

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

HAÏM BREZIS

Prolongement d'applications lipschitziennes et de semi- groupes de contractions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 19, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A9_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT D'APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES
ET DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS

par Haïm BREZIS

Dans la première partie de cet exposé, on considère une application f définie sur un sous-ensemble D d'un espace métrique X , à valeurs dans un espace normé Y , et vérifiant

$$(1) \quad \|f(x) - f(x')\| \leq kd^\alpha(x, x'), \quad \forall x, x' \in D, \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1, \quad k > 0.$$

On montre que, sous certaines hypothèses, il existe un prolongement $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ de f vérifiant (1) sur X (avec les mêmes constantes k et α).

Dans la seconde partie, on se restreint au cas où $X = Y = H$ est un espace de Hilbert. Soient D un sous-ensemble de H , et une famille $S(t)$ de contractions de D dans D (i. e. (1) est vérifiée avec $k = \alpha = 1$), dépendant d'un paramètre $t > 0$, et vérifiant une condition de semi-groupe. On cherche à prolonger $S(t)$ de manière à préserver à la fois la propriété de semi-groupe et de contraction.

1. Prolongement d'applications lipschitziennes et höldériennes.

Nous commençons par un des résultats essentiels.

THÉOREME 1. - Soient X et Y deux espaces de Hilbert, et soit $f : D \subset X \rightarrow Y$ vérifiant

$$(2) \quad |f(x) - f(x')|_Y \leq k|x - x'|_X^\alpha, \quad \forall x, x' \in D, \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1 \text{ et } k > 0.$$

Alors il existe $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ vérifiant (2) sur X , et telle que $\tilde{f} = f$ sur D . De plus, on peut choisir \tilde{f} de sorte que $\tilde{f}(X) \subset \overline{\text{conv}} f(D)$.

Remarque. - Lorsque $\alpha = 1$ (f lipschitzien), ce résultat est dû à KIRSZBRAUN [8] dans le cas où X et Y sont de dimensions finies, et à VALENTINE [13] dans le cas général. Lorsque $\alpha < 1$ (f höldérien), le théorème 1 est dû à MICKLE [10] dans le cas où X est de dimension finie ; il a été étendu au cas général indépendamment par MINTY [11] et HAYDEN-WELLS [5]. Nous suivons ici la démonstration de MINTY.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la suite.

LEMME 1 (min max de Von Neumann). - Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux convexes compacts, et soit $\Phi(\lambda, \mu)$ une fonction continue sur $A \times B$, à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, \mu)$ soit convexe et $\mu \mapsto \Phi(\lambda, \mu)$ soit concave. Alors il existe $\lambda^0 \in A$ et $\mu^0 \in B$ vérifiant

$$\Phi(\lambda^0, \mu) \leq \Phi(\lambda^0, \mu^0) \leq \Phi(\lambda, \mu^0), \quad \forall \lambda \in A, \forall \mu \in B.$$

On trouvera une démonstration très élémentaire, due à SHIFFMAN, de ce lemme, dans le livre de KARLIN [6].

LEMME 2 (SCHOENBERG). - Soient $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, avec $\mu_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. Soient $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$ (X Hilbert), et soit $0 \leq p \leq 2$. Alors on a

$$(3) \quad \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^p \leq 2 \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i|^p.$$

Démonstration. - Si $0 \leq p \leq 1$, l'inégalité (3) est évidente, puisque

$$|x_i - x_j|^p \leq |x_i|^p + |x_j|^p.$$

Dans le cas où $p = 2$, l'inégalité (3) est immédiate, car

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^2 &= 2 \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j (x_i, x_j) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i|^2 - 2 \left| \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \right|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i|^2. \end{aligned}$$

Lorsque $1 < p < 2$, on procède par interpolation, autrement dit, on utilise le théorème de convexité de M. Riesz. On suppose dans la suite que $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Soit E_p l'espace des suites $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $x_i \in X$, muni de la norme $\left(\sum_{i=1}^n \mu_i |x_i|^p \right)^{1/p}$, et soit F_p l'espace des suites $\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ muni de la norme $\left(\sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |x_{ij}|^p \right)^{1/p}$. Soit T l'application linéaire de E_p dans F_p , qui à $x = \{x_i\}$ fait correspondre $Tx = \{x_i - x_j\}$, et soit $\|T\|_p$ sa norme.

D'après le théorème de convexité de M. Riesz, on a $\|T\|_p \leq \|T\|_1^{1-\theta} \|T\|_2^\theta$, avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$.

Comme $\|T\|_1 \leq 2$ et $\|T\|_2 \leq \sqrt{2}$, on a $\|T\|_p \leq 2^{1-\theta/2} = 2^{1/p}$. D'où (3).

On trouvera une démonstration directe, due à FOX, de l'inégalité (3) dans MINTY [11].

Démonstration du théorème 1. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = 1$. Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal \tilde{f} de f , vérifiant (2) sur $D(\tilde{f})$. Pour montrer que $D(\tilde{f}) = X$, on raisonne par l'absurde, et on suppose donc que $D(\tilde{f}) \neq X$. Soit alors $x_0 \notin D(\tilde{f})$. Par suite, on a

$$\bigcap_{x \in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x), |x - x_0|^\alpha] = \emptyset$$

(où $B(y, r)$ désigne la boule fermée de centre y et de rayon r), car s'il existait $y_0 \in \bigcap_{x \in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x), |x - x_0|^\alpha]$, on pourrait prolonger \tilde{f} en posant $\tilde{f}(x_0) = y_0$, ce qui contredirait la maximalité de \tilde{f} .

Soient alors $x_1, x_2, \dots, x_n \in D(\tilde{f})$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^n B[\tilde{f}(x_i), |x_i - x_0|^\alpha] = \emptyset.$$

On pose

$$P_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \text{ et } \sum \lambda_i = 1\},$$

et on définit sur $P_n \times P_n$ la fonction

$$\phi(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \mu_i \left[|y_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j|^2 - |x_i - x_0|^{2\alpha} \right], \quad \text{où } y_i = \tilde{f}(x_i).$$

Il est clair que ϕ est continue sur $P_n \times P_n$, et que $\lambda \mapsto \phi(\lambda, \mu)$ est convexe, $\mu \mapsto \phi(\lambda, \mu)$ est concave.

D'après le lemme 1, il existe $\lambda^0 \in P_n$ et $\mu^0 \in P_n$ tels que

$$(4) \quad \phi(\lambda^0, \mu) \leq \phi(\lambda^0, \mu^0) \leq \phi(\lambda, \mu^0), \quad \forall \lambda, \mu \in P_n.$$

Montrons que $\phi(\mu, \mu) \leq 0$, $\forall \mu \in P_n$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i |y_i - \sum_{j=1}^n \mu_j y_j|^2 &= \sum_{i=1}^n \mu_i |y_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j (y_i, y_j) + \left| \sum_{j=1}^n \mu_j y_j \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i |y_i|^2 - \left| \sum_{j=1}^n \mu_j y_j \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |y_i - y_j|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha}, \end{aligned}$$

puisque \tilde{f} vérifie (2). Par suite,

$$\varphi(\mu, \mu) \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j |x_i - x_j|^{2\alpha} - \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i - x_0|^{2\alpha} \leq 0,$$

grâce au lemme 2 (appliqué à $x_i - x_0$ au lieu de x_i). Reportant $\lambda = \mu^0$ dans (4), il vient

$$\varphi(\lambda^0, \mu) \leq 0, \quad \forall \mu \in P_n.$$

Il en résulte que

$$|y_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 y_j|^2 \leq |x_i - x_0|^{2\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Posant $y_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 y_j$, on a

$$y_0 \in \bigcap_{i=1}^n B[\tilde{f}(x_i), |x_i - x_0|^\alpha],$$

ce qui conduit à une contradiction.

Enfin, il est clair que l'on peut projeter \tilde{f} sur $\overline{\text{conv}} f(D)$, et obtenir ainsi un prolongement à valeurs dans $\overline{\text{conv}} f(D)$.

En dehors des espaces de Hilbert, une autre classe d'espaces joue un rôle important dans les problèmes de prolongement. Soit ℓ_n^∞ l'espace \mathbb{R}^n muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (plus généralement, on pourrait considérer l'espace $C(K)$ où K est un compact extrêmement discontinu).

THÉORÈME 2. - Soit X un espace métrique, et soit $Y = \ell_n^\infty$. Soient $D \subset X$, et $f : D \rightarrow Y$ vérifiant

$$(5) \quad \|f(x) - f(x')\| \leq k d^\alpha(x, x'), \quad \forall x, x' \in D, \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1 \text{ et } k > 0.$$

Alors il existe une application \tilde{f} de X dans Y , vérifiant (5) sur X , et telle que $\tilde{f} = f$ sur D .

Remarque. - En général, il n'existe pas de prolongement de f à valeurs dans $\overline{\text{conv}} f(D)$ (sauf si $n \leq 2$).

Démonstration du théorème 2. - Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que $k = \alpha = 1$, puisque $k d^\alpha(x, x')$ définit une nouvelle métrique.

Grâce au lemme de Zorn, on construit un prolongement maximal \tilde{f} de f vérifiant (5) sur $D(\tilde{f})$. Pour montrer que $D(\tilde{f}) = X$, on raisonne par l'absurde. Supposons donc que $D(\tilde{f}) \neq X$, et soit $x_0 \notin D(\tilde{f})$. On a

$$\bigcap_{x \in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x), d(x, x_0)] = \emptyset .$$

D'autre part,

$$\bigcap_{x \in D(\tilde{f})} B[\tilde{f}(x), d(x, x_0)] \neq \emptyset .$$

En effet, comme $Y = \ell_n^\infty$, il suffit de montrer que l'intersection des projections de ces boules sur chacune des composantes n'est pas vide. Autrement dit, il faut montrer que l'intersection des intervalles $\bigcap_{x \in D(\tilde{f})} I[\tilde{f}_k(x), d(x, x_0)] \neq \emptyset$. Or les intersections deux à deux de ces intervalles ne sont pas vides, puisque

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq \|f(x) - f(x')\| \leq d(x, x') \leq d(x, x_0) + d(x', x_0) ,$$

et par suite

$$\bigcap_{x \in D(\tilde{f})} I[\tilde{f}_k(x), d(x, x_0)] \neq \emptyset .$$

On a donc une contradiction.

Il est intéressant de noter que les deux classes d'espaces considérés (Hilbert et ℓ_n^∞) sont à "peu près" les seules à posséder la propriété de prolongement pour des applications lipschitziennes. Plus précisément, les deux résultats suivants ont été démontrés par GRÜNBAUM [4] et SCHÖNBECK [12].

THÉORÈME 3. - Soient X et Y deux espaces de Banach, avec Y uniformément convexe. Supposons que le couple (X, Y) vérifie la propriété suivante :

(6) Pour tout $D \subset X$, et toute application $f : D \rightarrow Y$ telle que

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|x - x'\| , \quad \forall x, x' \in D ,$$

il existe $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ qui prolonge f, et telle que

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leq \|x - x'\| , \quad \forall x, x' \in X .$$

Alors X et Y sont des espaces de Hilbert.

THÉORÈME 4. - Soit X un espace de dimension n, tel que le couple (X, X) vérifie la propriété (6). Alors X est, ou bien un espace de Hilbert, ou bien isométrique à ℓ_n^∞ (autrement dit, la boule unité de X est, ou bien un ellipsoïde, ou bien un parallélogramme).

2. Prolongement de semi-groupes de contractions.

Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , et soit $D \subset H$.

Un semi-groupe continu de contractions sur D, est une famille d'applications de

D dans D , dépendant d'un paramètre $t \geq 0$, et vérifiant

$$(7) \quad S(0) = I ,$$

$$(8) \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2) , \quad \forall t_1, t_2 \geq 0 ,$$

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} |S(t)x - x| = 0 , \quad \forall x \in D ,$$

$$(10) \quad |S(t)x - S(t)x'| \leq |x - x'| , \quad \forall x, x' \in D , \quad \forall t \geq 0 .$$

Problème. - Peut-on prolonger $S(t)$ à un ensemble plus grand que D de manière à préserver les propriétés (7), (8), (9) et (10) ?

En général, on ne peut pas prolonger $S(t)$ à l'espace H tout entier ; par contre on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5 (KOMURA [9]). - On pose $C = \overline{\text{conv}} D$. Etant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$ sur D , il existe un semi-groupe continu de contractions $\tilde{S}(t)$ sur C , tel que

$$\tilde{S}(t)x = S(t)x , \quad \forall t \geq 0 , \quad \forall x \in D .$$

Le théorème 5 est particulièrement intéressant du fait que les semi-groupes continus de contractions sur les ensembles convexes sont bien connus depuis les travaux de KOMURA [9], KATO [7], CRANDALL-PAZY [3], et BROWDER [2]. Ils sont liés à la résolution d'équations d'évolution comprenant un terme maximal monotone, et que nous décrivons ici brièvement.

Soit A une application multivoque de H dans H , et soit

$$D(A) = \{x \in H ; Ax \neq \emptyset\} .$$

On dit que A est monotone, si

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0 , \quad \forall y_1 \in Ax_1 , \quad \forall y_2 \in Ax_2 ,$$

et maximale monotone, s'il n'existe aucun graphe monotone prolongeant strictement A . Une caractérisation des opérateurs maximaux monotones, due à MINTY, affirme que A est maximale monotone si, et seulement si, $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$; ceci permet alors de définir la résolvante $(I + \lambda A)^{-1}$ de A , qui est une contraction de H dans H .

On montre aussi que si A est maximale monotone, $\overline{D(A)}$ est convexe.

Par ailleurs, pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u(t)$ lipschitzienne, unique solution de l'équation d'évolution

$$u(t) \in D(A) , \quad \forall t \geq 0 ,$$

$$-\frac{du}{dt} \in Au \quad \text{p.-p. sur }]0, +\infty[,$$

$$u(0) = u_0 .$$

L'application $u_0 \mapsto u(t)$ définit un semi-groupe continu de contractions sur $D(A)$, que l'on prolonge par continuité à $\overline{D(A)}$. Le semi-groupe obtenu est désigné par $S(t)$, et vérifie (7), (8), (9), (10); on dit que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $-A$.

Réciproquement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$ sur un convexe fermé C , il existe un graphe A maximal monotone unique tel que $\overline{D(A)} = C$, et $S(t)$ coïncide avec le semi-groupe engendré par $-A$.

Il y a donc une correspondance bijective entre les graphes maximaux monotones d'une part, et les semi-groupes continus de contractions sur des convexes d'autre part.

En collaboration avec A. PAZY [1], nous avons simplifié la démonstration du théorème 5 qui était très technique (14 lemmes!), tout en dégagant un résultat plus général.

L'idée est la suivante: Pour chaque $t \geq 0$, on désigne par $\mathcal{S}(t)$ l'ensemble de toutes les contractions prolongeant $S(t)$ à $C = \overline{\text{conv } D}$, i. e.

$$(11) \quad \mathcal{S}(t) = \{T : C \rightarrow C, T \text{ est une contraction et } Tx = S(t)x, \forall x \in D\} .$$

On obtient ainsi une famille de contractions de C dans C , qui vérifie "essentiellement" les propriétés d'un semi-groupe.

Plus précisément, on a

$$(12) \quad \mathcal{S}(0) = I, \quad \mathcal{S}(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \geq 0 ,$$

$$(13) \quad T_1 T_2 \in \mathcal{S}(t_1 + t_2), \quad \forall T_1 \in \mathcal{S}(t_1), \forall T_2 \in \mathcal{S}(t_2) ,$$

$$(14) \quad \forall x \in C, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que,}$$

$$\text{si } 0 < t < \delta, \text{ on a } |Tx - x| < \varepsilon, \forall T \in \mathcal{S}(t) ,$$

$$(15) \quad |Tx - Tx'| \leq |x - x'|, \quad \forall x, x' \in C, \forall T \in \mathcal{S}(t) .$$

Les propriétés (12), (13), (14), (15) définissent ce qu'on appelle un semi-groupe multivoque sur C . Il est naturel de poser le problème suivant.

Problème. - Etant donné un semi-groupe multivoque sur un convexe fermé C , peut-on trouver une sélection de $\mathcal{S}(t)$ qui constitue un semi-groupe continu de contractions? Autrement dit, existe-t-il un semi-groupe continu de contractions $S(t)$

sur C , tel que $S(t)x \in \overline{\bigcup_{T \in \mathcal{S}(t)} Tx}$, $\forall x \in C$, $\forall t \geq 0$?

Dans le cas général, ce problème est ouvert, mais moyennant des hypothèses supplémentaires, la réponse est affirmative. Pour cela, nous introduisons la définition suivante :

On dit que $\mathcal{S}(t)$ est fortement r -convexe si, pour toute suite finie

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in H,$$

pour tout $\alpha > 0$, et tout $t > 0$, la fermeture de l'ensemble

$$\bigcup_{T \in \mathcal{S}(t)} [(I + \alpha(I - T))^{-1} x_1, (I + \alpha(I - T))^{-1} x_2, \dots, (I + \alpha(I - T))^{-1} x_n]$$

est convexe dans H^n (on notera que, si T est une contraction, alors $(I + \alpha(I - T))^{-1}$ définit une contraction de C dans C).

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 6. - Soit $\mathcal{S}(t)$ un semi-groupe multivoque sur le convexe fermé C . On suppose que, ou bien C est localement compact, ou bien $\mathcal{S}(t)$ est fortement r -convexe.

Alors il existe un semi-groupe $\mathcal{S}(t)$ continu, de contractions sur C , tel que

$$S(t)x \in \overline{\bigcup_{T \in \mathcal{S}(t)} Tx}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Remarque. - On montre que le semi-groupe multivoque $\mathcal{S}(t)$, décrit en (11), est fortement r -convexe, de sorte que le théorème 5 résulte du théorème 6.

Principe de la démonstration du théorème 6. - Soit ω l'ensemble des couples (t, T) , $t \geq 0$, $T \in \mathcal{S}(t)$. On montre qu'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur ω , convergeant vers 0 (i. e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F \in \mathcal{U}$ tel que $t < \varepsilon$, $\forall (t, T) \in F$), pour lequel la limite $\lim_{\mathcal{U}} \left(I + \frac{\lambda}{t} (I - T) \right)^{-1} x$ existe, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in C$; on désigne par $J_\lambda x$ la limite (ce point est facile à établir lorsque C est localement compact, et plus délicat si l'on suppose que $\mathcal{S}(t)$ est fortement r -convexe). On prouve ensuite qu'il existe un graphe A maximal monotone, tel que

$$J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in C,$$

et que $\overline{D(A)} = C$. On montre enfin que le semi-groupe engendré par $-A$ constitue une sélection de $\mathcal{S}(t)$.

On trouvera les détails de la démonstration dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREZIS (H.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions on convex sets, *J. funct. Anal.* (à paraître).
- [2] BROWDER (F.). - Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, *Proc. Symp. Nonlinear Funct. Anal.* [1968. Chicago]. - Providence, American mathematical Society (à paraître).
- [3] CRANDALL (M.) and PAZY (A.). - Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, *J. funct. Anal.*, t. 3, 1969, p. 376-418.
- [4] GRÜNBAUM (B.). - On a theorem of Kirszbraun, *Bull. Res. Counc. Israel*, t. 17 F, 1958, p. 129-132.
- [5] HAYDEN (T.) and WELLS (J.). - On the extension of Lipschitz-Hölder maps of order α (à paraître).
- [6] KARLIN (S.). - *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*. Vol. 1.- Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1959.
- [7] KATO (T.). - On the generators of nonlinear semigroups, *Summer Inst. Global Anal.*, Berkeley, 1968.
- [8] KIRSZBRAUN (M.). - Über die zusammenziehenden und lipschitzen Transformationen, *Fund. Math.*, t. 22, 1934, p. 77-108.
- [9] KOMURA (Y.). - Differentiability of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Jap.*, t. 21, 1969, p. 375-402.
- [10] MICKLE (E.). - On the extension of a transformation, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 160-164.
- [11] MINTY (G.). - On the extension of Lipschitz, Hölder and monotone functions, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1970, p. 334-339.
- [12] SCHÖNBECK (S.). - On the extension of lipschitzian maps, *Ark. för Mat.*, t. 7, 1967, p. 201-209.
- [13] VALENTINE (F.). - A Lipschitz condition preserving extension for a vector function, *Amer. J. of Math.*, t. 67, 1945, p. 83-93.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Haïm BREZIS
 Ch. Rech. CNRS
 28 rue Berthollet
 75 - PARIS 05
