Marouan Ajlani

Critères de compacité faible par le lemme combinatoire de Pták

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 2 (1967-1968), exp. n° B4, p. B1-B10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° B.4

4 janvier 1968

CRITÈRES DE COMPACITÉ FAIBLE PAR LE LEMME COMBINATOIRE DE PTÁK

par Marouan AJLANI

BANACH a établi, pour une suite bornée (x_n) de l'espace $B(Q)$ des fonctions numériques bornées sur un ensemble Q abstrait, l'équivalence entre la convergence faible vers zéro et la condition $\lim_n \lim_m x_n(q_m) = 0$, pour toute suite (q_m) telle que la limite $\lim_n x_n(q_m)$ existe quel que soit n .

Il se révèle que des conditions similaires sur l'existence d'une limite double pour une suite (a_{mn}) de réels (i. e. chaque fois que $\lim_n(\lim a_{nm})$ et $\lim_m(\lim a_{mn})$ existent, elles doivent être égales) entraînent des propriétés intéressantes sur des barycentres d'éléments de la suite ; une formulation précise de ce fait sera donnée en 2.2 et 2.3 de cet exposé. D'autre part, certaines conditions de double limite en liaison avec des propriétés des barycentres d'éléments de la suite permettent d'étudier les propriétés de compacité faible sans faire appel à la théorie de la mesure.

L'intérêt des travaux de PTÁK, que nous nous proposons d'exposer, réside dans la formulation d'un théorème combinatoire (cf. 1.3), qui sera l'outil essentiel pour l'étude des propriétés barycentriques mentionnées plus haut.

PTÁK obtient notamment, à partir des conditions de limite double, les propriétés de compacité faible et le théorème de prolongement d'une fonction numérique séparément continue sur un produit de deux espaces complètement réguliers, que nous appliquerons à un théorème général qui contient ceux de KREIN et de EBERLEIN. (Pour les applications de la méthode à la convergence faible, voir [1].)

1. Le lemme combinatoire.

Définitions et notations. - Soit un ensemble S ; nous désignerons par $M(S)$ l'ensemble des fonctions numériques $\lambda : S \to R_+$, qui sont différentes de zéro, en un nombre fini de points de S , et tel que $\sum_{s \in S} \lambda(s) = 1$; on notera

$$N(\lambda) = \{s \in S \ ; \ \lambda(s) > 0\} .$$

Si $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(S)$ pour tout $K \subset S$, nous noterons

$$\mathcal{W}(K) = \{ W \in \mathcal{W} \ ; \ W \cap K \neq \emptyset\} .$$

Si $\varepsilon > 0$ donné, et $H \subset S$, nous noterons

$$M(H , \mathscr{W} , \varepsilon) = \{\lambda ; \lambda \in M(S) , N(\lambda) \subset H , \lambda(W) < \varepsilon , \forall W \in \mathscr{W}\} .$$

LEMME 1.1. - Soit S un ensemble non vide ; $\mathscr{W} \subset \mathscr{P}(S)$, $H \subset S$, $H \neq \emptyset$, tels que $M(H , \mathscr{W} , \varepsilon) = \emptyset$, alors, pour tous $R \subset H$ et ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe $K \subset R$ avec K fini $\neq \emptyset$, tel que $M(R , \mathscr{W}(K) , \varepsilon') = \emptyset$.

Démonstration. - Supposons en effet $M(R , \mathscr{W}(K) , \varepsilon') \neq \emptyset$ pour tous K fini $\subset R$, et soit A_1 fini $\subset R$. Choisissons $\lambda_1 \in M(R , \mathscr{W}(A_1) , \varepsilon')$; posons

$$A_2 = A_1 \cup N(\lambda_2) ,$$

et prenons $\lambda_2 \in M(R , \mathscr{W}(A_2) , \varepsilon')$. On obtient ainsi une suite croissante (A_n) d'ensembles finis non vides, et une suite (λ_n) , $\lambda_n \in M(R , \mathscr{W}(A_n) , \varepsilon')$. Si nous montrons que $\lambda'_n = \dfrac{\lambda_1 , \dots , \lambda_n}{n}$ appartient à $M(R,\mathscr{W},\varepsilon) \subset M(H,\mathscr{W},\varepsilon)$, nous aurons obtenu la contradiction cherchée ; pour cela soit W quelconque, appartenant à $\mathscr{W}$; la suite $\lambda_n(W)$ contient au plus un terme $\geqslant \varepsilon'$. En effet, si $\lambda_p(W) \geqslant \varepsilon'$ (i. e. $W \cap N(\lambda_p) \neq \emptyset$) et si $q > p$, on aura $W \cap A_q \neq \emptyset$ (i. e. $W \in \mathscr{W}(A_q)$), donc $\lambda_q(W) < \varepsilon'$. On en déduit que $\lambda'_n(W) < (1 + (n - 1)\varepsilon')/n$, donc $\lambda'_n(W) < \varepsilon$ pour n assez grand.

LEMME 1.2. - Soit (K_n) une suite d'ensembles finis, et soit (P_n) une suite d'ensembles, avec $P_n \subset K_1 \times \dots \times K_n$, $\forall n$, $P_n \neq \emptyset$, $\forall n$, et telle que si $m \leqslant n$ et $(k_1 , \dots , k_n) \in P_n$, on ait $(k_1 , \dots , k_m) \in P_m$; alors il existe une suite (s_n) , $s_n \in K_n$, telle que $(s_1 , \dots , s_n) \in P_n$, $\forall n$.

Démonstration. - Elle est évidente. Il s'agit de la limite projective des P_n .

Convenons que si nous supposons la famille $\mathscr{W} \subset \mathscr{P}(S)$ indexée par un ensemble A , $\mathscr{W} = \{W(a) ; a \in A\}$. Nous désignerons par W le graphe de l'application $a \to W(a)$ de A dans $S \times A$.

Inversement, étant donné un ensemble A , et $W \subset S \times A$, la famille $W(a)$ des sections de W , pour a constant, $a \in A$, est une certaine famille $\mathscr{W} \subset \mathscr{P}(S)$.

Nous désignerons naturellement par $W(s)$ la section de W par s constant,

$$W(s) = \{a \in A ; (s , a) \in W\} .$$

THÉORÈME COMBINATOIRE 1.3. - Soient S et A deux ensembles, W et $V \subset S \times A$, $W \cap V = \emptyset$, et tels que, pour toute suite finie $\{a_1 , \dots , a_n\} \subset A$, on ait

$$V(a_1) \cap \dots \cap V(a_n) \neq \emptyset .$$

Soit $\mathscr{W} = \{W(a) ; a \in A\}$. Supposons que, pour $\varepsilon > 0$, on ait $M(S , \mathscr{W} , \varepsilon) = \emptyset$, alors il existe une suite $s_n \in S$ et une suite $a_n \in A$, telles que, pour tout n ,

$$s_n \in V(a_1) \cap V(a_2) \cap \dots \cap V(a_{n-1}) \cap W(a_n) \cap W(a_{n+1}) \cap \dots$$

Démonstration. - $M(S, \mathscr{W}, \varepsilon) = \emptyset$ entraîne, d'après le lemme 1.1, qu'il existe $K_1 \neq \emptyset$ fini, tel que $M(S, \mathscr{W}(K_1), \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$. Soit $P_1 = \{s \in K_1 ; W(s) \neq \emptyset\}$, $P_1 \neq \emptyset$ pour tout $p \in P_1$. Choisissons un $a(p) \in W(p)$, tel que $p \in W(a(p))$, et posons $V_1 = \cap V(a(p))$ pour les $p \in P$. On a $V_1 \neq \emptyset$.

Par 1.1, nous déduisons qu'il existe $K_1 \neq \emptyset$ fini tel que

$$M(V_1, \mathscr{W}(K_1) \cap \mathscr{W}(K_2), \varepsilon/4) = \emptyset .$$

Soit $P_2 = \{(s_1, s_2) \in K_1 \times K_2 ; W(s_1) \cap W(s_2) \neq \emptyset\}$, $P_2 \neq \emptyset$ pour tout $p \in P_2$. Choisissons $a(p)$ dans $W(s_1) \cap W(s_2)$ tel que $\{s_1, s_2\} \subset V(a(p))$, et posons $V_2 = \cap V(a(p))$ pour $p \in P_1 \cup P_2$ ...

Nous avons défini ainsi une suite K_n d'ensembles finis non vides, et une suite $V_n \neq \emptyset$, telles que $K_n \subset V_{n-1}$, ainsi qu'une suite P_n satisfaisant à la condition de 1.2. Il existe donc une suite $s_n \in K_n$, telle que $p_n = (s_1, \ldots, s_n) \in P_n$, $\forall n$. Posons $a_n = a(p_n)$, il en résulte que $(s_1, \ldots, s_n) \in W(a_n)$, $\forall n$ (i. e. $s_n \in W(a_n) \cap W(a_{n+1}) \cap \ldots$ et $s_n \in K_n \subset V_{n-1} \subset V(a_1) \cap V(a_2) \cap \ldots \cap V(a_{n-1})$).

C. Q. F. D.

Remarque. - La suite s_n est constituée par des éléments distincts, car

$$s_n \in W(a_n) \qquad \text{et} \qquad s_{n+1} \in V(a_n) .$$

COROLLAIRE 1.4. - *Soit S un ensemble infini, et soit $\mathscr{W} \subset \mathscr{P}(S)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $H \subset S$, H infini, et $\varepsilon > 0$, tels que $M(H, \mathscr{W}, \varepsilon) = \emptyset$,*

(2) *Il existe une suite $(s_n) \subset S$ d'éléments distincts, et $(a_n) \subset A$ telles que $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset W(a_n)$, $\forall n$,*

(3) *Il existe une suite $(s_n) \subset S$ d'éléments distincts, et $(a_n) \subset A$, telles que W contienne les points (s_m, a_n) pour $m \leq n$,*

(4) *Il existe une suite $(a_n) \subset S$ d'éléments distincts, et $(a_n) \subset A$ telles que $s_n \in W(a_n) \cap W(a_{n+1}) \cap \ldots$, $\forall n$,*

(5) *Il existe une suite $(a_n) \subset S$ d'éléments distincts, et $(a_n) \subset A$ telles que $a_n \in W(s_1 \cap \ldots \cap W(s_n)$, $\forall n$.*

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2). Remarquons que le cas intéressant est celui où $\mathscr{W}$ ne contient pas d'ensemble infini, car, si $W(a)$ infini $\subset \mathscr{W}$, $M(W(a), \mathscr{W}, \varepsilon) = \emptyset$, et l'on peut choisir s_n dans $W(a)$. Supposons donc qu'aucun $W(a) \in \mathscr{W}$ n'est infini, soit $\mathscr{W}' = \{W'(a) ; W'(a) = W(a) \cap H, a \in A\}$.

$$(M(H\ ,\ \mathscr{W}'\ ,\ \varepsilon) = \emptyset) \implies (M(H\ ,\ \mathscr{W}'\ ,\ \varepsilon) = \emptyset)\ .$$

Si l'on pose $\mathscr{W}' = \{W(a)\ ;\ a \in A\}$ et $V' = H \times A - W'$, V' vérifie bien la condition d'intersection finie non vide du théorème 1.3, car

$$(V'(a_1) \cap \ldots \cap V'(a_n) = \emptyset) \implies (W'(a_1) \cup \ldots \cup W'(a_n) = H)\ ,$$

donc il existerait un $W(a_i)$ infini, ce que nous avons écarté. Ainsi le théorème 1.3 implique qu'il existe une suite $s_n \in S$ et une suite a_n telles que

$$(s_1\ ,\ \ldots\ ,\ s_n) \in W(a_n)\ ,\quad \forall\ n\ .$$

(2) $\implies$ (1). Posons $H = \{s_n\}$, et soit $\lambda \in M(H\ ,\ \mathscr{W}\ ,\ \varepsilon)$.

$$N(\lambda)\ \text{ fini} \subset \{s_1\ ,\ \ldots\ ,\ s_k\} \subset W(a_k)$$

soit $1 = \lambda(N(\lambda)) \leqslant \lambda(W(a_k)) < \varepsilon$, ce qui est absurde.

Les conditions (3) à (5) ne sont que d'autres formulations de (2).

2. Suites doubles.

Nous commencerons par appliquer le théorème combinatoire pour obtenir un résultat connu, ce qui nous permettra de mettre en évidence la méthode, et nous poursuivrons en étudiant les suites doubles.

THÉORÈME 2.1. - *Soient* T *un espace compact,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(T)$, $\|x_n\| \leqslant 1$, $\forall\ n$. *Supposons que la suite* x_n *converge simplement vers zéro, alors,* $\forall\ \varepsilon > 0$, *il existe* λ_i , $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{i}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{tel que} \quad \Big\|\sum_{s_i}^{n} \lambda_i\ x_i\Big\| \leqslant \varepsilon\ .$$

Démonstration. - Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$W = \{(t\ ,\ n) \in T \times \mathbb{N}\ ;\ |x_n(t)| \geqslant \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \mathscr{W} = \{W(t)\ ;\ t \in T\}\ .$$

Le problème sera résolu si $M(\mathbb{N}\ ,\ \mathscr{W}\ ,\ \varepsilon) \neq \emptyset$; en effet, si $\lambda \in M(\mathbb{N}\ ,\ \mathscr{W}\ ,\ \varepsilon)$, on aura $|\sum \lambda_n\ x_n(t)| \leqslant \sum_{n\in W(t)} \lambda_n\ |x_n(t)| + \sum_{n\in \mathbb{N}-W(t)} \lambda_n\ |x_n(t)|$. Or si $n \notin W(t)$, $|x_n(t)| < \varepsilon$, soit

$$|\sum \lambda_n\ x_n(t)| \leqslant \sum_{n\in W(t)} \lambda_n + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \leqslant 2\varepsilon\ .$$

Il suffit alors de montrer que $M(\mathbb{N}\ ,\ \mathscr{W}\ ,\ \varepsilon) \neq \emptyset$; sinon, d'après 1.4, il existerait une suite d'éléments distincts $(i_n) \in \mathbb{N}$, et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \in T$, telles que $t_n \in W(i_1) \cap \ldots \cap W(i_n)$, $\forall\ n$; les $W(i)$ étant fermés, il existerait $t_0 \in \bigcap_1^\infty W(i_n)$, soit $|x_{i_n}(t_0)| > \varepsilon$, $\forall\ n$, ce qui contredirait l'hypothèse de la convergence simple vers zéro.

2.2. Les suites doubles. - Soit a_{pq} une suite double de réels telles que

$$\lim_q a_{pq} = a_{po}$$

existe quel que soit p ; nous dirons que :

(α) a_{pq} converge presque uniformément vers a_{po} si, $\forall\ \varepsilon > 0$ et $\forall\ R$ ensemble infini d'indices q, il existe $K \subset R$, K fini, tel que $\min_{k\in K} |a_{pk} - a_{po}| < \varepsilon$.

(β) a_{pq} converge en moyenne vers a_{po} si, $\forall\ \varepsilon > 0$ et $\forall\ R$ infini d'indices q, il existe $K \subset R$, K fini, et $\lambda_k \in R$, $\sum_{k\in K} \lambda_k = 1$ tel que

$$\Big| \sum_{k\in K} \lambda_k (a_{pk} - a_{po}) \Big| < \varepsilon .$$

Posons $W = \{(p, q) \in N^2,\ |a_{pq} - a_{po}| \geqslant \varepsilon\}$, W dépend de ε. On notera $W(q) = \{p \in N,\ |a_{pq} - a_{po}| \geqslant \varepsilon\}$, la convergence presque uniforme s'exprimera en termes combinatoires de la façon suivante :

Pour tout ensemble infini R d'indices q, il existe K fini $\subset R$ tel que

$$\bigcap_{k\in K} W(k) = \emptyset .$$

THÉORÈME 2.3. - Soient a_{pq} une suite double bornée de réels telle que

$$\lim_q a_{pq} = a_{po}$$

existe quel que soit p, et

$$\lim_p a_{pq} = a_{oq}$$

existe quel que soit q, les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(1) a_{pq} converge presque uniformément vers a_{po},

(2) a_{pq} converge en moyenne vers a_{po},

(3) $\lim_p a_{po}$ et $\lim_q a_{oq}$ existent toutes les deux, et sont égales.

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2). Posons $\mathscr{W} = \{W(p)\ ;\ p \in N\}$. Soit R un ensemble infini d'indices q, si $\lambda \in M(R, \mathscr{W}, \varepsilon)$, nous avons

$$\Big|\sum \lambda_k (a_{pk} - a_{po})\Big| \leqslant \sum_{k\in W(p)} \lambda_k |a_{pk} - a_{po}| + \sum_{k\in N(\lambda)-W(p)} \lambda_k |a_{pk} - a_{po}|$$

$$\leqslant 2M \sum_{k\in W(p)} \lambda_k + \varepsilon \sum_{k\in N(\lambda)} \lambda_k \leqslant (2M + 1)\varepsilon ,$$

donc a_{pq} converge en moyenne vers a_{po}. Il reste à montrer que $M(R, \mathscr{W}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Supposons $M(R, \mathscr{W}, \varepsilon) = \emptyset$; d'après 1.4, il existerait $(r_n)_{n\in N}$, $r_n \in R$, les r_n étant distincts, et $p_n \in N$ tel que $p_n \in W(r_1) \cap \ldots \cap W(r_n)$, $\forall\ n$, ce qui est en contradiction avec la définition de la convergence presque uniforme : "Il existe, dans R , K fini, tel que $\bigcap_{k\in K} W(k) = \emptyset$ ".

(2) $\Longrightarrow$ (3). Soit a une valeur d'adhérence de la suite a_{po} . Nous allons montrer que a_{oq} converge vers cette valeur d'adhérence. Sinon, il existerait R infini $\subset N$ tel que $a_{or} - a \geqslant \varepsilon$, $\forall\, r \in R$. Or, d'après (2), il existe K fini tel que $|\sum_{k\in K} \lambda_k(a_{pk} - a_{po})| < \varepsilon/2$, $\forall\, p \in N$, soit $\varepsilon \leqslant \sum \lambda_k(a_{ok} - a) \leqslant \varepsilon/2$, ce qui est absurde.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Supposons qu'il existe R infini $\subset N$ tel que, $\forall\, K$ fini $\subset R$, on ait $\bigcap_{k\in K} W(k) \neq \emptyset$, alors, $\forall\, r \in R$, $W(r)$ est infini, il en résulte que $|a_{pr} - a_{po}| \geqslant \varepsilon$, soit $|a_{or} - a| > \varepsilon$, ce qui contredit (3).

Il reste à montrer que $W(r)$ est infini. Pour cela, considérons $W(r) \cap W(r')$ pour r' dans R . On a $W(r) \cap W(r') \neq \emptyset$ pour une infinité de r' . Si $W(r)$ était fini, il existerait $p \in W(r')$ pour une infinité de r' (i. e. $W(p)$ contient une infinité d'éléments de R), ce qui contredirait (3).

3. Applications du théorème combinatoire à l'étude de la compacité faible.

Voici d'abord les définitions de la condition de double limite que nous emploierons par la suite.

Définition (α). - Nous dirons que $f : P \times Q \longrightarrow R$ vérifie la condition de double limite si, pour toute suite $p_n \in P$ et toute suite $q_m \in Q$, telles que

$$\lim_n \lim_m f(p_n , p_m) \qquad \text{et} \qquad \lim_m \lim_n f(p_n , p_m)$$

existent toutes les deux, ces deux limites sont égales.

Définition (β). - Nous dirons que $A \subset E$, E espace localement convexe, vérifie la condition de double limite si, pour tout voisinage de l'origine U dans E , pour toute suite $a_n \in A$, et pour toute suite $a'_m \in U^0$, U^0 polaire de U , telles que

$$\lim_n \lim_m (a_n , a'_m) \qquad \text{et} \qquad \lim_m \lim_n (a_n , a'_m)$$

existent toutes les deux, ces deux limites sont égales. Cette définition s'étend à un espace normé en remplaçant "tout U^0 " par la "boule unité du dual de cet espace".

Définition (γ). - Nous dirons que $A \subset \mathcal{C}_\beta(T)$, ou $\mathcal{C}(T)$, vérifie la condition de double limite si, pour toute suite $a_n \in A$ et toute suite $t_m \in T$, telles que

$$\lim_n \lim_m a_n(t_m) \qquad \text{et} \qquad \lim_m \lim_n a_n(t_m)$$

existent toutes les deux, ces deux limites sont égales.

Voici un lemme qui donne une condition suffisante pour qu'une fonction vérifie la condition de double limite.

LEMME 3.1. - Soient S et T deux espaces complètement régulier, S weierstrassien, et T semi-compact, $f : S \times T \longrightarrow R$, f séparée continue ; alors f satisfait à la condition de double limite.

Démonstration. - Soient $s_n \in S$ et $t_m \in T$ telles que

$$\lim_m f(s_n , t_m) = \alpha_n , \quad \lim_n f(s_n , t_m) = \beta_m , \quad \lim_n \alpha_n = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_m \beta_m = \beta .$$

T étant semi-compact, soit t_o une valeur d'adhérence de (t_m) telle que

$$\lim_m f(s_n , t_m) = f(s_n , t_o) = \alpha_n , \quad \forall n .$$

S étant weierstrassien, il existe $s_o \in S$ telle que

$$\lim_n f(s_n , t_m) = f(s_o , t_m) = \beta_m ,$$

$\forall t_m$ y compris t_o, soient :

$$f(s_o , t_o) = \lim_n f(s_n , t_o) = \lim_n \alpha_n = \alpha$$

$$f(s_o , t_o) = \lim_m f(s_o , t_m) = \lim_m \beta_n = \beta ,$$

donc $\alpha = \beta$.

Il reste à montrer qu'il existe $s_o \in S$ telle que

$$f(s_o , t_m) = \lim_n f(s_n , t_m) = \beta_n, \quad \forall m .$$

Soit pour cela $\check{s}$ une valeur d'adhérence de s_n dans βS, le compactifié de Čech de S. On a $\lim\limits_n f(s_n , t_m) = f(\check{s} , t_m) = \beta_m$, $\forall m$. Nous allons montrer qu'il existe $s_o \in S$ telle que $f(s_o , t_m) = f(\check{s} , t_m)$, $\forall m$. Considérons

$$g(s) = \sum_m \frac{|f(s , t_m) - f(\check{s} , t_m)|}{2^m(1 + \sup\limits_{s \in S} f(s , t_m))} ,$$

$g(s)$ est continue sur S, $\inf\limits_{s \in S} g(s) = 0$; si l'on n'avait pas $s_o \in S$ telle que $g(s_o) = 0$, on aurait $g(s) > 0$, soit $1/g(s)$ continue sur S et non bornée, ce qui est en contradiction avec le fait que S est weierstrassien.

COROLLAIRE 3.2. - Soit E un espace localement convexe, et soit E' son dual. Soient $A \subset E$ et $B \subset E'$, tels que $\overline{A}^{\sigma(EE')}$ soit weierstrassien, et $\overline{B}^{\sigma(EE')}$ semi-compact, alors la restriction de la dualité à $A \times B$ vérifie la condition de la double limite.

THÉORÈME 3.3. - Soient T un espace complètement régulier, $E = C_\beta(T)$ l'espace des fonctions numériques bornées sur T muni de la topologie de la norme, $A \subset E$ un ensemble borné et satisfaisant à la condition de double limite, alors A est faiblement relativement compact dans E .

Démonstration. - A étant borné, son adhérence dans $(E'^* , \sigma(E'^* , E'))$ est compacte, il suffit donc de montrer que cette adhérence est égale à l'adhérence de A dans $(E , \sigma(E , E'))$. Autrement dit, si r est adhérent à A pour $\sigma(E'^*, E')$, alors $r \in E$, ou encore, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $b = \sum_1^n \lambda_i a_i$ avec $\sum \lambda_i = 1$, et $a_i \in E$ tel que $|r(t) - b(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in T$.

Posons

$$W = \{(a , t) \in A \times T ; \quad |r(t) - a(t)| \geqslant \varepsilon\}$$

$$V = \{(a , t) \in A \times T ; \quad |r(t) - a(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

On a bien $\bigcap_1^n V(t_i) \neq \emptyset$ pour tout $t_1 , \dots , t_n$ car r est adhérent à A . Posons :

$$\mathscr{W} = \{W(t) ; \quad t \in T\} ;$$

si $\lambda \in M(A , \mathscr{W} , \varepsilon)$, on aura

$$|\sum \lambda_{a_i} r(t) - a_i(t)| \leqslant \sum_{a_i \in W(t)} \lambda_{a_i} |r(t) - a_i(t)| + \sum_{a_i \in A - W(t)} \lambda_{a_i} |r(t) - a_i(t)|$$

et

$$|\sum \lambda_{a_i} r(t) - a_i(t)| \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon .$$

Si $M(A , \mathscr{W} , \varepsilon) = \emptyset$, il existerait (cf. 3.1) deux suites (a_i) et (t_j) telles que

$$a_n \in V(t_1) \cap \dots \cap V(t_{n-1}) \cap W(t_n) \cap W(t_{n+1}) \cap \dots$$

Choisissons dans ces deux suites, par le procédé diagonal, deux suites (a_i^*) et (t_j^*) telles que

$$\lim_j r(t_j^*) = \rho \quad \text{existe,}$$

$$\lim_j a_i^*(t_j^*) = \alpha_i \quad \text{existe,} \quad \forall i ,$$

$$\lim_i a_i^*(t_j^*) = \beta_j \quad \text{existe,} \quad \forall j .$$

on aura $|\lim_j r(t_j^*) - a_i^*(t_j^*)| = |\alpha_i - \rho| \geqslant \varepsilon$, $\forall i$, et, pour j assez grand, $|r(t_j^*) - \rho| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |\beta_j - \rho| < \frac{3\varepsilon}{4}$, soit $|\alpha_i - \beta_j| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$ pour j assez grand, ce qui contredit la condition de double limite.

COROLLAIRE 3.4. - Soient T weierstrassien complètement régulier, et $A \subset \mathcal{C}_\beta(T)$ borné et semi-compact pour la topologie de la convergence simple, alors A est faiblement relativement compact dans $\mathcal{C}_\beta(T)$.

THÉORÈME 3.5. - Soient E un espace localement convexe complet, et $S \subset E$ borné et satisfaisant à la condition de double limite, alors S^{oo} est faiblement compact.

Nous ne donnons pas une démonstration de ce théorème ici, car nous nous proposons de l'obtenir, dans le cas où E est un espace de Banach, comme une application du théorème de prolongement du § 4. Remarquons que la démonstration, pour un espace de Banach, fournit celle employée pour un espace localement convexe complet, et que ce théorème contient ceux de EBERLEIN et de KREIN. Pour une démonstration qui n'utilise que 1.3, voir l'article de PTÁK [2].

4. Le théorème de prolongement.

THÉORÈME 4.1. - Soient S et T complètement réguliers, $f : S \times T \longrightarrow R$, f bornée séparément continue et satisfaisant à la condition de double limite, alors il existe un prolongement bilinéaire séparément continu $\hat{f}$ de f à $\mathcal{C}_\beta(S)' \times \mathcal{C}_\beta(T)'$.

Démonstration. - Pour tout $s \in S$, définissons $h(s) \in \mathcal{C}_\beta(T)$ par

$$h(s)(t) = f(s , t) .$$

Ceci est possible, car f est bornée, et définissons $f_1 : S \times \mathcal{C}_\beta(T)' \longrightarrow R$, $f_1(s , y) = (h(s) , y)$, $f_1(s , .)$ est continue par définition de la topologie faible de $\mathcal{C}_\beta(T)'$. Montrons que $f_1(. , y)$ est continue ; soit un filtre $s_\alpha \to s_o$, il faut prouver que $f_1(s_\alpha , y) \longrightarrow f_1(s_o , y)$, $\forall\, y \in \mathcal{C}_\beta(T)'$, donc que

$$h(s_\alpha) \longrightarrow h(s_o)$$

dans $\mathcal{C}_\beta(T)$ faible. Pour cela, remarquons que l'adhérence de $h(S)$, $\overline{h(S)}$, pour $\sigma(\mathcal{C}_\beta(T) , \mathcal{C}_\beta(T)')$, est compacte (théorème 3.3), et que, si $L(T)$ désigne l'espace vectoriel engendré par T dans $\mathcal{C}_\beta(T)'$, $\sigma(\mathcal{C}_\beta(T) , L(T))$ est plus fine que $\sigma(\mathcal{C}_\beta(T) , \mathcal{C}_\beta(T)')$; ces deux topologies coïncident donc sur $\overline{h(S)}$. Or

$$h(s_\alpha) \longrightarrow h(s_o) \text{ pour } \sigma(\mathcal{C}_\beta(T) , L(T)) ,$$

donc aussi pour $\sigma(\mathcal{C}_\beta(T) , \mathcal{C}_\beta(T)')$, c'est-à-dire que $f_1(. , y)$ est continue.

Enfin, si nous considérons la restriction de f_1 au produit de S par la boule unité de $\mathcal{C}_\beta(T)'$, en raison du théorème 4.2 ci-dessous, elle vérifie la condition de double limite, et l'on peut prolonger à $\mathcal{C}_\beta(S)'$.