Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Ja. A. Tagamlicki
Michèle Dehen

L'induction topologique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, nº 1 (1970-1971), exp. nº 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 1, 7 p.
1er octobre 1970

L'INDUCTION TOPOLOGIQUE

Exposé de Ja. A. TAGAMLICKI

Rédaction et démonstrations par Michèle DEHEN

Résumé. - Lors de cette conférence, Ja. A. TAGAMLICKI exposa une notion d'induction topologique qui utilise essentiellement la relation d'ordre sur le treillis des parties d'un ensemble et une propriété de compacité. Il énonça ensuite un théorème, dont celui de Mark G. Krejn et D. P. Mil'man et le principe d'induction sont des cas particuliers. Deux applications de ce théorème général furent ensuite exposées ; l'une concerne une étude du type principe du maximum de H. Bauer, et l'autre l'étude d'intégrales invariantes sur un groupe localement compact.

Notations et définitions. - Soient M un espace topologique compact, et Γ un ensemble muni d'une relation de pré-ordre, notée $<$, pour laquelle toute partie filtrante croissante, Δ , de Γ , admette une borne supérieure, $\bigvee\Delta$. On considère d'autre part un "morphisme" φ , application de Γ dans l'ensemble des ouverts de M , qui vérifie

$$(\gamma < \delta) \implies (\varphi(\gamma) \subset \varphi(\delta)) \quad .$$

Si Δ est une partie filtrante croissante,

$$\varphi(\bigvee\Delta) = \bigcup_{\gamma\in\Delta} \{\varphi(\gamma)\} \quad .$$

La seconde application de cette étude fournira un exemple où l'on ne peut identifier Γ et son image dans l'ensemble des ouverts de M , car l'application φ n'y est pas injective.

Si S est un sous-ensemble de M , on dit qu'un point a (de M) est point caractéristique de S , si :

(i) $(S \subset \varphi(\gamma)) \implies (a \in \varphi(\gamma))$;

(ii) $\left(\begin{cases} S \cap \varphi(\gamma) \neq \emptyset \\ S \cap \complement\varphi(\gamma) \neq \emptyset \end{cases}\right) \implies \left(\exists\ \delta > \gamma : \begin{cases} a \in \varphi(\delta) \\ S \cap \complement\varphi(\delta) \neq \emptyset \end{cases}\right)$, où $\complement\varphi(\gamma)$ désigne le complémentaire, dans M , de $\varphi(\gamma)$.

On note (S) l'ensemble des points caractéristiques de S .

Un point p de M sera dit irréductible, si :

(iii) $(S \in \mathcal{P}(M)\ ,\ p \in (S)) \Longrightarrow$ (tout $\varphi(\gamma)$ qui rencontre $S \cup \{p\}$ le contient) .

On désignera par $E(M)$ l'ensemble des points irréductibles.

THÉORÈME 1. - Si γ est un élément de Γ pour lequel $\varphi(\gamma)$ contienne $E(M)$, alors $\varphi(\gamma)$ contient M .

La démonstration de ce théorème n'a pas été exposée lors de la conférence. Cette démonstration utilise uniquement des propriétés de treillis de $\mathcal{P}(M)$ et la propriété de compacité suivante : Si $\{Y_\alpha\}$ est une famille croissante d'ouverts, indexée par une section commençante des ordinaux, telle que, pour chaque α , $Y_\alpha \neq \sup \mathcal{P}(M) = M$, alors $\cup\{Y_\alpha\} \neq M$.

Ce théorème peut être utilisé à des fins très diverses ; dans ce qui suit, on étudiera quelques applications, et on pourra remarquer que, dans certaines (notamment dans l'exemple 2), l'ensemble pré-ordonné Γ ne peut être identifié à son image par φ .

Démonstration du théorème. - On note

$$\mathcal{H} = \{(a\ ,\ S) \in M \times \mathcal{P}(M)\ ;\quad a \in (S)\}\quad ,$$

et, si $X \in \mathcal{P}(M)$,

$$\mathcal{H}_X = \{(a\ ,\ S) \in \mathcal{H}\ ;\quad \{a\} \cap X = \emptyset \quad \text{et} \quad S \cap X \neq \emptyset\}\quad .$$

Pour démontrer le théorème, on supposera que γ est un élément de Γ pour lequel $\varphi(\gamma)$ contienne $E(M)$ et $\varphi(\gamma) \neq M$. On construira alors, par récurrence transfinie, une suite (Y_α) , indexée par une section commençante des ordinaux, contenue dans l'ensemble des ouverts de M , différents de M , et telle que $\bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha = M$; on pourra donc déduire de la compacité de M que le théorème est bien vérifié.

Supposons que $Y_1 = \varphi(\gamma) \neq M$; on pose $\gamma = \gamma_1^1$, et on peut distinguer deux cas d'étude :

(a) S'il existe un $\delta > \gamma_1^1$ tel que $\varphi(\gamma_1^1) \neq \varphi(\delta) \neq M$, on pose

$$\gamma_2^1 = \delta \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \varphi(\delta)\quad .$$

On construit, tant que ce procédé est possible, une suite transfinie, strictement croissante, d'éléments tous différents de M :

- Si γ_α^1 est tel qu'il existe un $\delta > \gamma_\alpha^1$ pour lequel $Y_\alpha = \varphi(\gamma_\alpha^1) \neq \varphi(\delta) \neq M$, on pose $\delta = \gamma_{\alpha+1}^1$;
- Si α est un ordinal de seconde espèce (sans prédécesseur), on pose

$\gamma^1_\alpha = \bigvee\{\gamma^1_\beta \; ; \; \beta < \alpha\}$ et $Y_\alpha = \varphi(\gamma^1_\alpha) = \bigcup\{Y_\beta \; ; \; \beta < \alpha\}$. La compacité de M entraîne que $Y_\alpha \neq M$.

(b) Soit α_1 le premier ordinal pour lequel on ne puisse effectuer la construction (a) :

$$\forall\, \delta > \gamma^1_{\alpha_1} \; , \qquad \varphi(\delta) = \varphi(\gamma^1_{\alpha_1}) \text{ ou bien } = M \; .$$

On voit alors que $\mathcal{H}_{Y_{\alpha_1}}$ est nécessairement vide ; en effet, s'il contenait un couple (a , S) , on aurait $S \cap Y_{\alpha_1} \neq \emptyset$. Si $S \subset Y_{\alpha_1}$, d'après (i), on déduirait $a \in Y_{\alpha_1}$, ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc nécessairement

$$S \cap Y_{\alpha_1} \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad S \cap \complement Y_{\alpha_1} \neq \emptyset \; ;$$

d'après l'axiome (ii), on conclut alors à l'existence d'un $\delta > \gamma^1_{\alpha_1}$ tel que $a \in \varphi(\delta)$ et $S \cap \complement\varphi(\delta) \neq \emptyset$, par suite on peut effectuer la construction (a).

Comme $E(M) \subset \varphi(\gamma^1_1) \subset \varphi(\gamma^1_{\alpha_1})$, on déduit que, si $a \notin \varphi(\gamma^1_{\alpha_1})$, alors a ne peut appartenir à $E(M)$; ceci s'écrit :

$\exists\, S \in \mathcal{P}(M)$, tel que $a \in (S)$, et $\exists\, \delta \in \Gamma$ pour lequel $\varphi(\delta) \cap (S \cup \{a\}) \neq \emptyset$ et $S \cup \{a\}$ non contenu dans $\varphi(\delta)$.

On peut alors poser $\delta = \gamma^2_1$ et $Y_{\alpha_1+1} = \varphi(\gamma^1_{\alpha_1}) \cup \varphi(\gamma^2_1)$. On a $Y_{\alpha_1} \neq Y_{\alpha_1+1} \neq M$.

Plus généralement, supposons la construction effectuée jusqu'à un ordinal $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\beta$; on a $Y_\alpha = \bigcup_{\xi \leqslant \beta} \varphi(\gamma^\xi_{\alpha_\xi}) \neq M$, et on suppose en outre que, pour tout $\xi < \beta$, $\xi \neq \beta$, $\mathcal{H}_{\varphi(\gamma^\xi_{\alpha_\xi})} = \emptyset$.

(a) S'il existe un $\gamma^\beta_{\alpha_\beta+1} > \gamma^\beta_{\alpha_\beta}$ pour lequel $Y_\alpha \neq Y_\alpha \cup \varphi(\gamma^\beta_{\alpha_\beta+1}) \neq M$, on pose $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha \cup \varphi(\gamma^\beta_{\alpha_\beta+1})$;

(b) Si la construction (a) n'est pas possible, on voit que $\mathcal{H}_{\varphi(\gamma^\beta_{\alpha_\beta})}$ est vide ; par suite $\mathcal{H}_{Y_\alpha}$ est aussi vide.

Comme $Y_\alpha \neq M$, il existe un point $a \notin Y_\alpha$; et, comme a n'est pas irréductible, on peut alors déterminer un élément $\gamma^{\beta+1}_1$ de Γ pour lequel $Y_\alpha \neq Y_\alpha \cup \varphi(\gamma^{\beta+1}_1) \neq M$. On pose $Y_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\beta+1} = Y_\alpha \cup \varphi(\gamma^{\beta+1}_1)$.

Si α est un ordinal de seconde espèce, et si, pour tout $\xi < \alpha$, $\xi \neq \alpha$, on a construit $Y_\xi \neq M$, on pose $Y_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha,\, \xi\neq\alpha} \{Y_\xi\}$. La compacité entraîne que $Y_\alpha \neq M$.

On construit donc, par récurrence, une suite transfinie $\{Y_\alpha\}$, indexée par une section commençante des ordinaux, strictement croissante, et composée d'ouverts tous différents de M . Le cardinal de la section commençante qui l'indexe est inférieur ou égal au cardinal de X , et la réunion des Y_α est égale à M . Ceci est incompatible avec la compacité de M ; le théorème est donc démontré.

Remarque. - On peut démontrer, au sujet de l'ensemble $E(M)$ des points irréductibles, un théorème qui généralise celui concernant les points extrémaux d'un convexe compact : à savoir que $E(M)$ est un espace topologique tamisable, donc aussi de Baire.

Application 1

Le théorème de M. G. Krejn et D. P. Mil'man

Le théorème de Krejn et Mil'man est un cas particulier du théorème précédent, lorsqu'on considère les hypothèses suivantes. Soient M un convexe compact contenu dans un espace vectoriel localement convexe séparé E , et Γ l'ensemble des traces, sur M , d'ouverts convexes de E . On munit Γ de la relation d'inclusion ; le morphisme φ est l'identité.

On déduit alors du théorème 1 que :

Tout ouvert convexe de E qui contient l'ensemble $E(M)$ des points irréductibles de M contient M .

Comme les ouverts convexes de E séparent les points de M , on déduit que l'ensemble des points irréductibles est égal à l'ensemble des points extrémaux de M ; en effet, il est immédiat que tout point extrémal est irréductible ; réciproquement, si p est un point de M non extrémal dans M , il existe deux points a et b de M tels que $p \in]a , b[\subset M$; on voit alors que p est point caractéristique de $\{a , b\}$, ce qui entraîne, d'après (iii), que p n'est pas irréductible.

L'enveloppe convexe fermée, $\overline{co}(E(M))$, est l'intersection des ouverts convexes qui contiennent $E(M)$; on déduit donc du théorème 1 le théorème de Krejn et Mil'man :

COROLLAIRE 2. - L'enveloppe convexe fermée des points extrémaux d'un convexe compact M contenu dans un espace vectoriel localement convexe séparé est égale à M .

Application 2

Etude d'une propriété du type principe du maximum de H. Bauer

Soient M un ensemble compact, F un ensemble de fonctions semi-continues supérieurement de M dans $\underline{R}$ (ou $\underline{R} \cup \{+\infty\}$), tel que tout système filtrant décroissant G admette, dans F , une borne inférieure notée $\bigwedge G$. On note $\Gamma = F \times \underline{R}$, et on le munit de l'ordre

$$((f , \alpha) < (g , \beta)) \iff (f \geqslant g \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant \beta) \quad ,$$

où $f \geqslant g$ signifie que, $\forall\, x \in M$, $f(x) \geqslant g(x)$.

On définit le morphisme φ par $\varphi((f , \alpha)) = \{x \in M \; ; \; f(x) < \alpha\}$.

Lorsque S est un sous-ensemble de M , et a un point de S , on dit que l'ensemble F vérifie le principe du maximum généralisé (PMG) relatif au couple (a , S) :

(PMG) Lorsque f est une fonction de F telle que toute fonction g de F , inférieure à f , vérifie, pour tout x de S , $g(x) \leqslant f(a)$, alors f est constante sur S .

Lorsque F est réduit à une seule fonction $F = \{f\}$, ce principe évoque le principe du maximum des fonctions sousharmoniques, car il s'écrit :

Si f prend son maximum en a , alors f est constante sur S .

Dans le cas particulier où S est un ouvert connexe et où a appartient à S , on retrouve la formulation classique du principe du maximum.

PROPOSITION 3. - *Si* F *vérifie le principe du maximum généralisé relatif au couple* (a , S) , *alors* a *est point caractéristique de* S .

Démonstration. - La vérification de (i) est immédiate. Démontrons seulement l'axiome (ii). Soit (f , α) un élément de Γ qui vérifie $S \cap \{f < \alpha\} \neq \emptyset$ et $S \cap \{f \geqslant \alpha\} \neq \emptyset$.

- Si $f(a) < \alpha$, on pose $\delta = (f , \alpha)$;
- Si $f(a) \geqslant \alpha$, d'après le principe (PMG), $f(a)$ n'est pas la borne supérieure de f sur S ; il existe donc $\beta > \alpha$ tel que le couple $\delta = (f , \beta)$ vérifie $f(a) < \beta$ et $S \cap \{f \geqslant \beta\} \neq \emptyset$.

Du théorème 1 (d'induction), on déduit que, si $\varphi(\gamma) \supset E(M)$, alors $\varphi(\gamma) = M$. Or, si un point p est irréductible, on déduit de l'axiome (iii) que, pour tout ensemble S dont p soit point caractéristique, toute fonction f de F est, sur S , égale à la constante $f(p)$. En particulier, si F sépare les points de M , $S = \{p\}$.

COROLLAIRE 4. - Toute fonction f de F atteint son maximum sur l'ensemble des points irréductibles.

Démonstration. - Le théorème 1 implique que, pour tout x de M , et toute fonction f de F , $f(x)$ est inférieur ou égal à la borne supérieure de $\{f(p)\ ;\ p \in E(M)\}$. Comme f est s. c. s. sur un compact, il en résulte qu'il existe un point irréductible où f prend son maximum.

Application 3

Etude du principe de récurrence transfinie

On considère deux ordinaux α et β vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, et une propriété P sur une classe d'ordinaux satisfaisant à :

1° $\alpha \in P$;

2° $\forall\, \xi \in [\alpha\ ,\ \beta)$, si $\zeta \in P$ pour tout $\zeta < \xi$, alors $\xi \in P$.

On veut montrer que $[\alpha\ ,\ \beta) \subset P$.

On note Γ l'ensemble des ouverts γ de $[\alpha\ ,\ \beta)$ qui vérifient : ou bien $\gamma \subset (\text{non } P)$, ou bien $\gamma \subset P$, γ est convexe au sens que

$$(\xi \leqslant \chi \leqslant \zeta\ ,\quad \xi \in \gamma\ ,\quad \zeta \in P) \implies \chi \in P\ ,$$

et γ est maximal à droite au sens que, si $\gamma \cup (\leftarrow\ ,\ \xi) \cap [\inf \gamma\ ,\ \rightarrow) \subset P$, alors

$$\gamma \supset [\inf \gamma\ ,\ \rightarrow) \cap (\leftarrow\ ,\ \xi)\ .$$

On munit Γ de la relation d'inclusion, φ est l'identité. On vérifie immédiatement que, dans Γ , tout système filtrant croissant admet une borne supérieure.

On vérifie ensuite que α est le seul élément irréductible. En effet, si ξ est un ordinal de $[\alpha\ ,\ \beta)$, $\xi \neq \alpha$:

(1) Si $\xi \in P$, alors ξ est élément caractéristique de $\{\alpha\ ,\ \xi\}$, donc ξ n'est pas irréductible ;

(2) Si $\xi \notin P$, d'après l'axiome 2°, $\exists\, \zeta < \xi$, $\zeta \neq \xi$, $\zeta \notin P$; ξ est alors élément caractéristique de $\{\zeta\ ,\ \xi\}$, donc n'est pas irréductible.

Appliquant le théorème 1, on déduit que : Si γ contient α , alors $\gamma = [\alpha\ ,\ \beta)$. Comme $\alpha \in P$, γ ne peut être que de la seconde forme, par suite $[\alpha\ ,\ \beta) \subset P$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TAGAMLICKI (Ja. A.). - Sur la méthode des points frontière [en russe], Studia Mathematica, Serija Specjalna, Zeszyt 1, 1963, p. 129-130.

(Texte reçu le 10 février 1971)

Jaroslav A. TAGAMLICKI
Oborište St. 6
SOFIA (Bulgarie)

Michèle DEHEN
11 bis rue du Lion
93 - BONDY