GÉRARD DETOURBET

Algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans le cas $\beta > 1$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A7, p. A1-A12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
7e année, 1967/68, n° A.7

ALGÈBRE D'OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS DANS LE CAS $\beta > 1$

par Gérard DETOURBET

Dans cet exposé, nous établirons un théorème important, bien que négatif, que l'on peut résumer de la façon suivante :

CZ_β^0 $(\beta \geqslant 1)$ n'est pas une algèbre pour la composition des opérateurs.

Ce résultat, ne satisfaisant pas, justifiera le plongement naturel (après les théorèmes 2 et 3) de CZ_β^0 dans une algèbre d'opérateurs $CZ_{1,\beta}$, somme directe algébrique de CZ_β^0 et de $\mathcal{L}(L^2, H^1)$.

§ 1. Index des notations

Σ_n : sphère unité dans R^n munie de la mesure superficielle euclidienne σ ;

$G^s(R^n) = G^s$: ensemble des fonctions localement sommables dans $R^n - \{0\}$ et positivement homogènes de degré s ;

G_E^s : ensemble des fonctions de G^s dont les restrictions à Σ_n appartiennent à l'espace vectoriel E ;

$\mathring{G}_E^s$: ensemble des fonctions f de G_E^s telles que $\int_{\Sigma_n} f\, d\sigma = 0$;

G_β^k : ensemble des fonctions f de $R^n \times (R^n - \{0\})$ dans $\underset{\sim}{C}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

- $\forall\, x \in R^n$, $h(x\,,\,.) \in G^k_{C^\infty(\Sigma_n)}$,

- $\forall\, \alpha \in \underset{\sim}{N}^n$, $(x\,,\,z) \longrightarrow \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} f(x\,,\,z)$ est höldérienne de classe β et bornée de $R^n \times \Sigma_n$ dans $C^{[\beta]}(R^n \times \Sigma)$;

$\mathring{G}_\beta^k$: ensemble des fonctions $f \in G_\beta^k$ telles que, $\forall\, x \in R^n$,

$$\int_{\Sigma_n} f(x\,,\,z)\, d\sigma = 0 \quad ;$$

CZ_β^0 : ensemble des opérateurs linéaires continus de L^2 dans L^2 de la forme $Hf = af + \underset{\sim}{h}f$, où $a \in C^\beta$ et $h \in \mathring{G}_\beta^{-n}$;

$\| \ \|_\beta$: <u>1er cas pour</u> $a \in C^\beta$: c'est alors la borne supérieure des maximums des dérivées d'ordre $|\alpha| \leqslant [\beta]$ et des constantes d'Hölder ;

<u>2e cas pour</u> $K \in CZ^0_\beta$: c'est alors

$$\sup_{\substack{x\in R^n \\ |z|=1 \\ |\alpha|\leqslant n}} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \sigma_H(x , z)\right| \quad ;$$

$|||f|||$: la norme de f dans H^1 ;

$Y_{\ell,m}$: l'harmonique sphérique normalisée ($\int_\Sigma |Y_{\ell,m}|^2 \, d\sigma = 1$) de degré d'homogénéité m ;

$R_{\ell,m}$: l'opérateur associé à l'harmonique $Y_{\ell,m}$,

$$R_{\ell,m} \, f.x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} |x - y|^{-n} \, Y_{\ell,m}(x - y) \, f(y) \, dy \quad ;$$

$\tilde{Y}_{\ell,m}$: la fonction de $\underset{\sim}{R}^n - \{0\}$ associée à l'harmonique sphérique $Y_{\ell,m}$ par la formule

$$\tilde{Y}_{\ell,m}(z) = |z|^{-n} \, Y_{\ell,m}(z) \quad .$$

§ 2. Rappels

(2.1) Si $k \in G^{-n}$, alors : $V_p \, k$ existe presque-partout $\Longleftrightarrow$ $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}$ (voir [3], théorème 2).

(2.2) Si $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{L^2(\Sigma)}$, alors : $\|k_\varepsilon \, f\|_2 \leqslant A\|f\|_2 \, \|k\|_{L^2(\Sigma)}$ (voir [6], théorème 1).

(2.3) Si $k \in CZ^0_\beta$, alors : $\|Kf\|_2 \leqslant A\|K\|_\beta \, \|f\|_2$ (voir [6], théorème 2).

(2.4) $\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(|x|^m \, \tilde{Y}_{\ell,m}(x)\right)\right| \leqslant C|x|^{m-|\alpha|} \, m^{n/2+|\alpha|-1}$, $\forall \, \alpha \in \underset{\sim}{N}^n$ (voir [1], théorème 4, p. 33).

(2.5) Si $K \in CZ^0_\beta$ $(\beta \geqslant 0)$, et si $a_{\ell,m}(x)$ est le coefficient de $\tilde{Y}_{\ell,m}(z)$ dans le développement du noyau de K en harmoniques sphériques, alors la série $a + \sum a_{\ell,m} \, R_{\ell,m}$ converge vers K pour la norme de $\mathcal{L}(L^2_k , L^2_k)$ $(k \leqslant [\beta])$ (voir appendice, et [1], théorème 3, p. 70).

(2.6) Nous pouvons, de plus, ajouter à (2.5) que

$$\|a_{\ell,m}\|_\beta \leqslant Cm^{-(3n/2)}\|K\|_\beta \qquad \text{et} \qquad \|b_{\ell,m}\|_\beta \leqslant Cm^{-2n}\|K\|_\beta \quad ,$$

où $b_{\ell,m}$ est le coefficient de $Y_{\ell,m}(z)$ dans le développement en série d'harmoniques sphériques de σ_K (voir appendice, et [1], théorème 3, p. 70).

(2.7) Rappelons enfin que le nombre d'harmoniques sphériques de degré d'homogénéité m est inférieur à Am^{n-2}, où A est une constante.

§ 3. Etude préliminaire

Notations. - Dans ce paragraphe, aucune confusion n'étant à craindre, nous noterons $\widetilde{Y}$ pour $\widetilde{Y}_{\ell,m}$, et R pour $R_{\ell,m}$.

THÉORÈME 1. - Si $a \in C^\beta$ $(\beta > 1)$, l'opérateur $(aR - Ra)$ opère continuement de L^2 dans H^1, et nous avons

$$|||(aR - Ra)f||| \leqslant C\|a\|_\beta \, m^{n/2}\|f\|_2 \quad ,$$

où C est une constante ne dépendant que de n et β.

Preuve. - L'espace $\mathcal{D}$ étant partout dense dans $\mathcal{L}^2$, il suffit de démontrer ce théorème dans le cas $f = \varphi \in \mathcal{D}$.

Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}$. Nous avons, par définition de R,

$$(3.0) \qquad (aR - Ra)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} \widetilde{Y}(x-y)\{a(x) - a(y)\}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)\,dy \quad ;$$

β étant supérieur à 1, nous pouvons écrire

$$(3.1) \qquad a(x) - a(y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\frac{\partial a}{\partial x_i}(x) + b(x, y) \quad ,$$

avec $b(x, y)$ vérifiant

$$(3.2) \qquad |b(x, y)| \leqslant n\|a\|_\beta\,|x-y|^\alpha \qquad \begin{cases}\alpha = \beta, & \text{si } \beta < 2,\\ \alpha = 2, & \text{si } \beta \geqslant 2.\end{cases} \qquad (^1)$$

---

(1) Cette majoration du reste s'obtient en l'écrivant sous forme intégrale. Démontrons cette formule. Posons $\gamma = 1$ si $\beta \geqslant 2$, et $\gamma = \beta - 1$ si $\beta < 2$. Nous avons

$$a(y) - a(x) = \sum_1^n \int_0^{y_i - x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i}(x + te_i)\,dt$$

$$\Longrightarrow a(y) - a(x) - \sum_1^n (y_i - x_i)\frac{\partial a}{\partial x_i}(x) = b(x, y) = \sum_1^n \int_0^{y_i-x_i}\left\{\frac{\partial a}{\partial x_i}(x+te_i) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)\right\}dt$$

donc

$$|b(x, y)| \leqslant \sum_1^n \|a\|_\beta \int_0^{y_i-x_i}|x-y|^\gamma\,dt \leqslant n\|a\|_\beta\,|x-y|^{\gamma+1} \quad .$$

C. Q. F. D.

(i) Transformation de l'expression (3.0) : Intégrons par parties l'intégrale de (3.0), nous obtenons

$$(3.3)\qquad \int_S \tilde{Y}(x-y)\{a(x)-a(y)\}\,\varphi(y)\cos\theta_i\,d\sigma$$

$$-\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i}\{\tilde{Y}(x-y)(\sum_1^n (x_j-y_j)\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)+b(x,y))\}\,\varphi(y)\,dy\quad ,$$

où S désigne la sphère de centre x et de rayon ε , σ la mesure superficielle euclidienne, et θ_i l'angle de la normale extérieure à S avec Ox_i . Transformons (3.3) en l'écrivant sous la forme

$$(3.4.1)\qquad \int_S \tilde{Y}(x-y)\{a(x)-a(y)\}\,\varphi(y)\cos\theta_i\,d\sigma$$

$$(3.4.2)\qquad +\int_{|x-y|>1}\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y)\{a(x)-a(y)\}\,\varphi(y)\,dy$$

$$+\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1}\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y)\,b(x,y)\,f(y)\,dy$$

$$(3.4.3)\qquad +\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1}\{\sum_j (x_j-y_j)\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y)\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)\}\,\varphi(y)\,dy$$

$$+\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}\tilde{Y}(x-y)\frac{\partial a}{\partial x_i}(y)\,\varphi(y)\,dy\ .$$

(ii) Le fait que φ soit un élément de $\mathcal{D}$ implique que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in\mathcal{L}^2$, donc (3.0) définit une fonction de $\mathcal{L}^2$. Par ce fait, toutes les fonctions de x définies par les intégrales de (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3), existent presque-partout. Ceci appliqué à la première intégrale de (3.4.3) prouve, en accord avec (2.1), que

$$\int_{\Sigma_n}(x_j-y_j)\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y)\,d\sigma=0\quad .$$

(iii) En appliquant (2.2) et (2.4), nous majorons la norme dans $\mathcal{L}^2$ des fonctions définies dans (3.4.3) (les intégrales considérées comme fonctions de x) par

$$Cm^{n/2}\|\varphi\|_2\,\|a\|_\beta\quad .$$

(iv) En utilisant (2.4) et (3.2), nous majorons les intégrales de (3.4.2) respectivement par

$$C\|a\|_\beta\, m^{n/2}\int_{|x-y|>1}|x-y|^{-n-1}\,|\varphi(y)|\,dy\quad ,$$

$$C\|a\|_\beta\, m^{n/2}\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1}|x-y|^{-n-1+\alpha}\,|\varphi(y)|\,dy\quad .$$

Le théorème de Young ($\|u \star v\|_2 \leqslant \|u\|_1 \; \|v\|_2$) assure alors l'appartenance à $\mathcal{L}^2$ de ces deux fonctions de x , et donne une majoration par

$$C\|a\|_\beta \; m^{n/2}\|\varphi\|_2 \quad ,$$

C dépendant alors de β .

(v) Nous avons $|a(x) - a(y)| \leqslant n|x - y| \; \|a\|_\beta$, donc (3.4.1) est majorée par

$$Cm^{(n-2)/2}\|a\|_\beta \int_S \varepsilon^{-n+1}|\varphi(y)| \; dy \quad .$$

φ étant continue, cette intégrale converge uniformément vers

$$Cm^{(n-2)/2}\|a\|_\beta \; |\varphi(x)| = |\ell(x)| \quad .$$

Donc $\ell(x) \in \mathcal{L}^2$, et nous avons

$$\|\ell\|_2 \leqslant Cm^{n/2}\|a\|_\beta \; \|\varphi\|_2 \quad .$$

(vi) En regroupant les résultats de (iii), (iv), et (v), nous obtenons

$$\|(aR - Ra) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\|_2 \leqslant Cm^{n/2}\|a\|_\beta \; \|\varphi\|_2 \quad , \tag{3.5}$$

où C est une constante dépendant de β et de n .

(vii)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle aR \; , \; \varphi\rangle = \langle(\frac{\partial a}{\partial x_i})R \; , \; \varphi\rangle + \langle aR \; , \; \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle Ra \; , \; \varphi\rangle = \langle R \frac{\partial a}{\partial x_i} \; , \; \varphi\rangle + \langle Ra \; , \; \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \quad ,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{(aR - Ra)\varphi\} = (\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i})\varphi + (aR - Ra) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad ,$$

donc

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i}\{(aR - Ra)\varphi\}\|_2 \leqslant \|(aR - Ra) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\|_2 + \|(\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i})\varphi\|_2 \quad ,$$

par application de (3.5) et (2.2), nous obtenons facilement

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} \{(aR - Ra)\varphi\}\|_2 \leqslant Cm^{n/2}\|a\|_\beta \; \|\varphi\|_2 \quad ,$$

$$|||(aR - Ra)\varphi||| \leqslant Cm^{n/2}\|a\|_\beta \; \|\varphi\|_2 \quad .$$

C. Q. F. D.

§ 4. Définition et propriétés du pseudo-produit de deux opérateurs intégraux singuliers de classe C^∞_β

Soient K_1 et $K_2 \in CZ^0_\beta$, et $\sigma(K_1)$ et $\sigma(K_2)$ les symboles associés. Le théorème 2 de [6] établit entre autre que $\sigma : H \to \sigma(H)$ est une isomorphie de CZ^0_β dans G^0_β, donc nous pouvons associer à $\sigma(K_1)\,\sigma(K_2) \in G^0_\beta$ un élément de CZ^0_β - noté $K_1 \circ K_2$ et appelé pseudo-produit de K_1 et K_2 - tel que

$$\sigma(K_1 \circ K_2) = \sigma(K_1)\,\sigma(K_2) \ .$$

THÉORÈME 2. - *Si K_1 et K_2 sont dans CZ^0_β, alors l'opérateur $K_1 K_2 - K_1 \circ K_2$ applique continuement L^2 dans H^1.*

Preuve. - Avec les notations utilisées jusqu'ici, nous pouvons écrire

$$K_1 = \sum_{m\geqslant 0} a^1_{\ell,m} R_{\ell,m} \qquad \text{et} \qquad K_2 = \sum_{\mu\geqslant 0} a^2_{\lambda,\mu} R_{\lambda,\mu} \ ,$$

en prenant la notation $a_{0,0} = a$ et $R_{0,0} = I$ (opérateur identité). Alors

$$K_1 K_2 = \sum a^1_{\ell,m} R_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} R_{\lambda,\mu}$$

et

$$K_1 \circ K_2 = \sum a^1_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} R_{\ell,m} R_{\lambda,\mu} \quad (^2) \ ,$$

ceci donnant

$$(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) = \sum a^1_{\ell,m}(R_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} - a^2_{\lambda,\mu} R_{\ell,m}) R_{\lambda,\mu} \ .$$

Soit donc $f \in L^2$,

$$|||(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2)f||| \leqslant \sum ||| a^1_{\ell,m}(R_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} - a^2_{\lambda,\mu} R_{\ell,m}) R_{\lambda,\mu} f||| \ ,$$

$$|||(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2)f||| \leqslant \sum \|a^1_{\ell,m}\|_\beta \, |||(R_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} - a^2_{\lambda,\mu} R_{\ell,m}) R_{\lambda,\mu} f||| \ ,$$

---

[2] En effet,

$$\sigma_{K_1} = \sum \gamma_m a^1_{\ell,m} Y_{\ell,m} \ , \quad \sigma_{K_2} = \sum \gamma_\mu a^2_{\lambda,\mu} Y_{\ell,\mu} \ , \quad \gamma_m = C\Gamma(\tfrac{m}{2})\,\Gamma(\tfrac{n+m}{2})^{-1} \ ,$$

donc

$$\sigma_{K_1} \sigma_{K_2} = \sum \gamma_m \gamma_\mu a^1_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} Y_{\ell,m} Y_{\lambda,\mu} \ ,$$

donc

$$K_1 \circ K_2 = \sum a^1_{\ell,m} a^2_{\lambda,\mu} R_{\ell,m} R_{\lambda,\mu} \ .$$

appliquons le résultat du théorème 1,

$$|||(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2)f||| \leqslant \sum C\|a^1_{\ell,m}\|_\beta \ (m+1)^{n/2}\|a^2_{\lambda,\mu}\|_\beta \ \|f\|_2 \ .$$

Les majorations (2.7) donnent alors :

$$|||(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2)f||| \leqslant \Big(\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ \mu\geqslant 0}} (m+1)^{-2} (\mu+1)^{-(n/2)-2}\Big) C\|K_1\|_\beta \ \|K_2\|_\beta \ \|f\|_2 \ .$$

La série entre parenthèses étant convergente, nous avons le résultat final suivant:

$$|||(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2)f||| \leqslant C\|K_1\|_\beta \ \|K_2\|_\beta \ \|f\|_2 \ .$$

C. Q. F. D.

Il est important de savoir si le produit de composition de deux opérateurs de Calderón-Zygmund est un opérateur de Calderón-Zygmund, car dans ce cas CZ^0_β serait une algèbre. Le théorème 3 que nous allons maintenant établir prouve malheureusement qu'il n'en est rien.

THÉORÈME 3. - Si H est un opérateur intégral singulier de type C^∞_β qui applique L^2 dans H^1, il est identiquement nul.

Preuve. - Appelons Σ le sous-ensemble des éléments de G^0_β pour lesquels l'opérateur associé applique continuement L^2 dans H^1.

Notons par u les rotations autour du point $x_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Si $h \in G^0_\beta$, notons $h_u(x , z) = h(u(x) , u(z + x_0) - x_0)$, alors nous avons, en notant K_u l'élément de CZ^0_β tel que $\sigma_{K_u} = h_u$, $K_u f_u = (Kf)_u$, ceci impliquant, grâce à la conservation de la norme par rotation, que $h_u \in \Sigma$ si $h \in \Sigma$.

(i) Démontrons que Σ est un idéal de G^0_β. Soient donc $\sigma \in \Sigma$ et $h \in G^0_\beta$ qui ont pour opérateurs associés respectifs Λ et H. Nous avons

$$\begin{aligned}|||\Lambda \circ Hf||| &\leqslant |||(\Lambda H - \Lambda \circ H)f||| + |||\Lambda Hf|||\\ &\leqslant C\|f\|_2 + C'\|Hf\|_2 \leqslant C''\|f\|_2 \ ,\end{aligned}$$

donc $\sigma_{\Lambda\circ H} \in \Sigma$, mais $\sigma_{\Lambda\circ H} = \sigma h$, d'où le résultat.

(ii) Pour que l'opérateur H soit nul, il faut et il suffit que son symbole soit nul. Nous allons donc raisonner par l'absurde, et supposer que le symbole h de H n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que $h(x_0 , z) \not\equiv 0$.

(iii) Démonstration de la contradiction : Puisque $h(x_0 , z) \not\equiv 0$, il existe un nombre fini de rotations u_i $(i = 1 , \dots , n)$ telles que la fonction

$$G(x , z) = \sum_1^n |h_{u_i}(x , z)|^2$$

vérifie $G(x_0 , z) \neq 0$ pour tout z .

Considérons alors $a(x) \in C^\beta$ telle que $a(x_0) \neq 0$ et $a(x) = 0$ si $g(x , z) = 0$, puis définissons la fonction $G_1(x , z)$ par

$$G_1(x , z) = \begin{cases} 0 , & \text{si } a(x) = 0 , \\ a(x)\ G(x , z)^{-1} , & \text{si } a(x) \neq 0 . \end{cases}$$

Par construction, nous avons $G \in \Sigma$ et $G_1 \in G^0_\beta$, donc, puisque Σ est un idéal de G^0_β , $GG_1 \in \Sigma$. Comme $GG_1 = a(x)$, nous pouvons écrire que, pour tout $f \in L^2$,

$$|||\, a(x) f \,||| \leqslant A \|f\|_2 ,$$

puisque l'opérateur associé à $a(x)$ se réduit à la multiplication par $a(x)$. Cette inégalité implique que $a(x) \equiv 0$ et que $h(x_0 , z) = 0$ pour tout z , ce qui est la contradiction cherchée.

§ 5. Etude de l'algèbre $CZ_{1,\beta}$

Les théorèmes 2 et 3 précédemment établis montrent que le produit de composition de deux éléments de CZ^0_β n'est pas un élément de CZ^0_β , mais est la somme d'un élément de CZ^0_β (le pseudo-produit) et d'un opérateur 1-régularisant. Cette remarque faite, la classe $CZ_{1,\beta}$ des opérateurs S de la forme $H + K$ avec

$$\begin{cases} H \in CZ^0_\beta \quad (\beta > 1 \text{ fixé}) , \\ K \quad \text{1-régularisant} , \end{cases}$$

s'introduit tout naturellement. Etudions ses propriétés algébriques, et pour cela établissons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.

(a) $CZ_{1,\beta}$ <u>est une sous-algèbre de</u> $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$.

(b) <u>Pour tout</u> S <u>de</u> $CZ_{1,\beta}$, <u>la décomposition</u> $S = H + K$, <u>avec</u> $H \in CZ_\beta$ $(\beta > 1)$ <u>et</u> K <u>1-régularisant, est unique</u> ($CZ_{1,\beta} = CZ^0_\beta \oplus \mathcal{L}(L^2 , H^1)$).

(c) <u>L'application</u> $S \to \sigma_H$ <u>est un homomorphisme d'algèbres (de</u> $CZ_{1,\beta}$ <u>sur</u> G_β^0) <u>dont le noyau algébrique est</u> $\mathcal{L}(L^2 , H^1)$.

<u>Preuve.</u>

(i) $CZ_{1,\beta}$ <u>est une algèbre</u> : Soient deux éléments S_1 et S_2 de $CZ_{1,\beta}$. Ils s'écrivent

$$\begin{aligned} S_1 &= H_1 + K_1 , \\ S_2 &= H_2 + K_2 , \end{aligned} \qquad \text{avec } H_1 , H_2 \in CZ_\beta^0 \quad \text{et} \quad K_1 , K_2 \in \mathcal{L}(L^2 , H^1) ,$$

donc

$$S_1 S_2 = (H_1 + K_1)(H_2 + K_2) = H_1 H_2 + H_1 K_2 + K_1 H_2 + K_1 K_2 \ ;$$

de façon évidente, les trois opérateurs $H_1 K_2$, $K_1 H_2$, $K_1 K_2$ sont dans $\mathcal{L}(L^2 , H^1)$; d'autre part, $H_1 H_2 = H_1 \circ H_2 + U$, d'après le théorème 3, avec $H_1 \circ H_2 \in CZ_\beta^0$ et $U \in \mathcal{L}(L^2 H^1)$. D'où le fait que $CZ_{1,\beta}$ est une algèbre.

(ii) <u>Décomposition unique</u> : Soient $S \in CZ_{1,\beta}$, et deux décompositions (H_1 , K_1) , (H_2 , K_2) de S . Nous avons alors $H_1 - H_2 = K_2 - K_1$. Mais $H_1 - H_2 \in CZ_\beta^0$, donc $K_2 - K_1 \in CZ_\beta^0 \cap \mathcal{L}(L^2 , H^1)$, le théorème 3 affirme alors que $K_2 - K_1 = 0$. Ceci signifie que les deux décompositions sont identiques.

Nous pouvons donc écrire $CZ_{1,\beta} = CZ_\beta^0 \oplus \mathcal{L}(L^2 , H^1)$.

(iii) $S \to \sigma_H$, <u>homomorphisme</u> : Soit $S \in CZ_{1,\beta}$, alors $S = H + K$. σ_H est défini et appartient à G_β^0 . Définissons θ : $CZ_{1,\beta} \to G_\beta^0$ par $S \to \theta(S) = \sigma_H$. Alors

$$\theta(SS') = \theta(H \circ H' + V) , \qquad \text{avec } V \in \mathcal{L}(L^2 , H^1) ,$$

mais

$$\theta(SS') = \sigma_{H \circ H'} = \sigma_H \sigma_{H'} = \theta_S \theta_S .$$

Donc θ est un homomorphisme d'algèbres.

(iv) $\mathcal{L}(L^2 , H^1)$, <u>noyau de</u> θ : Ceci se déduit de la définition de θ .

Cherchons le centre de $CZ_{1,\beta}$, et énonçons le théorème :

THÉORÈME 5. - <u>Le centre de</u> $CZ_{1,\beta}$ <u>est l'ensemble des multiples de l'opérateur identité.</u>

Preuve. - Soit K un élément central de $CZ_{1,\beta}$. Il commute en particulier avec les éléments $a \in C^{\beta}$. Donc

$$Ka.f = aKf \ , \qquad \forall \ f \in L^2 \ .$$

Supposons f positive, continue et appartenant à L^2 . Définissons la fonction

$$\psi(x) = \{f(x)\}^{-1} \ K.f(x) \ .$$

Si $g(x)$ est de la forme $a(x) \ f(x)$ avec $a \in C_{\beta}$, nous avons

$$K.g(x) = a(x)K.f(x) = a(x) \ f(x) \ \psi(x) = g(x) \ \psi(x) \ .$$

Maintenant, les fonctions de la forme $a(x) \ f(x)$ sont denses dans L^2 , donc nous avons la relation générale

(5.1) $$Kg = g\psi \ , \qquad \forall \ g \in L^2 \ ,$$

et

(5.2) $$\|\psi\|_{\infty} = \|K\| < \infty$$

(venant du fait que K est continu).

Soit x_0 un point de R^n . Définissons une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ par

$$\begin{cases} f_n(x) \ \text{ est constante sur la sphère de centre } x_0 \text{ et de rayon } \frac{1}{n} \ , \\ f_n(x) \ \text{ a pour support cette sphère} \ , \\ \int_{R^n} f_n \, dx = 1 \ . \end{cases}$$

Soit $H \in CZ_{\beta}^{0}$ défini par le noyau h . Nous avons, d'après la commutativité, $HKf_n = KHf_n$, soit

(5.3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} h(x-y) \ f_n(y) \ \psi(y) \ dy = \psi(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} h(x-y) \ f_n(y) \ dy \ .$$

Quand $n \to \infty$, le second membre de (5.3) tend vers $\psi(x) \ h(x - x_0)$, si x_0 a été choisi comme étant un point pour lequel la dérivée de l'intégrale de ψ est ψ . Nous avons, de plus, le premier membre de (5.3) qui tend vers $h(x - x_0) \ \psi(x_0)$, quand $n \to \infty$. Tout ceci se résume alors par

$$\psi(x) \ h(x - x_0) = \psi(x_0) \ h(x - x_0) \quad \text{presque-partout} \ .$$

Choisissons maintenant h de façon qu'elle ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, nous pouvons affirmer que $\psi(x_0) = \psi(x)$ presque-partout, ou encore, en transformant (5.1), que $K.g = \psi(x_0)g$ presque-partout et pour tout g de L^2, ce qui est équivalent à : K est un multiple de l'opérateur identité de $\mathfrak{L}^2$ dans $\mathfrak{L}^2$.

C. Q. F. D.

Appendice

Rappelons que, si $P(x)$ est polynôme harmonique de degré $m > 0$, alors

(app.1) $\mathfrak{F}(\mathrm{VP}\ P(x)\ |x|^{-n-m}) = \gamma_m\ P(x)\ |x|^{-m}$, où $\gamma_m = C\Gamma(\frac{m}{2})\ \Gamma(\frac{m+n}{2})$

(C, constante dépendant de la définition prise pour la transformée de Fourier).

Rappelons aussi que, si L est l'opérateur défini par $Lf = |x|^2\ \Delta f$ (conservant le degré d'homogénéité), nous avons

(app.2) $\tilde{Y}_{k,m}(x) = (-m)^{-r}\ (m+n-2)^{-r}\ L^r\ \tilde{Y}_{k,m}$, $\forall\ r \geqslant 0$.

Rappelons enfin que, si $f \in L^2(\Sigma_n)$, alors nous pouvons écrire

(app.3) $f(x) = \sum a_{k,m}\ Y_{k,m}(x)$, avec $a_{k,m} = \int_{\Sigma_n} f(\theta)\ Y_{k,m}(\theta)\ d\sigma$,

la convergence ayant lieu dans $L^2(\Sigma_n)$, et que, d'autre part, si f est $2r$-fois dérivable, alors $a_{k,m}$ s'écrit

(app.4) $a_{k,m} = (-m)^{-r}\ (m+n-2)^{-r} \int_{\Sigma_n} Y_{k,m}\ L^r\ f\ d\sigma$.

(Pour les démonstrations de ces propriétés, voir [5].)

Considérons la fonction $\sigma_K(x\ ,\ z)$, symbole de $K \in CZ^0_\beta$ $(\beta \geqslant 0)$. Appliquons (app.4) à σ_K, et transformons à l'aide de Cauchy-Schwarz. On obtient

(app.5) $\|b_{\ell,m}\|_\beta \leqslant Cm^{-2n}\|K\|_\beta$ (se reporter à la définition de $\|K\|_\beta$).

D'autre part, compte tenu de la majoration $|Y_{\ell,m}| \leqslant Cm^{(n-2)/2}$ et de (2.7), nous pouvons affirmer que la série

$$\sum b_{\ell,m}\ Y_{\ell,m}(z) \quad \text{converge normalement vers } \sigma(x\ ,\ z)\ .$$

Prenons φ, une fonction à décroissance rapide. Nous pouvons écrire, d'après PLANCHEREL,

$$K\bar{\varphi} = \int \sigma_K(x\ ,\ z)\ \bar{\hat{\varphi}}(z)\ dz = \int\{\sum b_{\ell,m}(x)\ Y_{\ell,m}(z)\}\ \bar{\hat{\varphi}}(z)\ dz\ ,$$

appliquant la convergence normale,

$$K\overline{\varphi} = \sum b_{\ell,m}(x) \int Y_{\ell,m}(z)\ \hat{\overline{\varphi}}(z)\ dz \quad ,$$

appliquant (app.1),

$$K\overline{\varphi} = \sum b_{\ell,m}(x)\ \gamma_m^{-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|>\varepsilon} |z|^{-n}\ Y_{\ell,m}(z)\ \overline{\varphi}(z)\ dz \quad .$$

Comme $\sum \gamma_m^{-1}\ b_{\ell,m}(x)\ Y_{\ell,m}(z)$ converge normalement ($\gamma_m^{-1} < Cm^{n/2}$), nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|>\varepsilon} \{a(x) + k(x\ ,\ z)\}\ \overline{\varphi}(z)\ dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|>\varepsilon} \{\gamma_m^{-1}\ b_{\ell,m}(x)\ Y_{\ell,m}(z)\ |z|^{-n}\}\ \overline{\varphi}(z)\ dz ,$$

ceci étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, nous avons

$$a_{\ell,m} = \gamma_m^{-1}\ b_{\ell,m} \quad ,$$

ce qui donne, d'après (app.5),

$$\|a_{\ell,m}\|_\beta \leqslant Cm^{-(3/2)n} \|K\|_\beta \quad . \tag{app.6}$$

A partir de (app.5) et de (app.6), il est facile d'établir (2.5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).

[2] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[3] COURRÈGE (Philippe). - Transformation de Fourier pour les fonctions homogènes de degré $-n$ sur R^n , Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.2, 15 p.

[4] MÜLLER (Claus). - Spherical harmonics. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 17).

[5] SOMEN (André). - Emploi des harmoniques sphériques, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.3, 9 p.

[6] VAN DER OORD (Eric). - Opérateurs de Calderón-Zygmund dans R^n , I, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.5, 9 p.