Gérard Detourbet

Algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans le cas $\beta \geq 0$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 1 (1967-1968), exp. nº A8, p. A1-A7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
7e année, 1967/68, n° A.8

ALGÈBRE D'OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS DANS LE CAS $\beta \geqslant 0$

par Gérard DETOURBET

Dans l'exposé précédent, nous avions introduit, dans le cas $\beta > 1$, les algèbres $CZ_{1,\beta}$. Notre but ici est de trouver, pour le cas général $\beta \geqslant 0$, un plongement de CZ_β^0 dans une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$.

Dans le cas $\beta > 1$, il a été démontré que l'opérateur

$$K : f \to (H_1 H_2 - H_1 \circ H_2)f \qquad (\text{pour } f \in L^2 \text{ et } H_1 , H_2 \in CZ_\beta^0)$$

envoyait continuement L^2 dans H^1 . Le théorème de Rellich ([1] et [2]) affirme alors que l'opérateur ψK est compact pour tout élément ψ de L^∞ à support compact. On s'appliquera, dans cet exposé, à étendre cette propriété au cas général $\beta \geqslant 0$. Le plan suivi sera essentiellement le même que celui suivi par CALDERÓN et ZYGMUND dans le cas particulier $\beta > 1$.

(Il ne sera question ici que d'espaces euclidiens de dimension supérieure ou égale à 2 .)

Notations

C_b^β : $\{f \in C^\beta ; \ \|f\|_\infty < \infty\}$;

C_b^0 : ensemble des fonctions uniformément continues et bornées ;

L_c^∞ : $\{f \in L^\infty ; \ \text{supp } f = \text{compact}\}$;

$\underset{\sim}{h}$: opérateur intégral défini par le noyau h ;

$\underset{\sim}{h}_\varepsilon$: opérateur intégral défini par le noyau $h\varphi_\varepsilon$, où φ_ε est la fonction caractéristique de $[\varepsilon , \infty[$ (ainsi $h\varphi_\varepsilon(x) = h(x)\, \varphi_\varepsilon(|x|)$).

§ 1. Une propriété de l'ensemble C_b^β $(\beta \geqslant 0)$

THÉORÈME 1. - Pour tout u dans C_b^0 , ou $u \in C_b^\beta$ pour $\beta \geqslant 1$, il existe une suite de fonctions de C_b^γ $(0 < \gamma < 1)$ qui converge uniformément vers u .

Démonstration.

1re étape : Si $\theta \in C_b^\beta$ et si $(\operatorname{supp}\theta)$ est compact, alors, pour tout u de L^∞, on a $u \star \theta$ dans C_b^β.

(i)

$$|u \star \theta(x)| = |\int_{R^n} u(z)\ \theta(x-z)\ dz| \leqslant \|u\|_\infty\ \|\theta\|_1 \quad ,$$

donc

$$\|u \star \theta\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty\ \|\theta\|_1 \quad ;$$

(ii)

$$|u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| = |\int_{R^n} u(z)\{\theta(x-z) - \theta(y-z)\}\ dz$$

$$\leqslant \int_{(x+\operatorname{supp}\theta)\cup(y+\operatorname{supp}\theta)} |u(z)|\ |\theta(x-z) - \theta(y-z)|\ dz \quad .$$

Ecrivons maintenant que θ est de classe C^β, ce qui donne

$$|u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| \leqslant \|\theta\|_\beta\ |x-y|^\beta\ \|u\|_\infty \int_{(x+\operatorname{supp}\theta)\cup(y+\operatorname{supp}\theta)} dz \quad ,$$

soit, en notant $[\operatorname{supp}\theta]$ la mesure du support de θ,

$$|u \star \theta(x) - u \star \theta(y)| \leqslant 2\|\theta\|_\beta\ |x-y|^\beta\ \|u\|_\infty\ [\operatorname{supp}\theta] \quad .$$

C. Q. F. D.

2e étape : Convergence uniforme de $u \star \theta_\varepsilon$ vers u, quand ε tend vers zéro.

Notons par $\theta_\varepsilon(x)$ la fonction $\varepsilon^{-n}|\theta(\frac{x}{\varepsilon})|\ \|\theta\|_1^{-1}$ (ainsi choisie parce que d'intégrale égale à 1). Alors le support de θ_ε a un diamètre égal à ε fois le diamètre ω de $\operatorname{supp}\theta$,

(1.1) $$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \int |u(z) - u(x)|\ \theta_\varepsilon(x-z)\ dz \quad .$$

(a) $u \in C_b^0$: Ecrivons que u est uniformément continue :

$$\forall\ \alpha\ ,\quad \exists\ \beta\ ,\qquad |x-y| \leqslant \beta \implies |u(x) - u(z)| \leqslant \alpha \quad .$$

Choisissons ε tel que $\varepsilon\omega < \beta$; alors (1.1) devient

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \alpha \int_{x+\operatorname{supp}\theta_\varepsilon} \theta_\varepsilon(x-z)\ dz = \alpha \quad ,$$

soit

(1.2) $$\|u \star \theta_\varepsilon - u\|_\infty \leqslant \alpha \quad .$$

(b) $u \in C_b^\beta$ pour $\beta \geqslant 1$: Alors, pour tout $(x , y) \in R^n \times R^n$, nous avons

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|u\|_\beta \ |x - y| \quad ,$$

appliquons à (1.1),

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \|u\|_\beta \int_{x+\text{supp } \theta_\varepsilon} |x - z| \ \theta_\varepsilon(x - z) \ dz \quad ;$$

mais si $z \in x + \text{supp } \theta_\varepsilon$, alors $|z - x| \leqslant \varepsilon\omega$, donc nous avons

$$|u \star \theta_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant \|u\|_\beta \ \varepsilon\omega \int_{R^n} \theta_\varepsilon(x - z) \ dz = \|u\|_\beta \ \varepsilon\omega \quad ,$$

soit

$$\|u \star \theta_\varepsilon - u\|_\infty \leqslant \varepsilon\omega \|u\|_\beta \quad . \tag{1.3}$$

(c) Approximation par des fonctions de classe C_b^γ avec $0 < \gamma < 1$: Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de l'ordre de grandeur de γ . Fixons donc $0 < \gamma < 1$, et prenons θ à support compact et $\theta \in C_b^\gamma$, alors la première étape assure que $u \star \theta_\varepsilon \in C_b^\gamma$ si $u \in C_b^0$ ou si $u \in C_b^\beta$ pour $\beta \geqslant 1$, puisque la seule condition pour cela est $\|u\|_\infty < \infty$. Les lignes (1.2) et (1.3) affirment à leur tour la convergence uniforme, donc le théorème est entièrement démontré.

§ 2. Propriétés du pseudo-produit de deux opérateurs de Calderón-Zygmund

THÉORÈME 2. - *Soit* $R \in CZ_\beta^0$ $(\beta \geqslant 0)$ *et* $a \in C_b^\beta$. *Alors l'opérateur*

$$f \longrightarrow \psi(aR - Ra).f$$

est compact de L^2 *dans lui-même pour tout* $\psi \in L_c^\infty$.

Démonstration.

1° Cas $\beta = 0$ ou $\beta \geqslant 1$: Posons $R^a f = (aR - Ra)f$. Pour tout $\psi \in L_c^\infty$, nous avons

$$\|\psi R^a f\|_2 \leqslant 2\|\psi\|_\infty \ \|a\|_\infty \ \|R\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \ \|f\|_2 \quad . \tag{2.1}$$

Cette relation montre que ψR est approchable dans $\mathcal{L}(L^2 , L^2)$ par des opérateurs ψR^b où $b \in C_b^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$, puisque, pour $\beta = 0$ ou $\beta \geqslant 1$, le théorème 1 affirme l'approximation en norme uniforme de a par de telles fonctions b . Si nous appliquons le théorème suivant :

Toute limite (dans $\mathcal{L}(L^2\ ,\ L^2)$) d'opérateurs compacts est un opérateur compact ; nous pourrons facilement affirmer que ψR^a est compact pour tout $a \in C_b^\beta$ $(\beta \geqslant 0)$.

Nous nous plaçons donc maintenant dans le cas $a \in C_b^\beta$ $(0 < \beta < 1)$.

2° Il existe C (fonction de H , ψ , a) telle que $\|\psi R^a f - \psi R_\varepsilon^a f\|_2 \leqslant C\varepsilon^\beta \|f\|_2$:

Posons

$$N_r(x\ ,\ y) = \begin{cases} \psi(x)\ h(x\ ,\ x-y)\{a(x) - a(y)\}\ , & \text{si}\ \ |x-y| \leqslant r\ , \\ 0\ , \quad \text{si}\ \ |x-y| > r\ ; \end{cases}$$

$$N^r(x - y) = \begin{cases} \psi(x)\ h(x\ ,\ x-y)\{a(x) - a(y)\}\ , & \text{si}\ \ |x-y| \geqslant r\ , \\ 0\ , \quad \text{si}\ \ |x-y| < r\ . \end{cases}$$

Nous avons la majoration

$$(2.2) \qquad \begin{cases} N^r(x\ ,\ y) \leqslant |\psi(x)|\ |x-y|^{\beta-n}\ C\ , \\ N_r(x\ ,\ y) \leqslant |\psi(x)|\ |x-y|^{\beta-n}\ C\ , \end{cases}$$

et aussi, du fait que $\psi \in L_c^\infty$,

$$(2.3) \qquad \begin{cases} N^r(x\ ,\ y) \leqslant C\|\psi\|_\infty\ |x-y|^{\beta-n}\ , \\ N_r(x\ ,\ y) \leqslant C\|\psi\|_\infty\ |x-y|^{\beta-n}\ . \end{cases}$$

Nous avons

$$(2.4) \qquad \psi R_\varepsilon^a\ f = \int_{\varepsilon<|x-y|<1} N^r(x\ ,\ y)\ f(y)\ dy + \int_{|x-y|\geqslant 1} N^r(x\ ,\ y)\ f(y)\ dy\ .$$

Par application de (2.3) et du fait que $\beta < 1$, nous voyons que la deuxième intégrale de (2.4) existe (appliquer Cauchy-Schwarz). $N^0(x\ ,\ y)\ f(y) \in L^1(B)$, où B est la boule unité de R^n , d'après (2.3). Donc, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1>|x-y|\geqslant\varepsilon} N^\varepsilon(x\ ,\ y)\ f(y)\ dy = \int_{|x-y|<1} N^0(x\ ,\ y)\ f(y)\ dy\ ,$$

ce qui s'écrit aussi $\psi R_\varepsilon^a\ f \to \psi R^a\ f$ quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part,

$$|\psi R^a\ f(x) - \psi R_\varepsilon^a\ f(x)| \leqslant \int |N_\varepsilon(x\ ,\ y)|\ |f(y)|\ dy\ ,$$

utilisons (2.3),

$$|\psi R^a\ f(x) - \psi R_\varepsilon^a\ f(x)| \leqslant C\|\psi\|_\infty \int_{|x-y|<\varepsilon} |x-y|^{\beta-n}\ |f(y)|\ dy\ .$$

Appliquons le théorème de Young :

(2.5) $$\|\psi R^a f - \psi R^a_\varepsilon f\|_2 \leqslant C\|\psi\|_\infty \varepsilon^\beta \|f\|_2 \ .$$

Cette inégalité prouve donc deux choses :

- $\psi R^a_\varepsilon f \in L^2$, $\forall \varepsilon \geqslant 0$;
- Les opérateurs ψR^a_ε convergent vers ψR^a dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$.

3° ψR^a_ε <u>est compact de</u> $\mathcal{E}^2$ <u>dans</u> $\mathcal{E}^2$: De (2.5), on déduit qu'il suffit de démontrer que ψR^a_ε est compact pour que ψR^a le soit, en vertu d'un théorème déjà cité.

Pour démontrer que ψR^a_ε est compact, nous allons démontrer que son noyau $N^\varepsilon(x, y)$ est de carré sommable.

$$\iint |N^\varepsilon(x, y)|^2 \, dx\, dy \leqslant C \int |\psi(x)|^2 \, dx \int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{2(\beta-n)} \, dy \quad (^1) ,$$

ceci en vertu des inégalités (2.2). Mais $\int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{2(\beta-n)} \, dy$ existe indépendamment de x , puisque $2(\beta - n) < -n$. Donc ψR^a_ε est compact. Le théorème 2 est donc complètement démontré.

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> K_1 <u>et</u> K_2 <u>sont dans</u> CZ^0_β $(\beta \geqslant 0)$, <u>alors l'opérateur</u>

$$f \longrightarrow \psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2).f$$

<u>de</u> $\mathcal{E}^2$ <u>dans</u> $\mathcal{E}^2$ <u>est compact pour tout</u> $\psi \in L^\infty_c$.

<u>Démonstration.</u>

1° Nous avions démontré, dans l'exposé n° A.7, que

(2.6) $$K_1 \circ K_2 - K_1 K_2 = \sum a^1_{\ell,m}(R_{\ell,m} \, a^2_{\lambda,\mu} - a^2_{\lambda,\mu} \, R_{\ell,m}) \, R_{\lambda,\mu}$$

(pour les notations, se reporter à l'exposé n° A.7 du séminaire Choquet), et que la convergence avait lieu en norme d'opérateurs.

2° Multiplions (2.6) par $\psi \in L^\infty_c$,

$$\psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2) = \sum a_{\ell,m}\{\psi(R_{\ell,m} \, b_{\lambda,\mu} - b_{\lambda,\mu} \, R_{\ell,m})\} \, R_{\lambda,\mu} \quad ;$$

mais $\psi(R_{\ell,m} \, b_{\lambda,\mu} - b_{\lambda,\mu} \, R_{\ell,m})$ est compact, donc chaque élément de la somme est compact (composition d'un opérateur continu avec un opérateur compact). La convergence ayant lieu dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$, l'opérateur $\psi(K_1 \circ K_2 - K_1 K_2)$ est compact.

C. Q. F. D.

---

(1) On remarquera que c'est seulement en cet endroit de la démonstration qu'on utilise que le support de ψ est compact.

§ 3. Définition et propriétés de l'algèbre d'opérateurs $\mathcal{K}^{loc}$

DÉFINITION. - Appelons $\mathcal{K}^{loc}$, l'ensemble des opérateurs continus de L^2 dans L^2 tels que leur produit avec un élément de L_c^∞ soit compact.

THÉORÈME 4. - $\mathcal{K}^{loc}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(L^2, L^2)$.

Démonstration.

1° C'est trivialement un idéal à droite.

2° Démontrons que c'est un idéal à gauche : Soient donc $H \in CZ_\beta^0$ et $K \in \mathcal{K}^{loc}$.

Nous devons démontrer que ψHK est compact dès que ψ est dans L_c^∞. Prenons $\varphi \in L^\infty$, alors nous avons $\psi HK = \psi H\varphi K + \psi H(1 - \varphi)K$.

Puisque $K \in \mathcal{K}^{loc}$, on a φK est compact, et $\psi H\varphi K$ est compact.

Prenons φ telle que $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage V de $\operatorname{supp} \psi$. Dans ce cas, $d(\complement V, \operatorname{supp} \psi) = \varepsilon > 0$ (d, distance euclidienne de $\underset{\approx}{R}^n$).

Le noyau de l'opérateur $\psi H(1 - \varphi)$ est égal à

$$N(x, y) = \psi(x)\, h(x, x - y)(1 - \varphi(y)) ,$$

démontrons qu'il est de carré sommable.

$$\iint |N(x, y)|^2\, dx\, dy = \int |\psi(x)|^2\, dx \int |h(x, x - y)|^2\, |1 - \varphi(y)|^2\, dy ,$$

mais

$$|h(x, x - y)| < C|x - y|^{-n} ,$$

donc nous avons une majoration par

$$C \int |\psi(x)|^2\, dx \int |x - y|^{-2n}\, |1 - \varphi(y)|^2\, dy$$

$$\leqslant (1 + \|\varphi\|_\infty) C \int |\psi(x)|^2\, dx \int_{|x-y|>\varepsilon} |x - y|^{-2n}\, dy < \infty ,$$

donc $\psi H(1 - \varphi)$ est compact, ceci prouve donc que ψHK est compact.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 5. - Si H est un opérateur de Calderón-Zygmund appartenant à $\mathcal{K}^{loc}$, il est nul.

La démonstration de ce théorème est strictement la même que celle du théorème 3 de l'exposé n° A.7.

DÉFINITION. - *Appelons* CZ_β , *l'ensemble des opérateurs* S *de la forme* $H + K$, *où* H *est un opérateur de* CZ^0_β *et* K *dans* $\mathcal{K}^{loc}$.

THÉORÈME 6.

(a) CZ_β *est une algèbre*.

(b) *Pour tout* $S \in CZ_\beta$, *la décomposition* $S = H + K$ $(H \in CZ^0_\beta \, , \, K \in \mathcal{K}^{loc})$ *est unique*.

(c) *L'application* $\theta : S \to \sigma_H$ *est un homomorphisme surjectif d'algèbres (de* CZ_β *sur* G^0_β *) dont le noyau algébrique est* $\mathcal{K}^{loc}$.

Démonstration.

(a) est vraie, moyennant le théorème 4.

(b) est vraie, moyennant le théorème 5.

(c) se déduit directement des définitions de θ et du symbole du pseudo-produit.

THÉORÈME 7. - *Le centre de* CZ_β *est l'ensemble des multiples de l'opérateur unité*.

La démonstration est celle du théorème 5 de l'exposé n° A.7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).

[2] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).