Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Eric Van der Oord

**Opérateurs de Calderón-Zygmund dans $\mathbb{R}^n$. II**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A6, p. A1-A4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° A.6 
21 décembre 1967

# OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND DANS $\underset{\sim}{R}^n$ , II.

par Eric VAN DER OORD

Dans cet exposé, on va étudier brièvement le comportement des opérateurs de classe $C_\beta^\infty$ sur les fonctions höldériennes.

Voici d'abord un résultat sur les opérateurs de convolution.

THÉORÈME 1. - Soient $h \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^1(\Sigma)}$ , et $\underset{\sim}{h}$ l'opérateur de convolution qui lui est associé. Alors, pour $\alpha \in \underset{\sim}{R}^+ - \underset{\sim}{N}$ , $\alpha = p + \lambda$ , $p \in \underset{\sim}{N}$ , $0 < \lambda < 1$ , $\underset{\sim}{h}$ applique continûment $H^p \cap C_b^\alpha$ dans $H^p \cap C_b^\alpha$ .

Démonstration.

1° Supposons d'abord $p = 0$ , et remarquons que si $f \in \mathcal{E}^2 \cap C_b^\lambda$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |Z| \leqslant R} h(Z)\ f(X - Z)\ dZ = \int_{|Z| \leqslant R} h(Z)[f(X - Z) - f(X)]\ dZ ,$$

car $\int_Z h(Z')\ d\sigma = 0$ et l'intégrale du second membre est, pour $R$ fixé, uniformément absolument convergente, d'après la majoration :

$$\int_{r \leqslant |Z| \leqslant r'} |h(Z)[h(X - Z) - f(X)]|\ dz \leqslant \text{Cte}\ \|h\|_{C(\Sigma)}\ [f]_\lambda \int_r^{r'} \frac{dZ}{Z^{1-\lambda}}$$

$$= \text{Cte}\ \|h\|_{C(\Sigma)}\ [f]_\lambda \frac{r'^\lambda - r^\lambda}{\lambda} .$$

2° Toujours dans le cas où $p = 0$ , soient $x_1 , x_2 \in \underset{\sim}{R}^n$ , $d = |x_1 - x_2|$ . Nous voulons majorer l'expression

$$\underset{\sim}{h}f(X_2) - \underset{\sim}{h}f(X_1) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \eta \to +\infty}} \int_{\varepsilon \leqslant |Z| \leqslant \eta} h(Z)[f(X_2 - Z) - f(X_1 - Z)]\ dZ .$$

Comme $h$ est dans $\mathcal{E}^2$ à l'infini, on voit qu'on peut supposer $f$ à support compact (*). Dans la suite, $R$ sera un nombre positif assez grand pour que $f = 0$ hors de $B(x_1 , R) \cap B(X_2 , R)$ .

---

(*) Bien entendu, la majoration que l'on va trouver ne dépendra pas du support de $f$ !

Alors, on peut écrire

$$\underset{\sim}{h}f(X_2) = \int_{B_{2d}(X_1)} h(X_2 - z)[f(Z) - f(X_2)]\,dz + \int_{B_R(X_2)-B_{2d}(X_1)} h(X_2 - Z)[f(Z) - f(X_2)]\,dz$$

$$\underset{\sim}{h}f(X_1) = \int_{B_{2d}(X_1)} h(X_1 - Z)[f(Z) - f(X_1)]\,dz + \int_{B_R(X_1)-B_{2d}(X_1)} h(X_1 - Z)[f(Z) - f(X_2)]\,dz$$

où l'on s'est servi du fait que $\int_\Sigma h\,d\sigma = 0$ .

$|\underset{\sim}{h}f(X_2) - \underset{\sim}{h}f(X_1)| = I_1 + I_2 + I_3$ , avec

$$I_1 = \int_{B_{2d}(X_1)} |h(X_2 - Z)[f(Z) - f(X_2)]|\,dz \leqslant \text{Cte}\ \|h\|_{C(\Sigma)}[f]_\lambda . \frac{d^\lambda . 3^\lambda}{\lambda} ,$$

puisque $B_{2d}(X_1) \subset B_{3d}(X_2)$ .

$$I_2 = \int_{B_{2d}(X_1)} |h(X_1 - Z)[f(Z) - f(X_1)]|\,dz \leqslant \text{Cte}\ \|h\|_{C(\Sigma)}[f]_\lambda . \frac{d^\lambda . 2^\lambda}{\lambda} .$$

$$I_3 = \int_{B_R(X_1)\cap B_R(X_2)-B_{2d}(X_1)} |h(X_2 - Z) - h(X_1 - Z)|\cdot|f(Z) - f(X_1)|\,dz$$

$$\leqslant \text{Cte}\ \|h\|_{C^1(\Sigma)}\ [f]_\lambda . d . \int_{|Z|\geqslant d} \frac{dZ}{|Z|^{n+1-\lambda}} = \text{Cte}\ \|h\|_{C^1(\Sigma)}\ [f]_\lambda \frac{d^\lambda}{1-\lambda} ,$$

où l'on a utilisé une formule des accroissements finis et l'homogénéité de $h$ pour la première parenthèse, et la continuité höldérienne uniforme de $f$ pour la seconde.

En résumé, il existe une constante $C$ , ne dépendant que de $n$ , telle que

$$|\underset{\sim}{h}f(X_2) - \underset{\sim}{h}f(X_1)| \leqslant C[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}]\ \|h\|_{C^1(\Sigma)}\ [f]_\lambda\ |x_2 - x_1|^\lambda ,$$

ce qui montre que $\underset{\sim}{h}$ applique $\mathcal{E}^2 \cap C_b^\lambda$ dans $\mathcal{E}^2 \cap C^\lambda$ , avec

$$[\underset{\sim}{h}f]_\lambda \leqslant C[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}]\ \|h\|_{C^1(\Sigma)}\ [f]_\lambda .$$

3° Passons maintenant au cas $p > 0$ . On sait que, pour $f \in H^m$ , $\underset{\sim}{h}f \in H^m$ ( $m$ entier $\geqslant 0$ ) et que l'on a l'égalité de distributions :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X^\alpha}(\underset{\sim}{h}f) = \underset{\sim}{h}(\frac{\partial^{(\alpha)} f}{\partial X^\alpha}) \qquad \forall\ \alpha \in \underset{\sim}{N}^n ,\quad |\alpha| \leqslant m .$$

On obtient donc le résultat par une application répétée du lemme suivant :

LEMME 1. - Si $f$ et $g \in C(\underset{\sim}{R})$ et si $f' = g$ au sens des distributions, alors $f \in C^1(\underset{\sim}{R})$ et $f' = g$ au sens usuel.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\underset{\sim}{h}f \in C_b^\alpha$ et que $\underset{\sim}{h}$ est continu pour la norme $\|\cdot\|_{H^m} + \|\cdot\|_\alpha$ sur $H^m \cap C_b^\alpha$. Cela vient du lemme suivant :

LEMME 2 - Soit $f \in \mathcal{L}^2$ telle que $[f]_\lambda < +\infty$, alors $\|f\|_\infty^{1+\frac{n}{2\lambda}} \leqslant \text{Cte } \|f\|_2 \, [f]_\lambda^{\frac{n}{2\lambda}}$. L'inégalité reste vraie pour $\lambda = 1$, en remplaçant $[f]_\lambda$ par

$$|f|_1 = \sup_{x \in \underset{\sim}{R}^n} |\overrightarrow{\text{grad}}\, f(X)| .$$

En effet, si $|f(X)| > 0$, on a, $|f(X+u)| \geqslant |f(X)| - |u|^\lambda [f]_\lambda \geqslant \frac{1}{2}|f(X)|$ dès que $|u| \leqslant (\frac{f(X)}{2[f]_\lambda})^{1/\lambda}$, ce qui donne

$$\|f\|_2 \geqslant \text{Cte } |f(X)| \, (\frac{|f(X)|}{2[f]_\lambda})^{\frac{n}{2\lambda}} ,$$

d'où

$$|f(X)|^{1+\frac{n}{2\lambda}} \leqslant \text{Cte } \|f\|_2 \, [f]_\lambda^{\frac{n}{2\lambda}} ,$$

donc :

$$\|f\|_\infty \leqslant \text{Cte } \|f\|_2^{\frac{2\lambda}{n+2\lambda}} \, [f]_\lambda^{\frac{n}{n+2\lambda}} ,$$

et d'après une inégalité de Hölder

$$\|f\|_\infty \leqslant \text{Cte}(\|f\|_2 + [f]_\lambda) ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 1. - L'application bilinéaire :

$$\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{C^1(\Sigma)} \times H^p \cap C_b^\alpha \to H^p \cap C_b^\alpha , \qquad \alpha = p + \lambda , \quad 0 < \lambda < 1 , \quad p \in \underset{\sim}{N} ,$$

$$(h , f) \longmapsto \underset{\sim}{h}f$$

est continue lorsqu'on munit $H^p \cap C_b^\alpha$ de la norme $\|\cdot\|_{H^p} + \|\cdot\|_\alpha$.

En effet, cela résulte des majorations :

$$\|\underset{\sim}{h}f\|_2 \leqslant \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \cdot \|f\|_2 \to \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \leqslant \text{Cte } \|h\|_{C^1(\Sigma)} \quad [\underset{\sim}{h}f]_\lambda \leqslant \text{Cte } \|h\|_{C^1(\Sigma)} \, [f]_\lambda$$

et des lemmes 1 et 2.

Passons maintenant au résultat principal de cet exposé.

PROPOSITION 1. - Soit $H \in CZ_0^\beta$, $\beta = [\beta] + \mu$, $0 \leqslant \mu < 1$.
Si $\mu = 0$, $H$ applique continûment $H^{[\beta]}$ dans $H^{[\beta]}$.
Si $\mu > 0$, $H$ applique continûment $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$ dans $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$

Les résultats pour $\mu = 0$ ont été déjà établis dans l'exposé précédent. De plus, on sait que, pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant [\beta]$, il existe des $H_\alpha^\gamma \in CZ_0^{\beta-|\alpha|}$, $|\gamma| \leqslant |\alpha|$, tels que, pour tout $f \in H^{[\beta]}$, on ait $D^\alpha(Hf) = \sum_\gamma H_\alpha^\gamma(D^\gamma f)$ au sens des distributions.

Le lemme 1 permet donc de ramener le cas $\mu > 0$, $[\beta]$ quelconque, au cas $\mu > 0$, $[\beta] = 0$.

Ensuite, le lemme 2 montre qu'il suffit de prouver que, pour chaque $H \in CZ_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, il existe une constante $A_H$ telle que

$$[Hf]_\mu \leqslant A_H [f]_\mu , \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}^2 \cap C^\mu .$$

Soit $\underset{\sim}{H}f(X) = a(X)\, f(X) + (\underset{\sim}{h}f)(X)$, $h \in \overset{\circ}{G}{}_\mu^{-n}$, $a \in C^\mu$. On voit qu'on peut supposer $a = 0$.

Considérons alors la fonction de deux variables

$$\tilde{\underset{\sim}{h}}f(t , x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|Z| \geqslant \varepsilon} h(t , Z)\, f(x - Z)\, dZ = (\underset{\sim}{h}(t , .)\, f)(x) .$$

Le théorème 1 montre que $\tilde{\underset{\sim}{h}}f$ est de classe $C_b^\mu$ en $x$. Or

$$\overset{\circ}{G}{}_\beta^{-n} = C_b^\beta(\underset{\sim}{R}^n , \overset{\circ}{G}{}_{C^\infty(\Sigma)}^{-n}) \subset C_b^\beta(\underset{\sim}{R}^n , \overset{\circ}{G}{}_{C^1(\Sigma)}^{-n}) .$$

Le corollaire 1 montre alors que $\tilde{\underset{\sim}{h}}f$ est aussi de classe $C_b^\mu$ en $t$. De plus, $[\tilde{\underset{\sim}{h}}f(t , .)]_\mu$ est une fonction bornée de $t$, et $[\tilde{\underset{\sim}{h}}f(. , x)]_\mu$ est une fonction bornée de $x$. La proposition résulte du fait que

$$\underset{\sim}{h}f(X) = \tilde{\underset{\sim}{h}}f(X , X) .$$

COROLLAIRE 2. - Si $H \in CZ_\infty^0$, $H$ applique continûment $\bigcap_{p \in \underset{\sim}{N}} H^p$ dans lui-même. En particulier, $H$ applique $\mathcal{S}$ dans $C^\infty$.

BIBLIOGRAPHIE


[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[2] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Facultad de Ciencias exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).

[3] HÖRMANDER (Lars). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.