorème résulte du fait que $H^m$ est complet (la limite des dérivées égale au sens des distributions la dérivée des limites).

Remarque. - On n'a fait que justifier une dérivation sous le signe "d'intégration en valeur principale".

DÉFINITION. - On appelle opérateur intégral singulier de type $C_\beta^\infty$ un opérateur linéaire borné de $\mathcal{L}^2$ dans $\mathcal{L}^2$, de la forme $Hf = a.f + \underset{\sim}{h}f$, où $a$ est un opérateur de multiplication par une fonction $a(x) \in C_b^\beta$, et $\underset{\sim}{h}$ l'opérateur associé à une fonction de $\mathring{G}_\beta^{-n}$. On appelle $CZ_\beta^0(\underset{\sim}{R}^n)$ l'espace vectoriel qu'ils forment.

DÉFINITION. - On appelle symbole de l'opérateur intégral singulier de type $C_\beta^\infty H$ la fonction

$$\sigma_H(X\,,\,\xi) = a(X) + \hat{h}(X\,,\,\xi)\,.$$

## 4. Propriétés du symbole.

THÉORÈME 2.

(a) L'application $H_0 \longmapsto \sigma_H$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $CZ^0_\beta$ sur $G^0_\beta$.

(b) Pour tous $H \in CZ^0_\beta$, $f \in \mathcal{S}$, on peut écrire :

$$Hf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\underset{\approx}{R}^n} e^{i(x,\xi)} \sigma_H(x , \xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi .$$

(c) Pour tous $H \in CZ^0_\beta$, $x \in \underset{\approx}{R}^n$, $\xi \in \underset{\approx}{R}^n - \{0\}$, $f \in \mathcal{S}$, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-i\lambda(x,\xi)} H(fe^{i\lambda(.,\xi)})(x) = \sigma_H(x , \xi) f(x) .$$

(d) Il existe une constante $A$ (ne dépendant que de $n$) telle que, pour tout $H \in CZ^0_\beta$ et $f \in \mathcal{L}^2$,

$$\|Hf\|_2 \leqslant A.M_H.\|f\|_2 ,$$

où $M_H = \sup\limits_{\substack{x \in \underset{\approx}{R}^n,\ |Z|=1 \\ |\alpha| \leqslant n}} \left|\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial Z^\alpha} \sigma_H(x , Z)\right|$.

Démonstration.

(a) et (d) : On a vu que $\underset{\approx}{G} : h \longmapsto \hat{h}$ est un isomorphisme de Fréchet de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty(\Sigma)}$ sur $\overset{\circ}{G}{}^{0}_{C^\infty(\Sigma)}$, et que $\underset{\approx}{G}^{-1}$ s'étend en une application continue de $G^0_{C^n(\Sigma)}$ dans $G^{-n}_{C(\Sigma)}$. Ces propriétés s'étendent canoniquement aux espaces :

$$\overset{\circ}{G}{}^{-n}_\beta = C^\beta_b(\underset{\approx}{R}^n , \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^\infty(\Sigma)}) \xrightarrow{\tilde{\underset{\approx}{G}}} \overset{\circ}{G}{}^0_\beta = C^\beta_b(\underset{\approx}{R}^n , \overset{\circ}{G}{}^0_{C^\infty(\Sigma)}) ,$$

$$CZ^0_\beta \simeq C^\beta_b(\underset{\approx}{R}^n , G^{-n}_{C^\infty(\Sigma)}) \xrightarrow{\text{passage au symbole}} \{\text{symboles}\} = C^\beta_b(\underset{\approx}{R}^n , G^0_{C^\infty(\Sigma)}) .$$

En effet, $G^K_\beta = \overset{\circ}{G}{}^K_\beta \oplus C^\beta(\underset{\approx}{R}^n)$, d'après la formule

$$f(X , Z) = a(X) + h(X , Z) , \qquad a(X) = \int_\Sigma f(X , .)\, d\sigma \in C^\beta(\underset{\approx}{R}^n) , \qquad h \in \overset{\circ}{G}{}^K_\beta .$$

Pour (b) et (c), on peut supposer $a(x) \equiv 0$ ; alors (b) n'est que l'écriture de $\hat{h}$ comme transformée de Fourier au sens des distributions, et (c) résulte du calcul suivant :

$$\psi(x , \xi) = e^{-i\lambda\langle x,\xi\rangle} H(fe^{i\lambda(.,\xi)})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u-\lambda\xi,x)} \sigma_H(x , u) \hat{f}(u - \lambda\xi) du ,$$

en posant $u - \lambda\xi = t$ ,

$$\psi(x , \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} \sigma_H(x , t + \lambda\xi) \hat{f}(t) dt ,$$

or, $\sigma_H(x , .)$ étant homogène de degré $0$ et $C^\infty$ ,

$$\sigma_H(x , t + \lambda\xi) = \sigma(x , \xi) + \frac{1}{\lambda} \varphi(x , t) ,$$

où $\varphi$ est une fonction à croissance lente en $t$ , ce qui achève la démonstration.