

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

YVES DERMENJIAN

JEAN SAINT-RAYMOND

Produit tensoriel de deux cônes convexes saillants

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 20, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A10_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRODUIT TENSORIEL DE DEUX CONES CONVEXES SAILLANTS

par Yves DERMENJIAN et Jean SAINT-RAYMOND

1. Position du problème. - Soient E_i ($i = 1, 2$) un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et K_i ($i = 1, 2$) un cône convexe saillant de E_i . On pose

$$K_1 \otimes K_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \mid x_i \in K_1, y_i \in K_2 \right\} \subset E_1 \otimes E_2 .$$

Il est clair que $K_1 \otimes K_2$ est un cône convexe de $E_1 \otimes E_2$. A notre connaissance, $K_1 \otimes K_2$ n'était pas réputé saillant, ou du moins cela n'était prouvé que sous des conditions restrictives (voir [3], p. 183). Le but de cette petite étude est de montrer que $K_1 \otimes K_2$ est saillant, et ceci sans condition supplémentaire. Nous donnons trois méthodes ; la deuxième est la plus élémentaire, mais la première a l'avantage de rappeler une caractérisation des espaces vectoriels totalement ordonnés, de dimension inférieure ou égale à \aleph_0 , dont nous donnons une nouvelle démonstration en dimension finie.

2. THÉORÈME. - Si K_i ($i = 1, 2$) est un cône convexe saillant de E_i ($i = 1, 2$), alors $K_1 \otimes K_2$ est un cône convexe saillant de $E_1 \otimes E_2$.

3. Réduction du problème au cas de la dimension finie. - Si $K_1 \otimes K_2$ n'était pas saillant, il existerait un $x \neq 0$ tel que $x \in K_1 \otimes K_2 \cap - (K_1 \otimes K_2)$, donc

$$\sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i = - \sum_{i=k+1}^n x_i \otimes y_i, \quad \text{avec } x_i \in K_1, y_i \in K_2,$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0 .$$

Nous supposons, bien sûr, que $x_i \neq 0$ et $y_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Soit F_1 (resp. F_2) le sous-espace vectoriel de E_1 (resp. E_2) engendré par les x_i (resp. les y_i), $i = 1, \dots, n$. Comme $\sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$ appartient à

$$(K_1 \cap F_1) \otimes (K_2 \cap F_2),$$

cela entraîne que le cône convexe $(K_1 \cap F_1) \otimes (K_2 \cap F_2)$ n'est pas saillant.

Finalement, il suffit de démontrer le théorème 2 lorsque E_1 et E_2 sont de dimension finie, et pour cela nous montrerons que l'égalité $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ entraîne une contradiction.

(A) Première méthode.

Les démonstrations des propositions 4 et 5 sont laissées au lecteur.

4. PROPOSITION. - Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . La classe \mathcal{C} des cônes convexes saillants de E est inductive pour l'ordre défini par l'inclusion.

D'après le théorème de Zorn, il existe donc des cônes convexes saillants pointés maximaux. Nous les appellerons des semi-espaces (voir [2], pour une étude plus poussée).

5. PROPOSITION. - Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Si E est muni d'un ordre total compatible avec sa structure d'espace vectoriel, alors cet ordre est défini par un semi-espace. Réciproquement, un semi-espace définit un ordre total.

De cela, on déduit que si L est un sous-espace vectoriel de E , $L \cap K$ (où K est un semi-espace de E) est un semi-espace de L .

6. LEMME. - Si K est un semi-espace dans un espace vectoriel E sur \mathbb{R} de dimension finie n , il existe une base (a_1, \dots, a_n) telle que, si (a_1^*, \dots, a_n^*) désigne la base duale, et si on pose

$$\begin{cases} i(x) = \inf\{j \mid a_j^*(x) \neq 0\}, & \text{si } x \in E - \{0\}, \\ i(0) = 1, \end{cases}$$

on ait

$$K = \{0\} \cup \{x \mid x \in E, a_{i(x)}^*(x) > 0\}.$$

Démonstration. - Pour démontrer l'énoncé lorsque $n = 1$, il suffit de prendre a_1 dans $K - \{0\}$.

Supposons l'énoncé vrai pour tout semi-espace d'un espace vectoriel de dimension n , et soient E un espace vectoriel de dimension $n + 1$, et K un semi-espace de E . Comme K engendre E , il a un point intérieur ([1], chap. 2, § 2, exerc. 11 (a)). Il résulte alors du théorème de Hahn-Banach qu'il existe un hyperplan H de E passant par 0 , et un demi-espace ouvert Q limité par H , tels que $K \subset Q \cup H$.

Alors

$$- K \supset (K \supset C(Q \cup H)) = - Q ,$$

d'où

$$K \supset Q \quad \text{et} \quad K = Q \cup (H \cap K) .$$

$H \cap K$ est alors un semi-espace de H , ce dernier étant de dimension n . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base (b_1, \dots, b_n) de H , satisfaisant aux conditions de l'énoncé. En prenant a_1 dans Q , et $a_{m+1} = b_m$, on définit une base $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de E qui satisfait aux conditions du lemme. En effet :

- Soit $a_1^*(x) > 0$, et alors $x \in Q \subset K$;
- Soit $a_1^*(x) = 0$ et $x \in H$, alors $x \in K$ si, et seulement si, $a_{i(x)}^*(x) > 0$ ou si $x = 0$;
- Soit $a_1^*(x) < 0$, et alors $x \in -Q \subset K$.

7. Démonstration du théorème 2 par la première méthode. - D'après le § 3, nous avons

l'égalité $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$, et nous supposons que E_1 est engendré par les x_i , et E_2 par les y_i ($i = 1, \dots, n$).

Soit P_i ($i = 1, 2$) un semi-espace de E_i contenant K_i . On a

$$K_1 \otimes K_2 \subset P_1 \otimes P_2 \subset E_1 \otimes E_2 .$$

Si on démontre que $P_1 \otimes P_2$ est saillant, il en sera de même de $K_1 \otimes K_2$.

P_1 et P_2 étant des semi-espaces de E_1 et E_2 , il existe des bases (a_1, \dots, a_r) et (b_1, \dots, b_s) de E_1 et E_2 , vérifiant la propriété du lemme 6. Posons

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{i,\alpha} a_\alpha , \quad y_i = \sum_{\beta=1}^s \mu_{i,\beta} b_\beta .$$

Soit $p = \inf\{\beta \mid \exists i \text{ tel que } \lambda_{i,1} \cdot \mu_{i,\beta} \neq 0\}$; p existe bien, puisque l'on peut trouver un indice i tel que $\lambda_{i,1} \neq 0$ et que $y_i \neq 0$.

On peut écrire alors

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,\alpha} \mu_{i,\beta} \right) a_\alpha \otimes b_\beta ,$$

donc $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,1} \mu_{i,p} = 0$. Comme, pour tout i , $\lambda_{i,1} \geq 0$ puisque $x_i \in P_1$, et $\mu_{i,p} \geq 0$ puisque $y_i \in P_2$, et comme il existe un indice i tel que $\mu_{i,p} \lambda_{i,1} \neq 0$,

il y a une contradiction.

Ainsi les $x_i \otimes y_i$ sont tous nuls, ce qui prouve que

$$P_1 \otimes P_2 \cap - (P_1 \otimes P_2) = \{0\} .$$

$P_1 \otimes P_2$, et par suite $K_1 \otimes K_2$ sont saillants.

C. Q. F. D.

(B) Deuxième méthode.

8. PROPOSITION. - Soit K un cône convexe saillant de l'espace vectoriel E sur \mathbb{R} , tel que $\dim(K - K) = n < +\infty$. Alors il existe une base de $(K - K)$, soit (t_1, \dots, t_n) , telle que tout élément de K ait sa première coordonnée positive ou nulle.

Démonstration. - Dans $(K - K)$, muni de la topologie habituelle, K a un point intérieur ([1], chap. 2, § 2, exerc. 11 (a)), et, d'après le théorème de Hahn-Banach, K est inclus dans un demi-espace fermé H' limité par un hyperplan H passant par 0 . $\widehat{K} \subset H' = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, où f est une forme linéaire non nulle sur $K - K$.

On prend un élément t_1 non nul de K et n'appartenant pas à $H = f^{-1}(0)$ et, dans H , on choisit des éléments t_2, \dots, t_n formant une base de H .

Si $y = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n$ et $y \in K$, alors $f(y) \geq 0$ et, comme

$$f(y) = \alpha_1 f(t_1) ,$$

on a $\alpha_1 \geq 0$.

9. Démonstration du théorème 2 par la deuxième méthode. - D'après le § 3, nous avons $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$, et nous supposons que E_1 est engendré par les x_i . On choisit alors une base dans E_1 , a_1, \dots, a_ℓ , telle que tout élément de K_1 ait sa première coordonnée positive ou nulle :

$$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik} a_k , \quad \alpha_{i1} \geq 0 , \quad i = 1, \dots, n ,$$

d'où

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_{ik} a_k \right) \otimes y_i = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \otimes \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} y_i \right) ,$$

donc $\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} y_i = 0$ pour tout k , et en particulier $\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} y_i = 0$; or $\alpha_{i1} \geq 0$,

et comme K_2 est saillant, cela entraîne que $\alpha_{i1} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Ainsi $x_i = \sum_{k=2}^{\ell} \alpha_{ik} a_k$ et $\dim E_1 \leq \ell - 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

C. Q. F. D.

(C) Troisième méthode (suggérée par G. CHOQUET).

10. PROPOSITION. - Si C est un cône convexe saillant dans \mathbb{R}^n , les cônes convexes fermés contenus dans C forment une famille filtrante croissante.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que l'enveloppe convexe, c'est-à-dire la somme de deux tels cônes convexes fermés C_1 et C_2 est fermée. Montrons que l'application $\varphi : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui à (x, y) fait correspondre $x + y$, est propre. Soit K un compact de \mathbb{R}^n , il faut montrer que $\varphi^{-1}(K)$ est compact.

On sait déjà que $\varphi^{-1}(K)$ est fermé, d'autre part

$$\varphi^{-1}(K) = \{(x, y) \mid x \in C_1, y \in C_2, x + y \in K\} \subset [C_1 \times (K - C_1)] \cap [(K - C_2) \times C_2].$$

On peut supposer que K est convexe (sinon on prend son enveloppe convexe), alors $[C_1 \times (K - C_1)] \cap [(K - C_2) \times C_2]$ est un convexe qui ne contient aucune demi-droite, et si on montre qu'il est fermé, alors c'est un compact, et $\varphi^{-1}(K)$ sera compact.

Pour cela, considérons l'application $\psi : K \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, et montrons qu'elle est propre. Soit H un compact, on a

$$\psi^{-1}(H) = \{(x, y) \mid x - y \in H, x \in K, y \in C_2\} \subset K \times (C_2 \cap (K - H)).$$

Comme $\psi^{-1}(H)$ est fermé, et $K \times (C_2 \cap (K - H))$ est compact, on obtient que $\psi^{-1}(H)$ est compact. Ainsi $K - C_2$ et $K - C_1$ sont des ensembles fermés de \mathbb{R}^n .

11. PROPOSITION. - Si C_i ($i = 1, 2$) est un cône convexe saillant fermé dans \mathbb{R}^n , $C_1 \otimes C_2$ est saillant dans $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Démonstration. - C_i est complet, il existe donc ([1], chap. 2, § 6, prop. 11) une base de \mathbb{R}^n telle que C_i soit dans \mathbb{R}_+^n . Il est clair alors que, pour tout x de $C_1 \otimes C_2$, x a toutes ses coordonnées positives dans la base canonique de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, donc que $C_1 \otimes C_2$ est saillant.

12. Démonstration du théorème 2 par la troisième méthode. - On conclut facilement en rajoutant au besoin 0 à K_i ($i = 1, 2$), et en remarquant que si $(\Gamma_j)_{j \in J}$ est une famille filtrante croissante de cônes convexes saillants dans E ,

$\bigcup_{j \in J} \Gamma_j = \Gamma$ est saillant dans E .

C. Q. F. D.

13. Remarque. - On va montrer que le produit tensoriel de deux semi-espaces n'est pas en général un semi-espace.

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension supérieure ou égale à 2, et K un cône convexe pointé saillant maximal dans E (c'est-à-dire : K est un semi-espace). K possède au moins deux vecteurs, x_1 et x_2 , non nuls et non co-linéaires. $K \otimes K$ définit un ordre dans $E \otimes E$. Si cet ordre était total, on aurait :

- Soit $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \geq 0$,
- Soit $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \leq 0$.

D'autre part, il existe un automorphisme positif et involutif de $E \otimes E$ sur lui-même, à savoir

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \rightarrow \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i .$$

Par suite, si $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \geq 0$, on a $x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2 \geq 0$, or $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 = -(x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2)$, donc $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 = 0$.

Ceci n'est pas possible, puisque x_1 et x_2 sont linéairement indépendants. On agit de même en supposant $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \leq 0$.

Nous venons de démontrer que $K \otimes K$ ne définit pas un ordre total, donc ce n'est pas un semi-espace, d'après la proposition 5.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).
- [2] KLEE (V. L., Jr). - The structure of semispaces, Math. Scand., t. 4, 1956, p. 54-64.
- [3] PERESSINI (A. L.) and SHERBERT (D. R.). - Ordered topological tensor products, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 19, 1969, p. 177-190.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Yves DERMENJIAN
4 rue Coysevox
75 - PARIS 18

Jean SAINT-RAYMOND
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08