Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Haïm Brezis

Prolongement d'applications lipschitziennes et de semi-groupes de contractions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 19, 9 p.

21 mai 1970

PROLONGEMENT D'APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES ET DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS

par Haïm BREZIS

Dans la première partie de cet exposé, on considère une application f définie sur un sous-ensemble D d'un espace métrique X, à valeurs dans un espace normé Y, et vérifiant

(1) $\|f(x) - f(x')\| \leqslant k d^{\alpha}(x, x')$, $\forall x, x' \in D$, avec $0 < \alpha \leqslant 1$, $k > 0$.

On montre que, sous certaines hypothèses, il existe un prolongement $\tilde{f} : X \to Y$ de f vérifiant (1) sur X (avec les mêmes constantes k et α).

Dans la seconde partie, on se restreint au cas où $X = Y = H$ est un espace de Hilbert. Soient D un sous-ensemble de H, et une famille $S(t)$ de contractions de D dans D (i. e. (1) est vérifiée avec $k = \alpha = 1$), dépendant d'un paramètre $t \geqslant 0$, et vérifiant une condition de semi-groupe. On cherche à prolonger $S(t)$ de manière à préserver à la fois la propriété de semi-groupe et de contraction.

1. Prolongement d'applications lipschitziennes et höldériennes.

Nous commençons par un des résultats essentiels.

THÉORÈME 1. - *Soient X et Y deux espaces de Hilbert, et soit $f : D \subset X \to Y$ vérifiant*

(2) $|f(x) - f(x')|_Y \leqslant k|x - x'|_X^{\alpha}$, $\forall x, x' \in D$, *avec* $0 < \alpha \leqslant 1$ *et* $k > 0$.

Alors il existe $\tilde{f} : X \to Y$ *vérifiant* (2) *sur* X, *et telle que* $\tilde{f} = f$ *sur* D. *De plus, on peut choisir* $\tilde{f}$ *de sorte que* $\tilde{f}(X) \subset \overline{\text{conv}}\, f(D)$.

Remarque. - Lorsque $\alpha = 1$ (f lipschitzien), ce résultat est dû à KIRSZBRAUN [8] dans le cas où X et Y sont de dimensions finies, et à VALENTINE [13] dans le cas général. Lorsque $\alpha < 1$ (f höldérien), le théorème 1 est dû à MICKLE [10] dans le cas où X est de dimension finie ; il a été étendu au cas général indépendamment par MINTY [11] et HAYDEN-WELLS [5]. Nous suivons ici la démonstration de MINTY.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la suite.

LEMME 1 (min max de Von Neumann). - Soient A , $B \subset \mathbb{R}^n$ deux convexes compacts, et soit $\Phi(\lambda , \mu)$ une fonction continue sur $A \times B$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ soit convexe et $\mu \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ soit concave. Alors il existe $\lambda^0 \in A$ et $\mu^0 \in B$ vérifiant

$$\Phi(\lambda^0 , \mu) \leqslant \Phi(\lambda^0 , \mu^0) \leqslant \Phi(\lambda , \mu^0) , \qquad \forall \lambda \in A , \ \forall \mu \in B .$$

On trouvera une démonstration très élémentaire, due à SHIFFMAN, de ce lemme, dans le livre de KARLIN [6].

LEMME 2 (SCHOENBERG). - Soient $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 , 2 , \dots , n$, avec $\mu_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Soient $x_i \in X$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (X Hilbert), et soit $0 \leqslant p \leqslant 2$. Alors on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^p \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^p \quad . \tag{3}$$

Démonstration. - Si $0 \leqslant p \leqslant 1$, l'inégalité (3) est évidente, puisque

$$|x_i - x_j|^p \leqslant |x_i|^p + |x_j|^p \quad .$$

Dans le cas où $p = 2$, l'inégalité (3) est immédiate, car

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j (x_i , x_j)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 - 2 \Big| \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Big|^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2 .$$

Lorsque $1 < p < 2$, on procède par interpolation, autrement dit, on utilise le théorème de convexité de M. Riesz. On suppose dans la suite que $\mu_i > 0$, $i = 1 , 2 , \dots , n$. Soit E_p l'espace des suites $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $x_i \in X$, muni de la norme $\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^p\right)^{1/p}$, et soit F_p l'espace des suites $\{x_{ij}\}_{1 \leqslant i , j \leqslant n}$ muni de la norme $\left(\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |x_{ij}|^p\right)^{1/p}$. Soit T l'application linéaire de E_p dans F_p , qui à $x = \{x_i\}$ fait correspondre $Tx = \{x_i - x_j\}$, et soit $\|T\|_p$ sa norme.

D'après le théorème de convexité de M. Riesz, on a $\|T\|_p \leqslant \|T\|_1^{1-\theta} \|T\|_2^{\theta}$, avec $\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$.

Comme $\|T\|_1 \leqslant 2$ et $\|T\|_2 \leqslant \sqrt{2}$, on a $\|T\|_p \leqslant 2^{1-\theta/2} = 2^{1/p}$. D'où (3).

On trouvera une démonstration directe, due à FOX, de l'inégalité (3) dans MINTY [11].

Démonstration du théorème 1. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = 1$. Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal $\widetilde{f}$ de f, vérifiant (2) sur $D(\widetilde{f})$. Pour montrer que $D(\widetilde{f}) = X$, on raisonne par l'absurde, et on suppose donc que $D(\widetilde{f}) \neq X$. Soit alors $x_0 \notin D(\widetilde{f})$. Par suite, on a

$$\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) , |x - x_0|^{\alpha}] = \emptyset$$

(où $B(y , r)$ désigne la boule fermée de centre y et de rayon r), car s'il existait $y_0 \in \bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) , |x - x_0|^{\alpha}]$, on pourrait prolonger $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(x_0) = y_0$, ce qui contredirait la maximalité de $\widetilde{f}$.

Soient alors $x_1 , x_2 , \ldots , x_n \in D(\widetilde{f})$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} B[\widetilde{f}(x_i) , |x_i - x_0|^{\alpha}] = \emptyset .$$

On pose

$$P_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n , \ \lambda_i \geqslant 0 , \ 1 \leqslant i \leqslant n \ \text{ et } \ \sum \lambda_i = 1\} ,$$

et on définit sur $P_n \times P_n$ la fonction

$$\Phi(\lambda , \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i [|y_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j|^2 - |x_i - x_0|^{2\alpha}] , \qquad \text{où } y_i = \widetilde{f}(x_i) .$$

Il est clair que Φ est continue sur $P_n \times P_n$, et que $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ est convexe, $\mu \longmapsto \Phi(\lambda , \mu)$ est concave.

D'après le lemme 1, il existe $\lambda^0 \in P_n$ et $\mu^0 \in P_n$ tels que

(4) $$\Phi(\lambda^0 , \mu) \leqslant \Phi(\lambda^0 , \mu^0) \leqslant \Phi(\lambda , \mu^0) , \qquad \forall \lambda , \mu \in P_n .$$

Montrons que $\Phi(\mu , \mu) \leqslant 0$, $\forall \mu \in P_n$. En effet, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j (y_i , y_j) + |\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i |y_i|^2 - |\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |y_i - y_j|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha} ,$$

puisque $\widetilde{f}$ vérifie (2). Par suite,

$$\Phi(\mu\ ,\ \mu) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i\, \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i - x_0|^{2\alpha} \leqslant 0 \quad ,$$

grâce au lemme 2 (appliqué à $x_i - x_0$ au lieu de x_i). Reportant $\lambda = \mu^0$ dans (4), il vient

$$\Phi(\lambda^0\ ,\ \mu) \leqslant 0\ , \qquad \forall\ \mu \in P_n\ .$$

Il en résulte que

$$|y_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0\, y_j|^2 \leqslant |x_i - x_0|^{2\alpha}\ , \qquad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n\ .$$

Posant $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0\, y_j$, on a

$$y_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} B[\tilde{f}(x_i)\ ,\ |x_i - x_0|^{\alpha}]\ ,$$

ce qui conduit à une contradiction.

Enfin, il est clair que l'on peut projeter $\tilde{f}$ sur $\overline{\text{conv}}\ f(D)$, et obtenir ainsi un prolongement à valeurs dans $\overline{\text{conv}}\ f(D)$.

En dehors des espaces de Hilbert, une autre classe d'espaces joue un rôle important dans les problèmes de prolongement. Soit ℓ_n^∞ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ (plus généralement, on pourrait considérer l'espace $C(K)$ où K est un compact extrêmement discontinu).

THÉORÈME 2. - Soit X un espace métrique, et soit $Y = \ell_n^\infty$. Soient $D \subset X$, et $f : D \to Y$ vérifiant

(5) $\quad \|f(x) - f(x')\| \leqslant k d^{\alpha}(x\ ,\ x')\ , \quad \forall\ x\ ,\ x' \in D\ ,$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$ et $k > 0$.

Alors il existe une application $\tilde{f}$ de X dans Y , vérifiant (5) sur X , et telle que $\tilde{f} = f$ sur D .

Remarque. - En général, il n'existe pas de prolongement de f à valeurs dans $\overline{\text{conv}}\ f(D)$ (sauf si $n \leqslant 2$).

Démonstration du théorème 2. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = \alpha = 1$, puisque $k d^{\alpha}(x\ ,\ x')$ définit une nouvelle métrique.

Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal $\tilde{f}$ de f vérifiant (5) sur $D(\tilde{f})$. Pour montrer que $D(\tilde{f}) = X$, on raisonne par l'absurde. Supposons donc que $D(\tilde{f}) \neq X$, et soit $x_0 \notin D(\tilde{f})$. On a

$$\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) , d(x , x_0)] = \emptyset \quad .$$

D'autre part,

$$\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} B[\widetilde{f}(x) , d(x , x_0)] \neq \emptyset \quad .$$

En effet, comme $Y = \ell_n^\infty$, il suffit de montrer que l'intersection des projections de ces boules sur chacune des composantes n'est pas vide. Autrement dit, il faut montrer que l'intersection des intervalles $\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} I[\widetilde{f}_k(x) , d(x , x_0)] \neq \emptyset$. Or les intersections deux à deux de ces intervalles ne sont pas vides, puisque

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leqslant \|f(x) - f(x')\| \leqslant d(x , x') \leqslant d(x , x_0) + d(x' , x_0) \quad ,$$

et par suite

$$\bigcap_{x \in D(\widetilde{f})} I[\widetilde{f}_k(x) , d(x , x_0)] \neq \emptyset \quad .$$

On a donc une contradiction.

Il est intéressant de noter que les deux classes d'espaces considérés (Hilbert et ℓ_n^∞) sont à "peu près" les seules à posséder la propriété de prolongement pour des applications lipschitziennes. Plus précisément, les deux résultats suivants ont été démontrés par GRÜNBAUM [4] et SCHÖNBECK [12].

THÉORÈME 3. - *Soient X et Y deux espaces de Banach, avec Y uniformément convexe. Supposons que le couple (X , Y) vérifie la propriété suivante :*

(6) *Pour tout $D \subset X$, et toute application $f : D \rightarrow Y$ telle que*

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant \|x - x'\| \quad , \qquad \forall\, x , x' \in D \quad ,$$

il existe $\widetilde{f} : X \rightarrow Y$ qui prolonge f , et telle que

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\| \leqslant \|x - x'\| \quad , \qquad \forall\, x , x' \in X \quad .$$

Alors X et Y sont des espaces de Hilbert.

THÉORÈME 4. - *Soit X un espace de dimension n , tel que le couple (X , X) vérifie la propriété (6). Alors X est, ou bien un espace de Hilbert, ou bien isométrique à ℓ_n^∞ (autrement dit, la boule unité de X est, ou bien un ellipsoïde, ou bien un parallélogramme).*

2. Prolongement de semi-groupes de contractions.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, et soit $D \subset H$.

Un semi-groupe continu de contractions sur D , est une famille d'applications de

D dans D, dépendant d'un paramètre $t \geq 0$, et vérifiant

(7) $$S(0) = I \ ,$$

(8) $$S(t_1 + t_2) = S(t_1)\, S(t_2) \ , \qquad \forall\, t_1 \, , \, t_2 \geq 0 \ ,$$

(9) $$\lim_{t \to 0} |S(t)x - x| = 0 \ , \qquad \forall\, x \in D \ ,$$

(10) $$|S(t)x - S(t)x'| \leq |x - x'| \ , \qquad \forall\, x \, , \, x' \in D \, , \ \forall\, t \geq 0 \ .$$

Problème. - Peut-on prolonger $S(t)$ à un ensemble plus grand que D de manière à préserver les propriétés (7), (8), (9) et (10) ?

En général, on ne peut pas prolonger $S(t)$ à l'espace H tout entier ; par contre on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5 (KOMURA [9]). - *On pose* $C = \overline{\text{conv}}\, D$. *Etant donné un semi-groupe continu de contractions* $S(t)$ *sur* D , *il existe un semi-groupe continu de contractions* $\widetilde{S}(t)$ *sur* C , *tel que*

$$\widetilde{S}(t)x = S(t)x \ , \qquad \forall\, t \geq 0 \, , \ \forall\, x \in D \ .$$

Le théorème 5 est particulièrement intéressant du fait que les semi-groupes continus de contractions sur les ensembles convexes sont bien connus depuis les travaux de KOMURA [9], KATO [7], CRANDALL-PAZY [3], et BROWDER [2]. Ils sont liés à la résolution d'équations d'évolution comprenant un terme maximal monotone, et que nous décrivons ici brièvement.

Soit A une application multivoque de H dans H, et soit

$$D(A) = \{x \in H \ ; \ \ Ax \neq \emptyset\} \ .$$

On dit que A est *monotone*, si

$$(y_1 - y_2 \, , \, x_1 - x_2) \geq 0 \ , \qquad \forall\, y_1 \in Ax_1 \ , \ \forall\, y_2 \in Ax_2 \ ,$$

et *maximale monotone*, s'il n'existe aucun graphe monotone prolongeant strictement A . Une caractérisation des opérateurs maximaux monotones, due à MINTY, affirme que A est maximale monotone si, et seulement si, $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$; ceci permet alors de définir la résolvante $(I + \lambda A)^{-1}$ de A, qui est une contraction de H dans H.

On montre aussi que si A est maximale monotone, $\overline{D(A)}$ est convexe.

Par ailleurs, pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u(t)$ lipschitzienne, unique solution de l'équation d'évolution

$$u(t) \in D(A) \ , \qquad \forall\ t \geqslant 0 \ ,$$

$$- \frac{du}{dt} \in Au \quad \text{p.-p. sur }]0 \ , + \infty[\ ,$$

$$u(0) = u_0 \ .$$

L'application $u_0 \longmapsto u(t)$ définit un semi-groupe continu de contractions sur $D(A)$, que l'on prolonge par continuité à $\overline{D(A)}$. Le semi-groupe obtenu est désigné par $S(t)$, et vérifie (7), (8), (9), (10) ; on dit que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $-A$.

Réciproquement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$ sur un convexe fermé C, il existe un graphe A maximal monotone unique tel que $\overline{D(A)} = C$, et $S(t)$ coïncide avec le semi-groupe engendré par $-A$.

Il y a donc une correspondance bijective entre les graphes maximaux monotones d'une part, et les semi-groupes continus de contractions sur des convexes d'autre part.

En collaboration avec A. PAZY [1], nous avons simplifié la démonstration du théorème 5 qui était très technique (14 lemmes !), tout en dégageant un résultat plus général.

L'idée est la suivante : Pour chaque $t \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{S}(t)$ l'ensemble de toutes les contractions prolongeant $S(t)$ à $C = \overline{\text{conv}}\ D$, i. e.

(11) $\quad \mathbb{S}(t) = \{T : C \to C \ , \ T \text{ est une contraction et } Tx = S(t)x \ , \ \forall\ x \in D\}$.

On obtient ainsi une famille de contractions de C dans C, qui vérifie "essentiellement" les propriétés d'un semi-groupe.

Plus précisément, on a

(12) $$\mathbb{S}(0) = I \ , \qquad \mathbb{S}(t) \neq \emptyset \ , \quad \forall\ t \geqslant 0 \ ,$$

(13) $$T_1 T_2 \in \mathbb{S}(t_1 + t_2) \ , \qquad \forall\ T_1 \in \mathbb{S}(t_1) \ , \ \forall\ T_2 \in \mathbb{S}(t_2) \ ,$$

(14) $$\forall\ x \in C \ , \ \forall\ \varepsilon > 0 \ , \ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que, si } 0 < t < \delta \ , \text{ on a } |Tx - x| < \varepsilon \ , \ \forall\ T \in \mathbb{S}(t) \ ,$$

(15) $$|Tx - Tx'| \leqslant |x - x'| \ , \qquad \forall\ x \ , x' \in C \ , \ \forall\ T \in \mathbb{S}(t) \ .$$

Les propriétés (12), (13), (14), (15) définissent ce qu'on appelle un semi-groupe multivoque sur C. Il est naturel de poser le problème suivant.

<u>Problème</u>. - Etant donné un semi-groupe multivoque sur un convexe fermé C, peut-on trouver une sélection de $\mathbb{S}(t)$ qui constitue un semi-groupe continu de contractions ? Autrement dit, existe-t-il un semi-groupe continu de contractions $S(t)$

sur C , tel que $S(t)x \in \overline{\bigcup_{T\in\mathbb{S}(t)} Tx}$, $\forall\, x \in C$, $\forall\, t \geqslant 0$?

Dans le cas général, ce problème est ouvert, mais moyennant des hypothèses supplémentaires, la réponse est affirmative. Pour cela, nous introduisons la définition suivante :

On dit que $\mathbb{S}(t)$ est fortement r-convexe si, pour toute suite finie

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n \in H ,$$

pour tout $\alpha > 0$, et tout $t > 0$, la fermeture de l'ensemble

$$\bigcup_{T\in\mathbb{S}(t)} [(I + \alpha(I - T))^{-1} x_1 , (I + \alpha(I - T))^{-1} x_2 , \dots , (I + \alpha(I - T))^{-1} x_n]$$

est convexe dans H^n (on notera que, si T est une contraction, alors $(I+\alpha(I-T))^{-1}$ définit une contraction de C dans C).

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> $\mathbb{S}(t)$ <u>un semi-groupe multivoque sur le convexe fermé</u> C . <u>On suppose que, ou bien</u> C <u>est localement compact, ou bien</u> $\mathbb{S}(t)$ <u>est fortement r-convexe.</u>

<u>Alors il existe un semi-groupe</u> $S(t)$ <u>continu, de contractions sur</u> C , <u>tel que</u>

$$S(t)x \in \overline{\bigcup_{T\in\mathbb{S}(t)} Tx} , \qquad \forall\, t \geqslant 0 , \ \forall\, x \in C .$$

<u>Remarque</u>. - On montre que le semi-groupe multivoque $\mathbb{S}(t)$, décrit en (11), est fortement r-convexe, de sorte que le théorème 5 résulte du théorème 6.

<u>Principe de la démonstration du théorème</u> 6. - Soit ω l'ensemble des couples (t , T) , $t \geqslant 0$, $T \in \mathbb{S}(t)$. On montre qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur ω , convergeant vers 0 (i. e. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F \in \mathcal{U}$ tel que $t < \varepsilon$, $\forall\, (t , T) \in F$), pour lequel la limite $\lim_{\mathcal{U}} \left(I + \frac{\lambda}{t}(I - T)\right)^{-1} x$ existe, $\forall\, \lambda > 0$, $\forall\, x \in C$; on désigne par $J_\lambda x$ la limite (ce point est facile à établir lorsque C est localement compact, et plus délicat si l'on suppose que $\mathbb{S}(t)$ est fortement r-convexe). On prouve ensuite qu'il existe un graphe A maximal monotone, tel que

$$J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x , \qquad \forall\, \lambda > 0 , \ \forall\, x \in C ,$$

et que $\overline{D(A)} = C$. On montre enfin que le semi-groupe engendré par $-A$ constitue une sélection de $\mathbb{S}(t)$.

On trouvera les détails de la démonstration dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREZIS (H.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions on convex sets, J. funct. Anal. (à paraître).

[2] BROWDER (F.). - Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Nonlinear Funct. Anal. [1968. Chicago]. - Providence, American mathematical Society (à paraître).

[3] CRANDALL (M.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. funct. Anal., t. 3, 1969, p. 376-418.

[4] GRÜNBAUM (B.). - On a theorem of Kirszbraun, Bull. Res. Counc. Israel, t. 17 F, 1958, p. 129-132.

[5] HAYDEN (T.) and WELLS (J.). - On the extension of Lipschitz-Hölder maps of order α (à paraître).

[6] KARLIN (S.). - Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. 1.- Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1959.

[7] KATO (T.). - On the generators of nonlinear semigroups, Summer Inst. Global Anal., Berkeley, 1968.

[8] KIRSZBRAUN (M.). - Über die zusammenziehenden und lipschitzen Transformationen, Fund. Math., t. 22, 1934, p. 77-108.

[9] KOMURA (Y.). - Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Jap., t. 21, 1969, p. 375-402.

[10] MICKLE (E.). - On the extension of a transformation, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 160-164.

[11] MINTY (G.). - On the extension of Lipschitz, Hölder and monotone functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 76, 1970, p. 334-339.

[12] SCHÖNBECK (S.). - On the extension of lipschitzian maps, Ark. för Mat., t. 7, 1967, p. 201-209.

[13] VALENTINE (F.). - A Lipschitz condition preserving extension for a vector function, Amer. J. of Math., t. 67, 1945, p. 83-93.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Haïm BREZIS
Ch. Rech. CNRS
28 rue Berthollet
75 - PARIS 05