Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claude Mayer

**Semi-groupes non homogènes et leurs générateurs**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 7, nº 2 (1967-1968), exp. nº B8, p. B1-B10

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° B.8



23 mars 1968

# SEMI-GROUPES NON HOMOGÈNES ET LEURS GÉNÉRATEURS

par Claude MAYER

Résumé. - Nous appellerons semi-groupe non homogène (ou généralisé) sur un espace vectoriel, une famille $\{P_t^s\}$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$ d'opérateurs linéaires, satisfaisant aux relations fonctionnelles :

$$P_s^s = I \qquad \text{et} \qquad P_t^s \circ P_u^t = P_u^s \qquad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u) \quad .$$

Ces opérateurs sont importants dans la théorie des équations aux dérivées partielles, et dans celle des processus de Markov, où ils représentent la fonction de transition.

C'est dans ce dernier cadre que nous les étudierons : le but de cette étude est d'étendre (partiellement) la théorie de Hille-Yosida à une classe convenable de semi-groupes généralisés sur un espace $\mathcal{C}_0(E)$ , $E$ étant un espace localement compact.

Une étude plus générale est possible, et sera faite ultérieurement.

Dans le § 1, nous esquissons une interprétation probabiliste, qui permet de voir comment on peut ramener l'étude d'un semi-groupe non homogène à celle d'un semi-groupe ordinaire sur un espace plus riche.

Dans le § 2, nous introduisons les semi-groupes "de type $F$ ", qui correspondent aux semi-groupes homogènes "de Feller".

Dans le § 3, nous étudions les propriétés des générateurs infinitésimaux de $\{P_t^s\}$ :

$$A_s f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{s+t}^s f(x) - f(x)}{t} \quad .$$

Nous donnons, en particulier, une condition pour que leurs domaines soient denses.

Enfin, dans le § 4, nous donnons des conditions pour qu'une famille d'opérateurs $(A_s)$ engendre un semi-groupe non homogène de type $F$ .

Pour cela, nous utilisons un résultat récent, dû à DA PRATO ([3] et [4]), sur la somme de deux générateurs de semi-groupes de contractions.

1. Interprétation probabiliste.

Soient $(E , \mathcal{E})$ un espace mesurable, $P_t^s(x , A)$ la fonction de transition d'un processus de Markov sur $E$ $(0 \leqslant s \leqslant t , x \in E , A \in \mathcal{E})$ : $P_t^s(x , A)$ est la probabilité pour qu'une particule, qui se trouve en $x$ à l'instant $s \geqslant 0$ , soit dans l'ensemble $A$ à l'instant $t \geqslant s$ .

Considérons maintenant l'espace produit $\widetilde{E} = E \times R_+$ , muni de la tribu $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{R_+}$ .

Il existe dans $\widetilde{E}$ un nouveau processus de Markov, homogène, associé canoniquement au premier de la manière suivante : à chaque instant $t \geqslant 0$ , la particule soumise au processus produit a une ordonnée $t$ dans $E \times R_+$ , tandis que son abscisse décrit dans $E$ le processus original.

La fonction de transition de ce nouveau processus, dit processus espace-temps, est la suivante :

$$(1.1) \qquad Q_t[(x , s) ; A \times I] = \begin{cases} P^s_{s+t}(x , A) , & \text{si } s + t \in I \\ 0 , & \text{sinon} \end{cases}$$

(où $s , t \geqslant 0$ , $x \in E$ , $A \in \mathcal{E}$ , $I \in \mathcal{B}_{R_+}$ ).

Le lecteur désirant une définition plus rigoureuse, et des applications aux probabilités, pourra consulter [1].

Le but de cette étude étant fonctionnel, nous allons traduire la formule (1.1) en termes d'opérateurs linéaires.

Les opérateurs $P_t^s$ (resp. $Q_t$ ) agissent sur l'espace $\mathcal{B}(E)$ (resp. $\mathcal{B}(\widetilde{E})$ ) des fonctions boréliennes bornées, par les relations :

$$(1.2) \qquad P_t^s f(x) = \int_E P_t^s(x , dy) f(y) \qquad (f \in \mathcal{B}(E)) ,$$

$$(1.2') \qquad Q_t f(x , s) = \int_{\widetilde{E}} Q_t[(x , s) , dy \otimes dt] f(y , t) \qquad (f \in \mathcal{B}(\widetilde{E})) .$$

D'après les axiomes des fonctions de transition, $\{P_t^s\}$ est alors un semi-groupe non homogène (ou généralisé, ou s. g. g.) sur $\mathcal{B}(E)$ , et $\{Q_t\}$ est un semi-groupe ordinaire sur $\mathcal{B}(\widetilde{E})$ ; la relation (1.1) s'écrit alors :

$$(1.3) \qquad Q_t f(x , s) = P^s_{s+t} f_{s+t}(x) , \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{B}(\widetilde{E}) ;$$

$f_{s+t}$ désigne la fonction $f(. , s + t) \in \mathcal{B}(E)$ .

Désormais, nous nous intéresserons au cas particulier où les opérateurs $P_t^s$ laissent invariant l'espace $\mathcal{C}_0(E)$ des fonctions continues, tendant vers 0 à l'infini, sur un espace localement compact $E$ .

C'est dans ce cadre, par exemple, que la théorie des processus de Markov s'est le plus largement développée.

Nous n'utiliserons plus cette introduction, dans la suite, que pour en retenir la relation (1.3).

## 2. Semi-groupes non homogènes de type F .

La définition suivante précise le cadre de notre étude :

2.1. DÉFINITION. - Soient $E$ un espace localement compact, $\{P_t^s\}$ un semi-groupe non homogène d'opérateurs positifs sur $\mathcal{B}(E)$ , tels que $P_t^s\, 1 \leqslant 1$ .

Nous dirons que $\{P_t^s\}$ est "de type F " si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^+(E)$ , les trois conditions suivantes sont réalisées :

(F 1) $\forall\ (x\ ,\ s) \in \widetilde{E}$ , $\lim\limits_{t\downarrow 0} P_{s+t}^s\, f(x) = f(x)$ ;

(F 2) $\forall\ t \geqslant 0$ , $(x\ ,\ s) \longmapsto P_{s+t}^s\, f(x)$ est une fonction continue sur $\widetilde{E}$ ;

(F 3) $\forall\ t \geqslant 0$ , la fonction $P_{s+t}^s\, f$ , comme fonction de $x$ , tend vers 0 à l'infini, uniformément en $s$ sur tout compact de $R_+$ .

(La condition (F 3) est vide, si $E$ est compact.)

2.2. THÉORÈME. - Soit $\{Q_t\}$ le semi-groupe homogène sur $\mathcal{B}(\widetilde{E})$ , défini par (1.3). Pour que $\{Q_t\}$ soit un semi-groupe de Feller sur $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ , il faut et il suffit que $\{P_t^s\}$ soit de type F .

Démonstration. - Il est assez facile de vérifier que les conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes.

Soit $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{E})$ . Nous utiliserons le fait que $f$ est uniformément continue, ce qui entraîne que $\lim\limits_{t\downarrow 0} f_{s+t} = f_s$ uniformément en $x$ .

Il suffit de vérifier que pour tout $(x\ ,\ s) \in \widetilde{E}$ , $\lim\limits_{t\downarrow 0} Q_t\, f(x\ ,\ s) = f(x\ ,\ s)$ , et que pour tout $t \geqslant 0$ , $Q_t\, f$ est un élément de $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ ; ces conditions sont en effet suffisantes pour que le semi-groupe $\{Q_t\}$ soit fellérien (cf. [2], p. 25).

La première de ces conditions résulte de (F 1) ; le fait que $Q_t\, f$ est une fonction continue résulte de (F 2) ; et $Q_t\, f$ tend vers 0 à l'infini, grâce à (F 3), en utilisant de plus le fait que les $P_t^s$ sont des opérateurs positifs, et le lemme suivant :

2.3. LEMME. - Soit $f$ une fonction numérique, continue sur $E \times F$, où $E$ et $F$ sont des espaces compacts ; alors $g(x) = \sup_{y \in F} f(x, y)$ est continue sur $E$.

(On trouvera dans [1] une démonstration détaillée du théorème (2.2).)

## 3. Générateurs infinitésimaux.

Dans les deux paragraphes suivants, nous allons étudier les rapports entre un s. g. g. de type F et sa famille de générateurs.

3.1. DÉFINITION. - Soit $\{P_t^s\}$ un s. g. g. de type F ; le générateur infinitésimal de $\{P_t^s\}$ au point $s \geq 0$ est défini par :

$$A_s f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{s+t}^s f(x) - f(x)}{t} \quad ; \tag{3.1}$$

son domaine $\mathcal{D}(A_s)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_0(E)$ telles que la limite dans (3.1) soit uniforme et donne un élément de $\mathcal{C}_0(E)$.

Nous allons donner le lien entre la famille des $A_s$ et le générateur de $\{Q_t\}$, que nous désignerons par $\tilde{\tilde{A}}$.

3.2. DÉFINITIONS.

- Opérateur $B$ : Soit $\mathcal{D}(B)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{E})$, dérivables par rapport à $s$, dont la dérivée $\partial f/\partial s$ appartient à $\mathcal{C}_0(\tilde{E})$ ; posons $B = \partial/\partial s$ sur $\mathcal{D}(B)$.
- Opérateur $\hat{A}$ : Soit $\mathcal{D}(\hat{A}) = \{f \in \mathcal{C}_0(\tilde{E})\ ;\ \forall\, s \geq 0\ ,\ f_s \in \mathcal{D}(A_s)\}$ ; posons $\hat{A}f(x, s) = A_s f_s(x)$ sur $\mathcal{D}(\hat{A})$.
- Opérateur $\tilde{A}$ : Soit $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(\hat{A}) \cap \mathcal{D}(B)$ ; posons $\tilde{A} = \hat{A} + B$ sur $\mathcal{D}(\tilde{A})$.

3.3. PROPOSITION. - Si $f \in \mathcal{D}(\bar{\tilde{A}}) \cap \mathcal{D}(B)$, alors $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$, et

$$\tilde{\tilde{A}}f = \tilde{A}f = \hat{A}f + Bf \quad . \tag{3.2}$$

Cette proposition justifie la notation $\tilde{\tilde{A}}$, puisque le générateur de $\{Q_t\}$ apparaît comme une extension fermée de $\tilde{A}$.

Démonstration. - Soit $f \in \mathcal{D}(\tilde{\tilde{A}}) \cap \mathcal{D}(B)$. On a :

$$\frac{P_{s+t}^s f_{s+t}(x) - f_s(x)}{t} = \frac{P_{s+t}^s (f_{s+t} - f_s)(x)}{t} + \frac{P_{s+t}^s f_s(x) - f_s(x)}{t} \quad . \tag{3.3}$$

Comme $f \in \mathcal{D}(\tilde{\bar{A}})$ , cette expression tend vers $\tilde{\bar{A}}f(x , s)$ lorsque $t \downarrow 0$ , uniformément en $(x , s)$ .

D'autre part, comme $f \in \mathcal{D}(B)$ , et comme $\|P^s_{s+t}\| \leq 1$ , le premier terme du second membre converge uniformément en $(x , s)$ vers $Bf(x , s) = \partial f/\partial s \in \mathcal{C}_0(\tilde{E})$ .

Le second terme converge donc uniformément en $(x , s)$ vers un élément de $\mathcal{C}_0(\tilde{E})$, qui est par définition $\hat{A}f(x , s)$ .

On a donc bien $f \in \mathcal{D}(\hat{A})$ , et

$$\hat{A}f + Bf = \tilde{\bar{A}}f \quad .$$

C. Q. F. D.

La proposition 3.3 montre que $\mathcal{D}(\hat{A})$ , donc chaque $\mathcal{D}(A_s)$ , sera riche dès qu'il y aura suffisamment de fonctions dérivables dans $\mathcal{D}(\tilde{\bar{A}})$ .

Nous donnons ci-dessous une condition pour qu'il en soit ainsi.

3.4. DÉFINITION. - Nous dirons que le s. g. g. $\{P^s_t\}$ est dérivable si, pour toute $f \in \mathcal{C}_0(E)$ , il existe $\alpha > 0$ , tel que la fonction

$$s \longmapsto P^s_{s+t}\, f$$

soit dérivable de $R_+$ dans $\mathcal{C}_0(E)$ , pour tout $t \leq \alpha$ .

On exige de plus que la dérivée $(\partial/\partial s)(P^s_{s+t}\, f)$ soit une fonction continue de $t$ sur $[0 , \alpha]$ , et qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\|(\partial/\partial s)(P^s_{s+t}\, f)\| \leq M , \qquad \text{pour tous} \quad s \geq 0 , \quad t \leq \alpha \quad .$$

3.5. THÉORÈME. - Soit $\{P^s_t\}$ un s. g. g. de type F dérivable ; alors $\mathcal{D}(\tilde{A})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\tilde{E})$ , et pour tout $s \geq 0$ , $\mathcal{D}(A_s)$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(E)$ .

Démonstration. - Pour toute $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{E})$ , posons :

$$M_\varepsilon\, f = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon Q_t\, f\, dt \quad . \tag{3.4}$$

Il est connu (voir par exemple le cours de M. DENY à Orsay) que $M_\varepsilon\, f \in \mathcal{D}(\tilde{\bar{A}})$ ; de plus, $M_\varepsilon\, f$ converge uniformément vers $f$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ .

Soit, maintenant, $f$ une fonction de la forme $f(x , s) = a(x)\, b(s)$ , où $a \in \mathcal{C}_0(E)$ et $b \in \mathcal{C}_0(R_+)$ , $b$ étant de plus dérivable, avec $b' \in \mathcal{C}_0(R_+)$ .

Il est facile de vérifier, au moyen du théorème de Stone-Weierstrass, que l'ensemble des fonctions $f$ de ce type est total dans $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ .

Soit $\alpha > 0$ tel que $(\partial/\partial s)(P^s_{s+t}\ a)$ existe pour tout $t \leqslant \alpha$ ; nous avons

$$M_\varepsilon f(x\ ,\ s) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon b(s+t)\ P^s_{s+t}\ a(x)\ dt \quad ; \tag{3.5}$$

pour $\varepsilon \leqslant \alpha$ , on voit par dérivation sous le signe somme en utilisant les propriétés de $(\partial/\partial s)(P^s_{s+t}\ a)$ , que $M_\varepsilon\ f$ est dérivable en $s$ , sa dérivée étant un élément de $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ .

Pour toute $f$ de la forme ci-dessus, on a donc $M_\varepsilon\ f \in \mathcal{D}(B)$ et $M_\varepsilon\ f \in \mathcal{D}(\overline{\widetilde{A}})$ .

D'après la proposition 3.3, $M_\varepsilon\ f \in \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(\hat{A})$ .

Comme $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} M_\varepsilon\ f = f$ , on voit que $\mathcal{D}(\widetilde{A})$ est partout dense dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f(x\ ,\ s) = a(x)\ b(s)$ considérées ; ceci prouve que $\mathcal{D}(\widetilde{A})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ .

Enfin, pour tout $s \geqslant 0$ , $\mathcal{D}(A_s)$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0(E)$ : $\mathcal{D}(A_s)$ est l'image de $\mathcal{D}(\hat{A})$ par l'application continue et surjective $f \longmapsto f_s$ de $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ sur $\mathcal{C}_0(E)$ .

C. Q. F. D.

Remarque. - Une condition d'existence de $(\partial/\partial s)(P^s_{s+t}\ f)$ en un point $s_0$ seulement, avec des conditions analogues à celles de la définition 3.4, suffit à entraîner que $\mathcal{D}(A_{s_0})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(E)$ ; nous n'insisterons pas sur cette généralisation, très facile.

Nous ne traiterons pas ici le problème des semi-groupes tangents (semi-groupes homogènes sur $\mathcal{C}_0(E)$ engendrés par les $A_s$ ) ; nous l'incorporerons dans un cadre plus général, où nous donnerons aussi une formule d'approximation d'un s. g. g. par une famille de semi-groupes homogènes tangents ; dans le paragraphe suivant, nous traitons seulement le problème d'existence d'un semi-groupe généralisé, ayant une famille de générateurs donnée.

## 4. Génération des semi-groupes non homogènes.

Soit $(A_s)$ $(s \geqslant 0)$ une famille de générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Feller $\{T^{(s)}_t\}$ ; nous cherchons à quelles conditions les $A_s$ sont la famille de générateurs d'un s. g. g. $\{P^s_t\}$ de type $F$ .

L'outil principal de ce paragraphe est le théorème suivant, dû à DA PRATO ([3] et [4]) :

4.1. THÉORÈME. - Soient $X$ un espace de Banach, $A$ et $B$ des opérateurs linéaires sur $X$, engendrant chacun un semi-groupe de contractions.

Désignons respectivement par $\mathcal{R}(\lambda , A)$, $\mathcal{R}(\lambda , B)$, les résolvantes de $A$, $B$.

S'il existe deux constantes $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 1$, telles que :

(4.1) Pour tout $\lambda > \omega$, et au moins un $\mu \geqslant 0$, on a :

$$(\mu I - B)^2 \mathcal{R}(\lambda , A) \mathcal{R}(\mu , B)^2$$

est un opérateur borné, partout défini, de norme $\leqslant \frac{M}{\lambda - \omega}$.

Alors, $A + B$ est préfermé et son plus petit prolongement fermé $\overline{A + B}$ engendre un semi-groupe de contractions [1].

Nous allons chercher à appliquer ce théorème à $X = \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$, $A = \hat{A}$ défini par $\hat{A}f(x , s) = A_s f_s(x)$, et $B = \partial/\partial s$ (voir définition 3.2).

Puis nous montrerons que le semi-groupe $\{Q_t\}$ engendré par $\hat{A} + B$ est nécessairement de la forme $Q_t f(x , s) = P^s_{s+t} f_{s+t}(x)$.

Le s. g. g. ainsi obtenu sera bien de type $F$, en vertu du théorème 2.2, et admettra $(A_s)$ comme famille de générateurs.

4.2. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{R}^{(s)}_\lambda$ la résolvante de $A_s$ ; $\hat{A}$ engendre un semi-groupe de Feller $\{\hat{P}_t\}$ sur $\mathcal{C}_0(\widetilde{E})$, si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$s \longmapsto \mathcal{R}^{(s)}_\lambda f$$

soit une fonction continue de $R_+$ dans $\mathcal{C}_0(E)$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E)$.

Ce semi-groupe est donné par la formule :

$$\hat{P}_t f(x , s) = T^{(s)}_t f_s(x) \quad , \tag{4.2}$$

où $\{T^{(s)}_t\}_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe engendré par $A_s$.

Démonstration. - Soit $\{\hat{P}_t\}$ la famille d'opérateurs définis par (4.2) ; $\{\hat{P}_t\}$ est (algébriquement) un semi-groupe ; pour que ce soit un semi-groupe de Feller, il faut et il suffit que l'on ait :

---

[1] L'énoncé de DA PRATO donne seulement $M = 1$ ; mais cette restriction n'est pas essentielle dans sa démonstration.

(a) $\lim_{t \downarrow 0} \hat{P}_t f(x, s) = f(x, s)$ , $\forall f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ , $\forall (x, s) \in \widetilde{E}$ ;

(b) $P_t f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ , $\forall f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ .

La première condition est automatiquement satisfaite, puisque les $\{T_t^{(s)}\}$ sont eux-mêmes des semi-groupes de Feller.

La condition (b) sera vérifiée si, $\forall f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ , la fonction

$$s \longmapsto P_t f(\cdot , s) = T_t^{(s)} f_s(\cdot)$$

est continue de $R_+$ dans $\mathcal{C}_0(E)$ : on aura alors $P_t f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ pour toute $f$ de la forme $f(x, s) = a(x) b(s)$ , où $a \in \mathcal{C}_0(E)$ et $b \in \mathcal{C}_0(R_+)$ , donc pour toute $f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ , puisque les $\hat{P}_t$ sont continus sur les fonctions $a(x) b(s)$ .

D'autre part, il est connu, en théorie des semi-groupes, que cette condition de continuité des semi-groupes $\{T_t^{(s)}\}$ est vérifiée dès que la condition de la proposition 4.2 est vraie.

C. Q. F. D.

4.3. PROPOSITION. - Supposons que la fonction $s \longmapsto \mathcal{R}_\lambda^{(s)} f$ soit deux fois continuement différentiable de $R_+$ dans $\mathcal{C}_0(E)$ , pour toute $f \in \mathcal{C}_0(E)$ , et tout $\lambda > 0$ ; si, de plus, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|\partial/\partial s\ \mathcal{R}_\lambda^{(s)}\| \leq K/\lambda \quad \text{et} \quad \|\partial^2/\partial s^2\ \mathcal{R}_\lambda^{(s)}\| \leq K/\lambda ,$$

alors $\hat{A}$ et $B$ vérifient toutes les conditions du théorème 4.1.

Démonstration. - Nous n'en donnons pas les détails, qui sont assez techniques, quoique faciles ; il suffit de prendre des fonctions $f$ de la forme $a(x) b(s)$ , et de dériver deux fois en $s$ la fonction $\mathcal{R}_\lambda^{(s)} f$ .

D'autre part, $\hat{A}$ engendre un semi-groupe de contractions, en vertu de la proposition 4.2.

C. Q. F. D.

D'après cette proposition et le théorème 4.1, la famille des $A_s$ engendre alors un semi-groupe de contractions $\{Q_t\}$ ; les opérateurs $Q_t$ sont évidemment positifs.

Montrons que $\{Q_t\}$ est de la forme voulue :

4.4. PROPOSITION. - Le semi-groupe de Feller $\{Q_t\}$ est tel que

$$Q_t f(x, s) = 0 , \qquad \text{si } f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E}) \text{ et } f_{s+t} \equiv 0 .$$

En d'autres termes, $Q_t f(\cdot , s)$ ne dépend que de la section d'indice $s + t$ de $f$ .

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord que $E$ soit compact, que $1 \in \mathcal{D}(A_s)$ pour tout $s \geqslant 0$ , avec $A_s\, 1 = 0$ .

Soit $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_0(\widetilde{E})$ qui ne dépendent que de la seconde variable: $f(x\,,\,s) \equiv f(s)$ .

Comme $E$ est compact, $\mathcal{C}_A$ est isomorphe à $\mathcal{C}_0(R_+)$ . On a, pour toute $f \in \mathcal{C}_A$ :

$$\widetilde{A}f(x\,,\,s) = A_s\, f_s(x) + \partial f/\partial s = f'(s) \quad ;$$

donc $\widetilde{A}$ envoie $\mathcal{D}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{C}_A$ dans $\mathcal{C}_A$ , et la restriction de $\widetilde{A}$ à $\mathcal{C}_A$ est l'opérateur dérivée première.

Or, il est connu que cet opérateur engendre sur $\mathcal{C}_0(R_+)$ le semi-groupe des translations à droite : $\pi_t\, f(s) = f(s+t)$ .

On en déduit que, pour toute $f \in \mathcal{C}_A$ , on a :

$$Q_t\, f(x\,,\,s) = f(s+t) \qquad (\forall\; x \in E) \quad .$$

Utilisons maintenant le fait que les opérateurs $Q_t$ sont <u>positifs</u> : soit $f \in \mathcal{C}_0^+(\widetilde{E})$ , telle que $f_{s+t} \equiv 0$ .

D'après le lemme 2.3, la fonction $\hat{f}(s) = \sup_{x \in E} f(x\,,\,s)$ est dans $\mathcal{C}_A^+$ , et $\hat{f}(s+t) = 0$ .

On a donc :

$$0 \leqslant Q_t\, f(x\,,\,s) \leqslant Q_t\, \hat{f}(x\,,\,s) = \hat{f}(s+t) = 0 \quad .$$

Ceci prouve la proposition dans le cas envisagé.

Supposons maintenant que $E$ ne soit pas compact, ou bien, $E$ étant compact, qu'on n'ait pas $A_s\, 1 = 0$ pour tout $s \geqslant 0$ .

Soit $\delta \notin E$ ; posons $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ ; $E_\delta$ est le compactifié d'Alexandroff de $E$ , si $E$ n'est pas compact ; sinon, $\delta$ est un point isolé de $E_\delta$ .

Identifions $\mathcal{C}_0(E)$ au sous-espace de $\mathcal{C}(E_\delta)$ des fonctions qui s'annulent au point $\delta$ .

Prolongeons les $A_s$ à un sous-espace dense dans $\mathcal{C}(E_\delta)$ : soit

$$\mathcal{D}(A'_s) = \{f \in \mathcal{C}(E_\delta) \;\; ; \;\; f_{|E} - f(\delta) \in \mathcal{D}(A_s)\} \quad ,$$

et

$$A'_s\, f = A_s(f_{|E} - f(\delta)) \qquad \text{pour} \;\; f \in \mathcal{D}(A'_s) \quad .$$

Par définition de $A'_s$ , on a : $1 \in \mathcal{D}(A'_s)$ et $A'_s\, 1 = 0$ .

Nous pouvons maintenant définir sur $\mathcal{C}_0(E_\delta \times R_+)$ tous les opérateurs qui nous intéressent :

$$\hat{A}'f(x\ ,\ s) = A'_s\ f_s(x)\ ; \qquad B'f(x\ ,\ s) = (\partial f/\partial s)(x\ ,\ s)\ ; \qquad \tilde{A}' = \hat{A}' + B'\ .$$

On vérifie que, si les opérateurs originaux engendrent des semi-groupes sur $\mathcal{C}_0(\tilde{E})$ , les nouveaux opérateurs engendrent des semi-groupes sur $\mathcal{C}_0(E_\delta \times R_+)$ , qui prolongent les premiers.

On peut alors appliquer la première partie de la démonstration.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

4.5. THÉORÈME. - Soit $(A_s)$ une famille de générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Feller sur $\mathcal{C}_0(E)$ .

Si les résolvantes $\mathcal{R}_\lambda^{(s)}$ vérifient les conditions de dérivabilité de la proposition 4.3, il existe un semi-groupe non homogène de type F unique, $\{P_t^s\}$ , admettant $A_s$ comme générateur infinitésimal au point s .

Démonstration. - D'après l'étude précédente, $\tilde{A} = \hat{A} + B$ engendre un semi-groupe de Feller unique, $\{Q_t\}$ , tel que $Q_t\ f(x\ ,\ s) = 0$ si $f_{s+t} \equiv 0$ .

Soit alors $P_{s+t}^s\ f(x) = Q_t\ g(x\ ,\ s)$ , pour $f \in \mathcal{C}_0(E)$ , où g est un élément quelconque de $\mathcal{C}_0(\tilde{E})$ tel que $g_{s+t} \equiv f$ .

Cette formule définit bien un s. g. g. de type F , qui a toutes les propriétés requises.

C. Q. F. D.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] MAYER (Claude). - Processus de Markov non stationnaires et espace-temps, Ann. Inst. H. Poincaré (à paraître).

[2] MEYER (Paul-André). - Processus de Markov. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 26).

[3] DA PRATO (Giuseppe). - Equations opérationnelles dans les espaces de Banach (cas analytique), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 277-279.

[4] DA PRATO (Giuseppe). - Somma di generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione e equazioni di evoluzione in spazi di Banach, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 78, 1968, p. 131-157.