Marouan Ajlani

Factorisation des isomorphies d'ordre des espaces L^p

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 17, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 17, 8 p.

23 avril 1970

FACTORISATION DES ISOMORPHIES D'ORDRE DES ESPACES L^p

par Marouan AJLANI

0. Introduction et notations.

Soient H un espace vectoriel complètement réticulé, $\mathcal{B}$ l'espace des bandes de H ; on appellera filtre de bandes, une partie $\mathfrak{F} \subset \mathcal{B}$, $\mathfrak{F} \neq \mathcal{B}$, qui contient avec toute bande les bandes qui la contiennent, et qui contient avec deux bandes leur intersection. On appellera ultrafiltre de bandes, les éléments maximaux des filtres pour l'inclusion dans $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

L'ensemble $\mathcal{B}$, muni de l'ordre de l'inclusion des bandes, est un réseau booléen achevé, et tout filtre de bandes est l'intersection des ultrafiltres qui le contiennent.

L'espace Ω des ultrafiltres de bandes, appelé spectre de H , est alors muni d'une structure de compact stonien dont les ensembles, qui sont à la fois ouverts et fermés, correspondent biunivoquement aux bandes de H . Nous noterons de la même façon une bande de H et l'"ouvert et fermé" correspondant dans Ω .

Pour tout $u \neq 0$ de H , nous désignerons par I_u (resp. B_u) l'idéal d'ordre (resp. la bande) engendré par u dans H , et nous désignerons par u_B la projection de u sur la bande B .

Nous dirons qu'une forme linéaire positive (resp. un opérateur) T est normale, si, pour toute famille filtrante croissante $(h_\alpha) \subset H$ de borne supérieure $h \in H$, on a $T(h) = \sup_\alpha T(h_\alpha)$. L'espace vectoriel engendré par les formes linéaires normales sera appelé le dual normal de H . Nous dirons qu'un opérateur conserve les bandes, si, pour toute bande B , on a $T(B) \subset B$. Nous appellerons isomorphie d'ordre, un opérateur bijectif, croissant ainsi que son inverse.

1. Rappel du théorème de Nakano.

DÉFINITION 1. - Soient u et $v \in H^+$, $v \in B_u$; posons, pour $B \in \mathcal{B}$, $B \subset B_u$,

$$\lambda_B\left(\frac{v}{u}\right) = \inf\{\lambda \ ; \ v_B \leqslant \lambda u_B\} \ .$$

On pose, pour chaque ultrafiltre $\mathcal{U} \ni B_u$,

$$\frac{v}{u}(\mathcal{U}) = \lim_{B \in \mathcal{U}} \lambda_B \ .$$

Cette définition fait correspondre, à deux éléments v et u de H^+, une fonction $\frac{v}{u} \in \mathcal{C}^+(B_u , \overline{R})$. On remarque que $\frac{v}{u}$ est finie sur un ensemble partout dense de B_u, car toute bande $B \subset B_u$ contient une bande B' telle qu'il existe un n_0 entier qui vérifie : $v_{B'} - n_0 u_{B'} \leqslant 0$. Pour le voir, on prend $B' = B_{(v_B - n_0 u_B)^-}$, pour n_0 vérifiant $(v_B - n_0 u_B) \neq 0$.

Nous désignerons l'espace des fonctions numériques continues sur un ensemble B, et qui sont finies sur un ensemble partout dense de B, par $\mathcal{D}(B , \overline{R})$.

Le quotient $\frac{v}{u}$, défini sur B_u, vaut zéro hors de B_v ; on peut énoncer les "règles de calcul" suivantes :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} ; \qquad \frac{a}{u}\cdot\frac{u}{b} = \frac{a}{b} ; \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} ,$$

étant entendu que chaque relation est vraie sur l'intersection des bandes engendrées par les éléments qui y figurent.

Etant donnés $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega , R)$ et $u \in H^+$, on définit un élément de H^+, qu'on notera $v = \varphi . u$, de la façon suivante : Si $\varphi = \chi_B$ est la fonction caractéristique de l'ouvert et fermé B, v sera la projection de u sur la bande $B \subset H$. Si φ est une fonction continue quelconque, elle est limite supérieure de fonctions étagées plus petites, et v sera la borne supérieure (qui existe) d'une famille (v_i) de combinaisons linéaires de "produit" par une fonction caractéristique. Ainsi $\mathcal{C}(\Omega , R)$ opère sur H, et l'on remarque que $\varphi . u \in B_u \cap B_\varphi$.

La règle de calcul suivante devient claire : $\frac{\varphi . a}{\varphi . b} = \left(\frac{a}{b}\right)_{B_\varphi}$.

Le théorème suivant est dû à NAKANO [7] :

THÉORÈME 2. - L'application $v \to \frac{v}{u}$ induit un isomorphisme d'espace vectoriel ordonné entre B_u (resp. I_u) et un idéal d'ordre de $\mathcal{D}(B_u , \overline{R})$, qu'on notera $\widetilde{B}_u$ (resp. et $\mathcal{C}(B_u , \overline{R})$, qu'on notera $\widetilde{I}_u$, et lorsque I_u est muni de sa topologie de l'ordre, $I_u \to \mathcal{C}(B_u , \overline{R})$ est un isomorphisme d'espaces de Banach ordonnés).

2. Etude des opérateurs normaux qui conservent les bandes.

THÉORÈME 3. - A tout opérateur normal T qui conserve les bandes de H, correspond une fonction $\varphi_T \in \mathcal{D}^+(\Omega , \overline{R})$ telle que, pour tout $h \in H$, on ait $\varphi_T = \frac{T.h}{h}$. L'application $T \to \varphi_T$ est une isomorphie du cône N des opérateurs normaux qui conservent les bandes de H muni de son ordre propre sur un sous-cône $\widetilde{N} \subset \mathcal{D}^+(\Omega , \overline{R})$ héréditaire, complètement réticulé, stable par multiplication, et contenant $\mathcal{C}^+(\Omega , R)$.

Démonstration. - L'espace H est somme ([3], § 1, exercice 12) d'une famille maximale de bandes deux à deux étrangères et engendrées par un élément (B_e). Considérons une bande B_e, et posons $\varphi_{T,e} = \frac{T.e}{e} \in \mathcal{D}^+(B_e , \overline{R})$. On a, pour tout $h \in B_e$, $\frac{T.h}{h} = \frac{T.e}{e}$; en effet, on peut écrire

$$h = \sum_n \inf((n+1)e , h) - \inf(ne , h) \quad ;$$

comme les termes entre crochets sont inférieurs à e, on aura l'égalité cherchée par passage au sup, si on la démontre pour les $h \leqslant e$; or, pour ceux là, on a $h = \varphi.e$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^+(B_e , \overline{R})$ et $\frac{T.(\varphi.e)}{\varphi.e} = \frac{\varphi.(T.e)}{\varphi.e} = \frac{T.e}{e}$. Posant $\varphi_T = \sum_e \varphi_{T,e}$, on voit qu'on a bien $\varphi_T.h = T.h$ pour tout $h \in H$, car, par hypothèse, un tel h s'écrit $h = \sum_e h_{B_e}$. Les autres assertions du théorème sont des conséquences directes des propriétés du cône N.

Le théorème précédent indique que $\mathcal{D}^+(\Omega , \overline{R}) \supset \widetilde{N} \supset \mathcal{C}^+(\Omega , R)$; nous chercherons des conditions suffisantes pour que $\mathcal{C}^+(\Omega , R) = \widetilde{N}$, c'est-à-dire pour que les éléments de $\widetilde{N}$ soient bornés sur Ω.

PROPOSITION 4. - Supposons H normé avec une norme croissante sur H^+. Si $\varphi_T \in \widetilde{N}$ est la fonction correspondant à un opérateur continu T, alors

$$\|\varphi_T\|_\infty = \sup\{\varphi_T(x) \ ; \quad x \in \Omega\}$$

est égale à la norme de l'opérateur T, que nous désignerons par $\|T\|$, soit $\|\varphi_T\|_\infty = \|T\|$.

Démonstration. - C'est facile à voir, si φ_T est fonction caractéristique d'un ouvert et fermé ou fonction étagée. De plus, si $\varphi_{T'} \leqslant \varphi_T$, on a $\|T'\| \leqslant \|T\|$ (croissance de la norme). Or, tout $\varphi_T \in \widetilde{N}$ s'écrit

$$\varphi_T = \sup\{\varphi_{T'} \ ; \quad \varphi_{T'} \ \text{étagée, et} \ \varphi_{T'} \leqslant \varphi_T\} \quad ,$$

donc $\|T\| \geqslant \|T'\| \geqslant \varphi_{T'}(x) \geqslant 0$, soit $\|T\| \geqslant \varphi_T(x)$. On a, d'autre part,

$$\varphi_T \leqslant \|\varphi_T\|_\infty . 1 \quad ,$$

donc $\|T\| \leqslant \|\varphi_T\|_\infty$, soit enfin $\|\varphi_T\|_\infty = \|T\|$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer que, chaque fois que les éléments de N sont continus, alors $\widetilde{N}$ est identique à $\mathcal{C}^+(\Omega , R)$, en particulier :

PROPOSITION 5. - Lorsque la topologie de H est identique à sa topologie de l'ordre, ou lorsque H est un espace de Banach, on a $\widetilde{N} = \mathcal{C}^+(\Omega , R)$.

3. Les mesures spectrales.

Nous pouvons donner, dans le cas où la dualité entre H et son dual normal L est séparante, une définition du cône $\widetilde{N}$ au moyen des mesures spectrales étudiées par D. A. EDWARDS [4].

Pour $h \in H^+$, $\ell \in L^+$, et $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega , R)$, l'application $\varphi \to \langle \varphi h , \ell \rangle$ est une mesure normale sur Ω , que nous désignerons par $[h , \ell]$; l'ensemble de ces mesures sera appelé l'espace des <u>mesures spectrales</u>, et désigné par $[H , L]$.

On sait que toute bande de H est $\sigma(H , L)$-fermée (AMEMIYA [1] et MOKOBODSKI [6]) ; on en déduit que H et L ont le même spectre, que nous désignerons par Ω , et que $[h , \ell](\varphi) = \langle \varphi h , \ell \rangle = \langle h , \varphi \ell \rangle$.

PROPOSITION 6. - *L'espace* $[H , L]$ *est un espace vectoriel complètement réticulé, et un idéal d'ordre de l'espace* M_n *des mesures normales sur* Ω .

Démonstration. - Pour définir $[h , \ell] + [h' , \ell']$, on pose $g = \sup(h , h')$, on a $h = \varphi g$, $h' = \varphi' g'$, et l'on écrit

$$[h , \ell] + [h' , \ell'] = [g , \varphi\ell] + [g , \varphi'\ell'] = [g , \varphi\ell + \varphi'\ell'] .$$

Soit $([h_i , \ell_i])_{i\in I}$ avec $[h_i , \ell_i] \leq [h , \ell]$, il existe donc une famille $(\varphi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}^+(\Omega , R)$ bornée, telle que $[h_i , \ell_i] = \varphi_i[h , \ell]$. Soit $\varphi = \sup_i \varphi_i$, alors $\varphi[h , \ell] = \sup_i [h_i , \ell_i]$. Si maintenant μ est une mesure normale telle que $\mu \leq [h , \ell]$, alors $\mu = \varphi[h , \ell] = [\varphi h , \ell]$.

THÉORÈME 7 (EDWARDS). - *Toute mesure normale est absolûment continue par rapport à une mesure spectrale.*

Démonstration. - Pour toute φ continue sur Ω , il existe une mesure spectrale $[h , \ell]$ telle que $[h , \ell](\varphi) \neq 0$; il suffit, en effet, de choisir un $h \in B_\varphi^+$ et un $\ell \in L^+$ tels que $\langle h , \ell \rangle \neq 0$. Ceci entraîne que la réunion des supports des mesures spectrales sur Ω est dense dans Ω (donc il est hyperstonien), et que le spectre de $[H , L]$ est Ω , donc la bande engendrée par $[H , L]$ est égale à M_n .

THÉORÈME 8. - *Si le dual normal de* L *est identique à* H , *alors* $\widetilde{N}$ *est identique au sous-cône de* $\mathcal{D}^+(\Omega , \bar{R})$, *constitué par les fonctions intégrables, pour toute mesure spectrale que nous désignerons par* $L^1[H , L]$; *on a, de plus,*

$$\widetilde{N} = L^1[H , L] = \bigcap_p L^p[H , L] .$$

Démonstration. - Toute fonction $\varphi \in \widetilde{N}$ est intégrable ; on pose

$$[h \, , \, \ell] \, (\varphi) = \langle \varphi h \, , \, \ell \rangle \, .$$

Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{Q}^+(\Omega \, , \overline{R})$,

$$[h \, , \, \ell] \, (\varphi) = \sup\{ \langle \varphi' h \, , \, \ell \rangle \; ; \; \varphi' \in \mathcal{C}^+(\Omega \, , \overline{R}) \, , \; \varphi' \leq \varphi\} \, ,$$

et l'on définit φh comme étant la forme linéaire normale sur L , valant $[h \, , \, \ell] \, (\varphi)$ en chaque point $\ell \in L^+$. De plus, on a

$$[h \, , \, \ell] \, (\varphi) = [h \, , \, \varphi\ell] \, (1) \; ;$$

comme $[h \, , \, \varphi\ell] \, (\varphi) \leq \infty$, on aura $[h \, , \, \ell] \, (\varphi^2) \leq + \infty$, donc $\varphi \in L^2[H \, , \, L]$, donc à chaque $L^p[H \, , \, L]$.

Remarque 9. - Supposons qu'il existe un opérateur normal $S : H \to L$, tel que $S(B) \subset (B^0)^\perp$ pour toute bande B de H , alors, s'il existe h tel que $H = B_h$, H est isomorphe pour l'ordre à $L^2(\Omega \, , [h \, , Sh])$, et, sinon, H est isomorphe pour l'ordre à $L^2(\Omega \, , \mu)$, où μ est "somme" de mesures spectrales de ce type. On a, pour tout $h \in H$, $\langle h \, , Sh \rangle \geq 0$, et, si $\varphi \in \mathcal{Q}^+(\Omega \, , \overline{R})$, $S(\varphi h) = \varphi S(h)$.

Dans le cas où $H = B_h$, tout $h \in H$ s'écrit $h = \varphi h_0$ avec $\varphi \in \mathcal{Q}^+(\Omega \, , \overline{R})$, donc

$$\langle h \, , Sh \rangle = \langle \varphi h_0 \, , \varphi Sh_0 \rangle = [h_0 \, , Sh_0] \, (\varphi^2) \; ;$$

ainsi $\varphi \in L^2(\Omega \, , [h_0 \, , Sh_0])$, donc H s'envoie dans $L^2(\Omega \, , [h_0 \, , Sh_0])$, il en sera de même pour L , ce qui montre que H et L sont isomorphes à $L^2(\Omega \, , [h_0 \, , Sh_0])$. Dans le cas général, H est somme d'une famille maximale de bandes $B_{h_{i_0}}$ deux à deux étrangères ; notons $(X \, , \mu)$ l'espace mesuré, somme des espaces

$$(B_{h_{i_0}} \, , [h_{i_0} \, , Sh_{i_0}]) \, ,$$

alors H s'envoie dans $L^2(X \, , \mu)$, il en est de même pour L , donc ils sont tous les deux isomorphes à $L^2(X \, , \mu)$.

Remarque 10 (Une démonstration du théorème de Radon-Nykodim). - Soient X un compact stonien, et μ une mesure normale sur X , telle que le support de μ soit égal à X . (C'est la situation générale des espaces mesurés avec une mesure bornée, d'après le théorème de représentation de Kakutani.) La bande B_μ est un espace de type L^1 de Kakutani, donc elle est isomorphe à $L^1(\Omega \, , \nu)$, où Ω est le spectre de B_μ . Nous nous proposons de montrer que $\Omega = X$, donc que $B_\mu = L^1(X \, , \nu)$. Nous désignerons par I_μ^{*n} le dual normal de l'idéal d'ordre I_μ engendré par μ . Rappelons un résultat de MOKOBODSKI [6] :

1° I_μ est identique à $(I_\mu^{*n})^{*n}$;

2° L'application $\ell \to \langle |\ell| , \mu\rangle$ est une norme sur I_μ^{*n}, pour laquelle il est complet ;

3° $I_\mu = (I_\mu^{*n})'$.

Comme $\mathcal{C}(X)$ est en dualité séparante avec I_μ, il est faiblement dense dans I_μ^{*n}, donc, d'après 2°, on a $I_\mu^{*n} = L^1(X , \mu)$, mais I_μ et I_μ^{*n} ont le même spectre, donc B_μ et $L^1(X , \nu)$ ont le même spectre.

4. Application aux isomorphies d'ordre des espaces L^p .

Une isomorphie d'ordre d'un espace complètement réticulé H, induit une isomorphie de l'algèbre de Boole des bandes de H, donc une homéomorphie du spectre Ω de H :

THÉORÈME 11. - Soient $(X , \mathcal{A} , \mu)$ un espace mesuré, $H = L^p(X , \mathcal{A} , \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et T une isomorphie d'ordre de H. Alors T s'écrit d'une manière unique, $T = \mathcal{H} \circ \mathfrak{I}$, où $\mathfrak{I}$ est une isométrie positive de H, et $\mathcal{H}$ un opérateur de multiplication par un élément de $L_+^\infty(X , \mathcal{A} , \mu)$.

Démonstration. - Supposons qu'il existe un élément dont la bande engendrée soit H ; on sait, grâce au théorème de représentation de Kakutani [4], que H est isomorphe à un $L^p(\Omega , \nu)$, où Ω est le spectre de H, et ν est une mesure normale sur Ω. Soit τ l'homéomorphie de Ω induite par T, et remarquons que ν et $\tau(\nu)$ ont les mêmes ensembles négligeables (ce sont les ensembles rares de Ω), donc $\tau(\nu) = f.\nu$ avec $f \in L_+^1(\Omega , \nu)$. Soit $I : g \to f^{1/p}(g \circ \tau^{-1})$; c'est une isométrie positive de H, et l'on remarque que $\mathcal{H} = T \circ I$ est un opérateur qui conserve les bandes, donc, d'après la proposition 5, c'est le produit par un élément de L_+^∞, et l'on a bien $T = \mathcal{H} \circ \mathfrak{I}$.

Dans le cas où il n'existe pas d'élément dont la bande engendrée soit H, on remarque que, pour tout $h \in H$, la bande engendrée par $\{T^n h\}_{n \in Z}$ est engendrée par

$$h' = \sum \frac{1}{2^{|n|}} \frac{T^n(h)}{\|T^n(h)\|} .$$

La bande $B_{h'}$ est stable par T, ainsi que sa bande supplémentaire, il existe donc (ZORN) une famille maximale de telles bandes deux à deux étrangères telles que $H = \bigoplus B_{h'}$, et l'on sait que chaque $B_{h'}$ est isomorphe à un $L^p(\Omega_{h'} , \nu_{h'})$; or, d'après ce qui précède, la restriction de T à $B_{h'}$ s'écrit $T_{B_{h'}} = \mathcal{H}_{h'} \circ \mathfrak{I}_{h'}$, donc, sur $\bigoplus B_{h'}$, T s'écrit $\bigoplus \mathcal{H}_{h'} \circ \mathfrak{I}_{h'}$. Soit $\mathfrak{I} = \bigoplus \mathfrak{I}_{h'}$; $\mathfrak{I}$ est une isométrie sur $\bigoplus B_{h'}$ qui se prolonge à H par une isométrie (de même nom), mais alors

$T \circ \mathfrak{J}^{-1}$ est un opérateur qui conserve les bandes de H , c'est donc un opérateur de multiplication par un élément de L^∞_+ .

5. Les isométries des espaces L^p , $p \neq 2$.

L'étude des isométries des espaces L^p a été entreprise par BANACH [2], nous la reprenons pour mettre en évidence son rapport avec l'étude des isomorphies d'ordre.

Rappelons que l'espace est "somme" d'une famille maximale de bandes engendrées par un élément, deux à deux étrangères, et qu'on ramène l'étude de l'isométrie à celle de sa trace sur une bande, par des arguments semblables à ceux utilisés dans le théorème 11.

LEMME 12. - Si T est une isométrie de $L^p(X , \mathfrak{A} , \mu)$, si $f \in L^p$, $f \geq 0$, et $T(f) \geq 0$, alors T est positive sur la bande engendrée par f .

Démonstration. - On observe que $T\{g \geq 0 ;\ g \leq f\} \subset \{g \geq 0 ;\ g \leq Tf\}$, car les points extrémaux du second convexe contiennent ceux du premier.

Il résulte de ce lemme que T envoie un ensemble solide (c'est-à-dire qui contient, avec tout élément, tous les éléments dont la valeur absolue est plus petite que la valeur absolue de celui-ci) sur un ensemble solide, donc un idéal d'ordre sur un idéal d'ordre.

Soient donc B_e la bande engendrée par $e \geq 0$, et S_e l'isométrie de $T(B_e)$ consistant en la multiplication par $\chi_{\{T(e)^+ \neq 0\}} - \chi_{\{T(e)^- \neq 0\}}$ (χ_A désigne la fonction caractéristique de A). Posons $T' = S_e \circ T$; on voit que T' est une isométrie positive sur B_e .

Suite à l'ensemble des remarques précédentes, on peut supposer que T est positif sur B_e , mais alors $T(B_e)$ sera réticulé. Désignons par $\widetilde{B}_e$ et $\widetilde{T(B_e)}$ les représentations de Kakutani [5] de B_e et $T(B_e)$, et par $\widetilde{T}$ l'opérateur induit par T ; $\widetilde{T}$ est une isomorphie d'ordre $\widetilde{B}_e \to \widetilde{T(B_e)}$, qui transforme 1 en 1 ; on a donc $\widetilde{T(f)} = f \circ \tau$ pour tout $f \in B_e$, où τ est une homéomorphie des spectres. Si l'on désigne par Φ l'opérateur $B_e \to T(B_e)$ induit par τ , on aura, pour tout $f \in B_e$, $T(f) = T(e)\ \Phi(f)$. On peut alors énoncer :

A toute isométrie de $H = L^p(X , \mathfrak{A} , \mu)$, correspond un isomorphisme U de l'algèbre de Boole des classes d'ensembles mesurables de X , tel que $T(f) = h . \Phi_U(f)$, où Φ_U est l'opérateur induit par U sur H , et h est une "fonction" sur X vérifiant $U^{-1}(\mu) = |h(x)|^p\ \mu$.

Remarque 13. - Si X est compact, on démontre qu'une isométrie T de $L^p(X)$, qui transforme fonction continue en fonction continue, s'écrit $T(f) = h . f \circ \varphi$

pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, où φ est une application de $\{x \in X \, ; \; h(x) = T(1) \neq 0\}$ dans X . La démonstration peut se faire en remarquant qu'une isométrie est "presque" multiplicative ; $\frac{T(fg)}{T(1)} = \frac{T(f)}{T(1)} \cdot \frac{T(g)}{T(1)}$ quels que soient f et g .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (Ichiro). - On ordered topological linear spaces, Proceedings of the international Symposium on linear spaces [1960. Jérusalem], p. 14-23. - Jerusalem, Jerusalem Academic Press ; Oxford, Pergamon Press, 1961.

[2] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Z. Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1932 (Monografje matematyczne, 1).

[3] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chapitre 2. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[4] EDWARDS (D. A.) and IONESCU TULCEA (C. T.). - Some remarks on commutative algebras of operators on Banach spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 93, 1959, p. 541-551.

[5] KRIVINE (Jean-Louis). - Sous-espaces et cônes convexes dans les espaces L_p, Thèse Sc. math. Paris, 1967.

[6] MOKOBODSKI (Gabriel). - Espaces de Riesz complètement réticulés et ensembles équicontinus de fonctions harmoniques, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66, n° 6, 8 p.

[7] NAKANO (Hidegorô). - Modern spectral theory. - Tokyo, Maruzen Company, 1950 (Tokyo mathematical Book Series, 2).

(Texte reçu le 25 novembre 1970)

Marouan AJLANI
107 rue de Trivaux
92 - CLAMART