Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Leduc

Caractérisations des espaces euclidiens

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 2 (1967-1968), exp. n° B9, p. B1-B5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
7e année, 1967/68, n° B.9

28 mars 1968

CARACTÉRISATIONS DES ESPACES EUCLIDIENS

par Michel LEDUC

Cet exposé constitue un prolongement d'un papier déjà ancien [4] : on démontre trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace de Banach soit de Hilbert.

La première m'a été annoncée par Robert BONIC (1) comme un raffinement immédiat du théorème 0, on en trouvera une démonstration au théorème 1 ; les deux autres sont plus intuitives, mais elles réservent quelques surprises : la dernière n'est valide qu'en dimension au moins égale à 3 . Ces trois critères ont déjà été énoncés (cf. respectivement [5], [3], [1]) mais l'utilisation systématique de la différentielle permet des démonstrations passablement (I) ou radicalement (II) simplifiées et différentes.

E désigne un espace de Banach, n sa norme qu'on supposera toujours dérivable dans $E \setminus \{0\}$ (2) .

I

Soient E' le dual de E , et ν sa norme. On désignera la dérivée (ou différentielle) de n par n' .

LEMME. - Primo, $\nu \circ n' = 1$, secundo

$$x \neq 0 \ , \quad \xi \in E' \ \underline{\text{et}} \ \xi(x) = n(x).\nu(\xi) \implies \xi = \nu(\xi)\, n'(x) \ .$$

En effet, d'abord $\nu \circ n' = \mathrm{Cte}\ 1$, car l'inégalité triangulaire implique $\forall\, x \neq 0$, $\|n'(x)\| \leqslant 1$ et, par homogénéité, $n'(x).x = n(x)$, donc $\|n'(x)\| \geqslant 1$. Ensuite, soient $x \neq 0$ et $\xi \in E'$, si $n(x)\ \nu(\xi) = \xi(x)$, supposons $\xi \neq 0$, pour $h \in \operatorname{Ker} \xi$; $\forall\, t \in \underset{\sim}{R}$,

$$\nu(\xi)\ n(x) = |\xi(x)| = |\xi(x + th)| \leqslant \nu(\xi).n(x + th) \ ,$$

(1) Northeastern University, Boston (Massachussets).

(2) On rappelle que RESTREPO [6] a prouvé que la norme est de classe C_1 dès qu'elle est dérivable en dehors de l'origine.

d'où

$$n'(x).h = \lim_{t \to +0} \frac{n(x + th) - n(x)}{t} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad n'(x).h = 0 \quad ,$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\xi = \lambda n'(x)$, or $\xi(x) = \lambda n'(x).x = \lambda n(x)$ et finalement $\lambda = \nu(\xi)$.

THÉORÈME 0. - Si n et ν sont de classe C_1 , alors E est réflexif.

En effet, soient $f : x \in E \to \frac{1}{2} n^2(x)$ et $\varphi : \xi \in E' \to \frac{1}{2} \nu^2(\xi)$; f et φ sont de classe C_1 sur E et E' respectivement avec $f'(x) = n(x)\, n'(x)$ et $\varphi'(\xi) = \nu(\xi)\, \nu'(\xi)$, donc d'après le lemme $\nu \circ f' = n$, et soient aussi $\xi \neq 0$ et $u \in E'$, si $\|u\| = \nu(\xi)$ et $u(\xi) = \nu^2(\xi)$, alors $u = \varphi'(\xi)$.

Soit θ l'injection canonique de E dans E'' ,

$\forall\, x \in E$, $\quad \theta(x).f'(x) = f'(x).x = n^2(x) = \nu^2(f'(x))$ et $\|\theta(x)\| = n(x) = \nu(f'(x))$

donc $\theta(x) = \varphi'(f'(x))$, soit $\theta = \varphi' \circ f'$. Or d'après le lemme

$$f'(E) = \{n(x)\, n'(x) \; ; \quad x \in E \setminus \{0\}\} \supset \{\xi \in E' \; ; \; \exists\, x \neq 0 : \; \xi(x) = n(x)\, \nu(\xi)\}$$

qui est une partie dense de E' d'après [2] (p. 31, corollaire 5) ; de même $E'' = \overline{\varphi'(E')}$.

Comme φ' est continue sur E , $\varphi'(\overline{f'(E)}) \subset \overline{\varphi'(f'(E))}$, soit $\varphi'(E) \subset \overline{\theta(E)}$ et $E'' = \overline{\varphi'(E')} = \overline{\theta(E)}$.

THÉORÈME 1. - Si, de plus, il existe $x \in E$ tel que $n''(x)$ et $\nu''(n'(x))$ soient définis, alors E admet une norme hilbertienne équivalente à n .

En effet, identifiant E'' à E , $\varphi' \circ f'$ est l'identité sur E , et comme par homogénéité n'' et ν'' (donc aussi f'' et φ'') sont définies sur les droites contenant x et $n'(x)$ respectivement, $\varphi''(f'(x)) \circ f''(x)$ = identité ; de même $f''(x) \circ \varphi''(f'(x))$ est l'identité sur E' , donc $f''(x)$ est un isomorphisme de E sur E' (3). Il est symétrique puisque dérivée seconde, et positif par convexité, car

$$2f\left(\frac{u + v}{2}\right) = n^2\left(\frac{u + v}{2}\right) \leqslant \left(\frac{1}{2} n^2(u) + \frac{1}{2} n^2(v)\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\, 2(n^2(u) + n^2(v)) = f(u) + f(v)$$

$\forall\, u$ et $v \in E$.

---

(3) A noter, en outre, que $n''(x)$ est définie positive sur $\operatorname{Ker} n'(x)$, car

$$f''(x).(u\, ,\, v) \equiv n'(x).u\; n'(x).v + n(x)\; n''(x).(u\, ,\, v) \; ,$$

et puisque par homogénéité $n''(x).x = 0$, sa restriction est un isomorphisme du noyau de $n'(x)$ sur l'orthogonal de x .

Enfin la norme associée est équivalente à n , car

$$\sqrt{f''(x).(h\ ,\ h)} \leqslant \sqrt{\|f''(x)\|}\ n(h)\ , \qquad \forall\ h \in E\ ,$$

et $\{h \in E\ ;\ f''(x).(h\ ,\ h) \leqslant 1\}$ est borné fortement puisque faiblement (théorème de Mackey) ; en effet, l'inégalité de Schwarz s'écrit

$$|f''(x).(k\ ,\ h)|^2 \leqslant |f''(x).(k\ ,\ k)|.|f''(x).(h\ ,\ h)|\ , \qquad \forall\ k \in E\ ,$$

donc $\forall\ \xi \in E' = \mathrm{Im}\ f''(x)$, posant $\xi = f''(x).k$

$$|\xi(h)| \leqslant \sqrt{\xi(k)}\ \sqrt{f''(x).(h\ ,\ h)}\ .$$

II

La complétude de E n'est pas nécessaire.

THÉORÈME 2. - Si [4] $n(x) = n(y)$ implique, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $n(x + ty) = n(y + tx)$, alors n est euclidienne.

En effet, si h et $k \in E \setminus \{0\}$, dérivons en t la fonction

$$n(\|h\|k + t\|k\|h) = n(\|k\|h + t\|h\|k)\ ;$$

pour $t = 0$, on obtient

$$n'(\|h\|k).\|k\|h = n'(\|k\|h).\|h\|k\ ,$$

soit

$$n(k)\ n'(k).h = n(h)\ n'(h).k\ .$$

Alors la formule du triangle est vérifiée car, pour tout $x \in E$, la fonction continue $y \in E \to n^2(x + y) + n^2(x - y) - 2n^2(y) \in \mathbb{R}$ vaut $2n^2(x)$ à l'origine, et elle est constante puisque de dérivée (pour $y \neq 0\ , \pm\ x$)

$$\begin{aligned} h \neq 0 \ \to\ & 2n(x + y)\ n'(x + y).h - 2n(x - y)\ n'(x - y).h - 4n(y)\ n'(y).h \\ &= 2[n(h)\ n'(h).(x + y) - n(h)\ n'(h).(x - y) - 2n(h)\ n'(h).y] \\ &= 2n(h)\ n'(h).(x + y - x + y - 2y) = 0\ . \end{aligned}$$

LEMME. - Si pour x et $y \in E \setminus \{0\}$, $n'(x).y = 0$ implique $n'(y).x = 0$, alors pour $a \in E$, si $b \neq 0$, $t \in \mathbb{R} \to n(a + tb) \in [0\ , \infty[$ est décroissante, puis croissante (strictement).

---

[4] L'hypothèse de dérivabilité de n est ici redondante, en effet : par convexité, dans tout plan, n est dérivable sauf sur une réunion dénombrable de droites ; or notre hypothèse permet de déduire de celle en un point, la dérivabilité dans tout le plan.

En effet, par continuité et comme $+\infty = \lim_{t\,\infty} n(a+tb)$, cette fonction atteint sa borne inférieure. Puis, par convexité, si $t_0 \in \underset{\sim}{R}$ et $n(a+t_0\,b) = \min_{\underset{\sim}{R}} n(a+tb)$, n décroît sur $]-\infty\,,\,t_0]$ et croît sur $[t_0\,,\,\infty[$. Enfin, l'hypothèse rend strictes ces monotonies car si $n(a+t_1\,b) = n(a+t_2\,b)$ avec $t_1 < t_2$ et $t_0 \notin\,]t_1\,,\,t_2[$, par monotonie $n(a+tb)$ est constante sur $[t_1\,,\,t_2]$, donc $n'(a+t_1\,b).b = 0 = n'(a+t_2\,b)$, d'où $n'(b).(a+t_1\,b) = 0 = n'(b).(a+t_2\,b)$, et $0 = (t_2-t_1)\,n'(b).b = (t_2-t_1)\,n(b)$, ce qui est contradictoire.

En particulier, $n(a+tb)$ prend, au plus en deux points, une même valeur.

THÉORÈME 3. - Si de plus, $3 \leqslant \dim E$, alors n est hilbertienne [5].

En effet, d'abord si $a \neq 0$, pour $0 \neq b \in \operatorname{Ker} n'(a)$, la fonction

$$u \in \operatorname{Ker} n'(a) \setminus \{0\} \;\to\; n\Big(a + \|b\| \frac{u}{n(u)}\Big)$$

est constante, car, par hypothèse, $\operatorname{Ker} n'(a) \setminus \{0\}$ est connexe, et la dérivée

$$h \;\to\; n'\Big(a + \|b\|\frac{u}{n(u)}\Big).\|b\|\Big(\frac{h}{n(u)} - n'(u).h\,\frac{u}{n^2(u)}\Big)$$

est nulle pour $h = u$ et $h \in \operatorname{Ker} n'(u) \cap \operatorname{Ker} n'(a)$, donc aussi sur leur somme $\operatorname{Ker} n'(a)$.

En particulier,

$$n(a-b) = n\Big(a + \|b\|\frac{-b}{n(-b)}\Big) = n(a+b) \quad .$$

Alors, si $n(x) = n(y)$;

soit $x + y = 0$, et on obtient immédiatement

$$n(x+ty) = n[(1-t)x] = n[(1-t)y] = n(y+tx) \quad ;$$

soit $x + y \neq 0$, et comme $0 \neq n(x+y) = n'(x+y).(x+y)$, $n'(x+y).x$ ou $n'(x+y).y$ est non nul.

---

(5) G. CHOQUET a étudié le cas $2 = \dim E$: les sphères possibles sont appelées "ellipsales" et arbitrairement déterminées par un de leurs arcs d'extrémités conjuguées ; en effet, désignons par $(x\,,\,y)$ un paramétrage, le point $(X\,,\,Y)$ est conjugué de $(x\,,\,y)$ dès que $Xy' = Yx'$ et $xY' = yX'$, soit, puisque $xY - yX = Cte$ est intégrale première,

$$X = \frac{Cte\;x'}{xy' - yx'} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{Cte\;y'}{xy' - yx'} \quad .$$

Supposons $n'(x+y).x \neq 0$. Pour $t = 2\,\frac{n'(x+y).x}{n(x+y)} \neq 0$,

$$n'(x+y).[2x - t(x+y)] = 0 \quad ,$$

donc, d'après le début,

$$n(2x) = n[t(x+y) + 2x - t(x+y)] = n[2t(x+y) - 2x] \quad ,$$

or $n(y) = n(-y) = n[x - (x+y)]$, finalement

$$n[x - t(x+y)] = n(y) = n[x - (x+y)] \, ,$$

et, d'après le lemme, $t \in \{0 , 1\}$, donc $t = 1$ et $n'(x+y).(x-y) = 0$.

Par suite, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $n'[(1+s)(x+y)].(1-s)(x-y) = 0$, d'où enfin, d'après le début de nouveau, $n(x+sy) = n(y+sx)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (Garrett). - Orthogonality in linear metric spaces, Duke math. J., t. 1, 1935, p. 169-172.

[2] BISHOP (E.) and PHELPS (R. R.). - The support functionals of a convex set, Convexity, p. 27-35. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 7).

[3] FICKEN (Frederick A.). - Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, Annals of Math., t. 45, 1944, p. 362-366.

[4] LEDUC (Michel). - Jauges différentiables et partitions de l'unité, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 12, 10 p. (Math. Semin., 1).

[5] RAO (M. M.). - Characterizing Hilbert space by smoothness, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 70, 1966, p. 132-135.

[6] RESTREPO (Guillermo). - Differentiable norms, Bol. Soc. mat. mexicana, Série 2, t. 10, 1965, p. 47-55.