CLAUDE PIQUET

Propriétés des applications quadratiques d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel. Applications à la théorie spectrale des opérateurs normaux et à l'image numérique d'un opérateur

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. nº 1, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, n° 1, 20 p.

13 et 20 janvier 1972

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS QUADRATIQUES D'UN ESPACE DE HILBERT DANS UN ESPACE VECTORIEL. APPLICATIONS À LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS NORMAUX ET À L'IMAGE NUMÉRIQUE D'UN OPÉRATEUR

par Claude PIQUET

On considère une classe particulière d'applications d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel topologique ; ces applications sont continues et satisfont à l'identité du parallèlogramme.

On étudie, dans une première partie, les propriétés de l'image W de la sphère unité du Hilbert par une application b du type précédent. On montre, moyennant une hypothèse supplémentaire sur b, que W est convexe, et l'on obtient une caractérisation des faces de W.

On applique, dans les paragraphes 2 et 3, les résultats précédents aux représentations unitaires d'un groupe abélien localement compact, ce qui permet de retrouver la théorie spectrale des opérateurs normaux (§ 4).

Enfin, on retrouve, dans les paragraphes 6 et 7, les propriétés essentielles de l'image numérique d'un opérateur.

On aura présent à l'esprit, dans les sections 2, 3 et 4, que l'on se refuse d'utiliser la théorie spectrale des opérateurs normaux (1), puisque c'est le but de ces paragraphes. A peu près tous les théorèmes énoncés deviennent évidents si l'on suppose connue la théorie spectrale des opérateurs normaux.

1. Définition des b-applications. Propriétés générales.

1.1. Notations et définitions : $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe dont le produit scalaire, noté $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire à gauche. Si $x \in \mathcal{H}$, on pose

$$\hat{x} = 0 \quad \text{si} \quad x = 0\ , \quad \hat{x} = x/\|x\| \quad \text{si} \quad x \neq 0\ .$$

$\mathcal{H}_r$ (resp. $\mathcal{B}_r$) est l'ensemble des x de $\mathcal{H}$ tels que $\|x\| = r$ (resp. $\|x\| \leqslant r$). Enfin, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Si $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, L^* désigne l'adjoint de L.

DÉFINITION : Une application b de $\mathcal{H}$ dans un e. v. t. l. c. $\mathcal{Y}$ sera une b-application si

1° b est continue,

(1) On se rappellera que l'existence et les propriétés de la racine carrée positive d'un opérateur positif borné ne font pas appel à la théorie spectrale. Cf. [1] par exemple.

2° b <u>satisfait à l'identité du parallélogramme</u> :

$$\forall\, x \in \mathcal{H} \;,\quad \forall\, y \in \mathcal{H} \;,\qquad b(x+y) + b(x-y) = 2b(x) + 2b(y) \;.$$

Il est facile de montrer qu'alors :

$$\forall\, \lambda \in \underset{\sim}{C} \;,\quad \forall\, x \in \mathcal{H} \;,\qquad b(\lambda x) = |\lambda|^2\, b(x)$$

et que

$$\{x \;,\; y\} \longrightarrow \frac{1}{4}\{b(x+y) - b(x-y) + ib(x+iy) - ib(x-iy)\}$$

est sesquilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{Y}$.

Soit V un sous-espace de $\mathcal{H}$. On pose $W(V) = \mathrm{conv}\,\{b(V \cap \mathcal{H}_1)\}$ et $W = W(\mathcal{H})$. Soit A une partie de $W(V)$. On définit alors

$$F(A) = \text{face de } W \text{ engendrée par } A \;.$$

$$M(A) = \{x \in V \;;\; b(x) \in \|x\|^2\, A\} \;.$$

1.2. PROPOSITION : <u>Si</u> A <u>est une face de</u> $W(V)$, $M(A)$ <u>est un sous-espace vectoriel de</u> V .

Il est évident que $M(A)$ est $\underset{\sim}{C}$-homogène ; soient x et y dans $M(A)$. On a $b(x+y) + b(x-y) = 2\{b(x) + b(y)\} \in 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)A$. Posons

$$t = \frac{2\ \mathrm{Ré}\ \langle x \;,\; y\rangle}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \;;$$

alors $t \in [0 \;,\; 1]$ et l'on a :

$$\frac{1}{2}(1+t)\ b(x+y) + \frac{1}{2}(1-t)\ b(x-y) \in A \;.$$

A est une face, donc $b(\widehat{x \pm y}) \in A$, soit $x \pm y \in M(A)$.

C. Q. F. D.

La réciproque de cette proposition est en général fausse. C'est pourquoi nous introduisons une classe plus restreinte de b-applications.

1.3. DÉFINITION : <u>Une</u> b-<u>application</u> b <u>de</u> $\mathcal{H}$ <u>dans</u> $\mathcal{Y}$ <u>est une</u> bc-<u>application si</u>, <u>pour tout couple</u> $(x \;,\; y)$ <u>de</u> $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$, <u>il existe un</u> y' <u>de</u> $\mathcal{H}_1$ <u>tel que</u> $b(y') = b(y)$ <u>et</u> $b(\widehat{x + y'})$ <u>appartient à la droite</u> (<u>réelle</u>) <u>définie par</u> $b(x)$ <u>et</u> $b(y)$.

Afin de pouvoir caractériser le W d'une bc-application, nous avons besoin d'un lemme.

1.4. LEMME : <u>Soit</u> b <u>une</u> bc-<u>application de</u> $\mathcal{H}$ <u>dans</u> $\mathcal{Y}$. <u>Alors</u> :

$$\forall\, \omega_1 \in b(\mathcal{H}_1) \;,\quad \forall\, \omega_2 \in b(\mathcal{H}_1) \;,\quad \forall\, t \in [0 \;,\; 1] \;,$$

<u>il existe</u> x <u>et</u> y <u>de</u> $\mathcal{H}_1$, $x \in M(\omega_1)$, $y \in M(\omega_2)$, <u>et</u> $\theta \in [0 \;,\; \frac{\pi}{2}]$, <u>tels que</u>

$$b(\widehat{(\cos\theta)x + (\sin\theta)y}) = t\omega_1 + (1-t)\omega_2 \;.$$

b étant une bc-application, on peut supposer que $b(\widehat{x+y})$ appartient à la droite Δ définie par ω_1 et ω_2. Comme $b(x+y) + b(x-y) = 2b(x) + 2b(y)$, on voit que $b(\widehat{x-y}) \in \Delta$. Il existe donc α et β réels tels que

$$b(x+y) = \|x+y\|^2\{\alpha\omega_1+(1-\alpha)\omega_2\} \quad \text{et} \quad b(x-y) = \|x-y\|^2\{\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\} .$$

De plus, $b((\cos\theta)x + (\sin\theta)y) = (\cos^2\theta)\omega_1 + (\sin^2\theta)\omega_2 + (\sin\theta\cos\theta)[b(x+y)-b(x-y)]$, donc en posant

$$t(\theta) = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta\,\{\alpha - \beta + 2(\alpha+\beta)\operatorname{Re}\langle x , y\rangle\}}{1 + 2\sin\theta\cos\theta\operatorname{Re}\langle x , y\rangle} ,$$

on obtient

$$b(\widehat{(\cos\theta)x + (\sin\theta)y}) = t(\theta)\omega_1 + 1 - t(\theta)\omega_2 .$$

Comme l'application $\theta \to t(\theta)$ est continue et que $t(\theta) = 1$ et $t(\frac{\pi}{2}) = 0$, le lemme est démontré.

Remarque : Il existe aussi un $\theta \in [\frac{\pi}{2} , \pi]$ répondant à la question.

Nous obtenons maintenant le théorème suivant :

1.5. THÉORÈME : *Soit* $b : \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ *une* bc-*application. Alors*

1° $b(\mathcal{H}_1)$ *est convexe.*

2° A *est une face de* $b(\mathcal{H}_1)$ *si et seulement si* $M(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{H}$.

3° *Pour toute partie* A *de* $b(\mathcal{H}_1)$, $M(F(A))$ *est le sous-espace de* $\mathcal{H}$ *engendré par* $M(A)$.

1° Cela résulte trivialement du lemme 1.4.

2° Compte tenu de la proposition 1.2, il faut montrer que si $M(A)$ est un sous-espace, A est une face. Considérons ω_1 et ω_2 dans $b(\mathcal{H})$ tels que $t\omega_1+(1-t)\omega_2$ pour un $t \in]0 , 1[$. b étant une bc-application, et compte tenu du lemme 1.4, il existe $x \in M(\omega_1)$, $y \in M(\omega_2)$, $\theta \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ $(x , y \in \mathcal{H}_1)$ tels que

$$b((\cos\theta)x + (\sin\theta)y) = t\omega_1 + (1-t)\omega_2 \in A .$$

Donc $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y \in M(A)$. D'après la remarque du lemme 1.4, il existe $\theta' \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\theta'\, x - \sin\theta'\, y \in M(A)$.

$$M(A) \text{ sous-espace} \Rightarrow x \text{ et } y \in M(A) ,$$

donc ω_1 et $\omega_2 \in A$, et donc A est une face.

3° Soit $\rangle M(A)\langle$ le sous-espace engendré par $M(A)$. Comme $M(A) \subset M(F(A))$, on a $\rangle M(A)\langle \subset M(F(A))$. Si A est une face, il n'y a rien à démontrer. Si A n'est pas une face, pour tout $x \in M(F(A))$ tel que $b(x) \notin A$ $(\|x\| = 1)$, il existe $b(y) \in F(A)$ et $t \in]0 , 1[$ tels que $tb(x) + (1-t)b(y) \in A$. b étant une bc-application, on remplace y par y' tel que $b(y') = b(y)$ et

$$b(\cos\theta x + \sin\theta y) \in A$$

(lemme 1.4). Donc $\cos\theta x + \sin\theta y \in M(A)$; de même, il existe θ' tel que $\cos\theta' x - \sin\theta' y \in M(A)$, donc x (et y) appartient à $\rangle M(A) \langle$, ce qui montre que

$$\rangle M(A) \langle = M(F(A)) .$$

C. Q. F. D.

D'une façon plus parlante, on peut dire que l'image réciproque par b de la face du cône convexe $b(\mathcal{H})$ engendrée par A est le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par l'image réciproque de A.

2. Fonctions de type positif associées à une représentation unitaire d'un groupe abélien localement compact.

2.1. Notations et définition.

G est un groupe abélien localement compact ; son groupe dual $\hat{G}$ est localement compact.

$P(G)$ (resp. $P_1(G)$, resp. $P^1(G)$) est le cône convexe propre (resp. le convexe) des fonctions $f : G \to \underset{\sim}{C}$ continues, de type positif sur G (resp. $f \in P(G), f(0)=1$; resp. $f \in P(G)$, $f(0) \leq 1$).

X est l'espace vectoriel des fonctions $f : G \to \underset{\sim}{C}$, continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $P(G) - P(G)$ est dense dans X.

Si $\mathcal{T}$ est un espace topologique compact, $\mathcal{M}_1^+(\mathcal{T})$ désigne le compact convexe des mesures positives sur $\mathcal{T}$, de masse totale ≤ 1.

$\pi : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G ; $\pi(0) = \underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}}$.

b_π ou $b : \mathcal{H} \to P(G) \subset X$ est définie par $b(x) = f_x$ où $f_x(g) = \langle \pi(g)x , x \rangle$ $(g \in G)$.

$\{\pi\}'$ est le commutant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de la famille (abélienne) des $\{\pi(g)\}$.

$\mathfrak{K}$ est l'adhérence, dans $P^1(G)$, de $b_\pi(\mathcal{B}_1)$ pour la topologie faible

$$\sigma(L^\infty(G) , L^1(G)) .$$

2.2. LEMME : $b(x) = b(y) \Leftrightarrow \exists\, U \in \{\pi\}'$, U unitaire tel que $y = Ux$.

Il est clair que si $y = Ux$, $\langle \pi(g)y , y \rangle = \langle \pi(g)x , U^* Ux \rangle$, donc $b(x) = b(y)$.

Si $b(x) = b(y)$, alors $\|x\| = \|y\|$ ($\neq 0$, sinon prendre $U = \underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}}$). Soit $V(x)$ (resp. $V(y)$) le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par les $\pi(g)x$ (resp. $\pi(g)y$) où $g \in G$. Donc

$$z \in V(x) \Leftrightarrow \exists\, M \text{ de la forme } \textstyle\sum_1^n \lambda_k \pi(g_k) , \text{ où } \lambda_k \in \underset{\sim}{C} , \ g_k \in G ,$$

tel que $z = Mx$.

Soit $S : V(x) \to V(y)$ l'opérateur linéaire défini par $S(z) = My$ où $z = Mx$.

Cette définition a un sens car $\|S(z)\|^2 = \|z\|^2$. En effet,

$$\|Sz\|^2 = \Sigma_{p,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \, b(y)(g_p - g_q) = \Sigma_{p,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \, b(x)(g_p - g_q) = \|z\|^2 .$$

Donc si $Mx = M' x$, alors $My = M' y$. La relation précédente montre de plus que S est une isométrie, et se prolonge donc en une isométrie de $\overline{V(x)} \to \overline{V(y)}$. Il est évident que S est surjective ; l'isométrie T de $\overline{V(y)} \to \overline{V(x)}$, définie par $T(My) = Mx$, est son inverse à droite. D'autre part, si $z \in V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$, on a :

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \text{ , où } z_n \in V(y) .$$

z_n s'écrit $z_n = M_n y$ et, pour tout opérateur N de la forme $\sum_1^k \lambda_p \pi(g_p)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle Nx , z_n\rangle = 0 \text{ , soit } \lim_{n\to\infty} \langle Nx , M_n y\rangle = 0 ,$$

donc $\lim_{n\to\infty} \langle M_n^* x , N^* y\rangle = 0$. Comme $V(y)^\perp$ est invariant par M_n et M_n^* , on en déduit que $\lim_{n\to\infty} M_n x = Mx$ appartient à $V(y)^\perp$. Il en résulte que

$$T\{V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}\} = \overline{V(x)} \cap V(y)^\perp .$$

Soient maintenant P le projecteur sur $\overline{V(x)}$, Q le projecteur sur $V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$, et R le projecteur sur $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$. On a $P + Q + R = 1_{\mathcal{H}}$; soit alors $U = SP + TQ + R$. En raison de l'invariance par π des espaces $\overline{V(x)}$ et $\overline{V(y)}$, on a $U \in \{\pi\}'$ et U est unitaire, car SP , TQ et R sont des isométries surjectives de

$\overline{V(x)}$ dans $\overline{V(y)}$, $V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$ dans $\overline{V(x)} \cap V(y)^\perp$ et $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$ dans $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$

respectivement. Enfin,

$$Ux = SPx = Sx = y .$$

C. Q. F. D.

2.3. LEMME : <u>A tout couple (x , y) de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ correspond un opérateur unitaire U de $\{\pi\}'$ tel que</u>

$$\forall g \in G , \quad \langle\pi(g)x , Uy\rangle + \langle\pi(g) Uy , x\rangle = 0 .$$

Soit $V(x)$ le sous-espace attaché à x , défini au lemme précédent. Nous considérons quatre cas :

(α) $y \in V(x)^\perp$; $U = 1_{\mathcal{H}}$ convient alors parfaitement.

(β) $y \in V(x)$; on a alors $y = Mx$, où M est <u>normal</u> et $M \in \{\pi\}''$.

Soit $M = iU^* H$ une décomposition polaire de M , où U est unitaire (possible car M est normal). On sait qu'alors H est hermitien, et que H et U appartiennent à $\{\pi\}'$. Alors $Uy = iHx$ et l'on a

$$\langle\pi(g)x , Uy\rangle + \langle\pi(g)Uy , x\rangle = 0 .$$

(γ) $y \in \overline{V(x)}$; alors $y = \lim_{n\to\infty} M_n x$, où M_n est de la forme précédente. Soit

$M_n = iU_n^* H_n$ une décomposition polaire analogue à celle de M dans (β). On sait que $M_n x$ converge. Montrons que $H_n x$ converge. On a

$$\|(H_p - H_q)x\|^2 = \|H_p x\|^2 + \|H_q x\|^2 - 2\langle H_p H_q x , x\rangle$$

car $H_p H_q = H_q H_p$. Mais H_p, donc $H_p H_q$ est <u>positif</u>, donc

$$|\langle M_p x , M_q x\rangle + \langle M_q x , M_p x\rangle| = |\langle H_p H_q U_p^* U_q x , x\rangle + \langle H_p H_q x , U_p^* U_q x\rangle|$$

est majoré par

$$4\langle H_p H_q x , x\rangle\langle H_p H_q U_p^* U_q x , U_p^* U_q x\rangle = (2\langle H_p H_q x , x\rangle)^2 .$$

Il en résulte que $\|(H_p - H_q)x\|^2 \leqslant \|(M_p - M_q)x\|^2$, si bien que $z = \lim_{n\to\infty} iH_n$ existe. b étant continue (en effet, $\sup_{g\in G}|b(x)(g) - b(y)(g)| \leqslant 2\| x - y\|$), on a

$$b(z) = \lim_{n\to\infty} b(H_n x) = \lim_{n\to\infty} b(M_n x) = b(y) .$$

D'après le lemme 2.2, il existe U unitaire dans $\{\pi\}'$ tel que $z = Uy$, et comme on a

$$\langle\pi(g)x , z\rangle + \langle\pi(g)z , x\rangle = \lim_{n\to\infty}\{i\langle\pi(g)H_n x , x\rangle - i\langle\pi(g)x , H_n x\rangle\} = 0 ,$$

Le lemme est démontré dans ce cas.

(δ) **Enfin,** si y est quelconque, on écrit $y = u + v$, où $u \in \overline{V(x)}$, $v \in V(x)^\perp$. Soient U_1 l'opérateur donné par (γ) appliqué au couple (x , u) et P le projecteur sur $\overline{V(x)}$. Alors $U = PU_1 + (1 - P)$ est unitaire et dans $\{\pi\}'$, car PU_1 est un opérateur unitaire de $\overline{V(x)}$. Il vient $Uy = Uu + v$ et comme

$$\langle\pi(g)x , Uy\rangle = \langle\pi(g)x , Uu\rangle ,$$

le lemme est démontré.

En appliquant ce lemme à un couple quelconque, on voit que b_π est une bc-application de $\mathcal{H}$ dans X. (Prendre $y' = Uy$). Compte tenu du théorème 1.5, on obtient le théorème suivant.

2.4. THÉORÈME : <u>L'application</u> b_π, <u>définie en 2.1</u>, <u>est une</u> bc-<u>application de</u> $\mathcal{H}$ <u>dans</u> X. <u>On a</u> :

(i) $b(\mathcal{H}_1)$ <u>est un convexe de</u> $P_1(G)$.

(ii) <u>Si</u> $\omega = b(x)$, <u>où</u> $x \in \mathcal{H}_1$, <u>on a</u>

$$M(\omega) \cap \mathcal{H}_1 = \{y \in \mathcal{H} ;\ \exists\, U \text{ unitaire, } U \in \{\pi\}' \text{, tel que } y = Ux\} .$$

(iii) <u>Si</u> A <u>est une partie de</u> $b(\mathcal{H}_1)$, $M(F(A))$ <u>est le sous-espace de</u> $\mathcal{H}$ <u>engendré par</u> $M(A)$

<u>Remarque</u> : La condition (i) peut s'énoncer ainsi : <u>L'ensemble des fonctions de type positif associées à une représentation unitaire</u> π <u>d'un groupe abélien</u> G <u>est convexe</u>.

Nous allons maintenant examiner plus en détail les propriétés de $\mathcal{H}$.

2.5. LEMME : _$\mathscr{W}$ est un compact convexe dont les points extrémaux sont_ $\{0\}$ _et la trace_ $\mathscr{W} \cap \hat{G}$ _de_ $\mathscr{W}$ _sur le groupe dual_ $\hat{G}$.

$b(\mathscr{H}_1)$ étant un convexe de $P_1(G)$, $b(\mathscr{B}_1)$ est un convexe de $P^1(G)$. Comme $P^1(G)$ est un simplexe de Bauer pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(G)\ ,\ L^1(G))$ ([2], théorème 13.5.2), $\mathscr{W}$ est un compact convexe de $P^1(G)$.

Soit $f \in \mathscr{W}$, extrémal et distinct de 0 (0 est évidemment extrémal, car $P(G)$ est un cône propre). $f(0) = 1$ puisque f est extrémal ; donc $f \in P_1(G)$. Or ([3], chapitre VI, § 31,7, théorème 6), sur $P_1(G)$, la topologie faible coïncide avec la topologie forte (topologie de la convergence compacte). Il existe donc une suite généralisée [2], f_n de $b(\mathscr{B}_1)$ telle que $\lim_n f_n = f$ (pour la convergence compacte). Il existe donc une suite x_n de $\mathscr{B}_1$ telle que $b(x_n)$ converge vers f . Comme $\|x_n\|^2 = f_n(0)$, on peut supposer que $x_n \in \mathscr{H}_1$.

Soit $x_n^\pm = [1 \pm \lambda\pi(g_0)]x_n$, où $|\lambda| = 1$, et $f_n^\pm = b(x_n^\pm)$. On a

$$f_n^\pm(g) = 2f_n(g) \pm (\lambda f_n(g + g_0) + \bar{\lambda} f_n(g - g_0)) ;$$

par conséquent, $\lim_{n\to\infty} f_n^\pm = f^\pm$ existe, et l'on a $f^+(g) + f^-(g) = 4f(g)$. Mais

$$\|x_n^\pm\|^2 = 2 \pm (\lambda f_n(g_0) + \bar{\lambda} f_n(g_0)) .$$

L'extrémalité de f implique donc :

$$[2 + \lambda f(g_0) + \bar{\lambda} f(g_0)]f(g) = 2f(g) + \lambda f(g + g_0) + \bar{\lambda} f(g - g_0) .$$

Ceci est vrai pour tout λ , $|\lambda| = 1$, donc $f(g + g_0) = f(g)\, f(g_0)$: f est un caractère continu de G .

Inversement, tout élément de $\mathscr{W} \cap \hat{G}$ est extrémal dans $P^1(G)$, donc dans $\mathscr{W}$. Le lemme est démontré.

On remarque que $\mathscr{W} \cap \hat{G}$ est fortement fermé ; comme $P^1(G)$ est un simplexe de Bauer, il en va de même de $\mathscr{W}$ qui est une face fermée de $P^1(G)$. Donc on a le résultat suivant.

2.6. THÉORÈME : _L'adhérence faible_ $\mathscr{W}$ _de l'ensemble des fonctions de type positif (continues)_ f _telles que_ $f(0) \leq 1$, _associées à une représentation unitaire_ π _d'un groupe abélien localement compact_ G , _est une face fermée de_ $P^1(G)$. _C'est un simplexe de Bauer dont les points extrémaux sont_ $\{0\}$ _et_ $\mathscr{W} \cap \hat{G}$.

On introduit maintenant une définition.

2.7. DÉFINITION : _On appelle spectre de_ π , _et l'on note_ $sp(\pi)$ _le fermé_ $\mathscr{W} \cap \hat{G}$.

Par le théorème de représentation des simplexes de Bauer, on a le théorème suivant.

---

(2) Dans la suite de la démonstration, "suite" signifie "suite généralisée".

2.8. THÉORÈME : $\mathcal{W}$ <u>est affinement isomorphe et homéomorphe à</u> $\mathfrak{M}_1^+(sp(\pi) \cup \{0\})$. <u>A tout</u> x <u>de</u> $\mathcal{H}_1$ <u>correspond une mesure</u> μ_x , <u>unique</u>, <u>de</u> $\mathfrak{M}_1^+(sp(\pi))$ <u>telle que</u>

$$b(x) = \int_{sp(\pi)} \chi \, d\mu_x(\chi) .$$

Nous avons seulement à montrer que si $x \neq 0$, μ_x ne charge pas le point $\{0\}$. Ceci résulte de ce que $b(x)(0) = 1 = \int_{sp(\pi)} d\mu_x$, donc μ_x est portée par $sp(\pi)$.

<u>Remarque</u> : L'homéomorphisme précédent n'est rien d'autre que la transformation de Fourier.

Nous précisons maintenant la structure des faces de $\mathcal{W}$.

2.9. THÉORÈME : <u>Soit</u> $\underset{\sim}{F}$ <u>une face fermée de</u> $\mathcal{W}$; <u>alors</u>

$$M(\underset{\sim}{F}) = \{x \in \mathcal{H} \; ; \; b(x) \in \|x\|^2 \underset{\sim}{F}\}$$

<u>est un sous-espace fermé de</u> $\mathcal{H}$ <u>invariant par</u> π . <u>Inversement</u>, <u>si</u> E <u>est un sous-espace fermé invariant par</u> π , <u>l'adhérence faible de</u> $b(E \cap \mathcal{B}_1)$ <u>est une face fermée de</u> $\mathcal{W}$.

La proposition directe résulte du théorème 1.5 et de la continuité de b . La proposition inverse est évidente en remplaçant $\mathcal{H}$ par E .

Toute face fermée de $\mathcal{W}$ étant déterminée par ses points extrémaux et inversement, on a un corollaire.

2.10. COROLLAIRE : <u>Soit</u> F <u>un fermé de</u> $\hat{G}$; <u>si</u> $\underset{\sim}{F}$ <u>est la face fermée de</u> $\mathcal{W}$ <u>engendrée par</u> $F \cap \mathcal{W}$, <u>alors</u> $M(\underset{\sim}{F}) = \{x \in \mathcal{H} , \; \mu_x$ <u>est portée par</u> $F\}$ <u>est un sous-espace fermé de</u> $\mathcal{H}$ <u>invariant par</u> π . <u>Inversement</u>, <u>si</u> E <u>est un sous-espace fermé de</u> $\mathcal{H}$, <u>invariant par</u> π , <u>alors</u> $E = M(\underset{\sim}{F})$ <u>où</u> $\underset{\sim}{F}$ <u>est la face fermée de</u> $\mathcal{W}$ <u>engendrée par la trace</u> F <u>de l'adhérence de</u> $b(E \cap \mathcal{B}_1)$ <u>sur</u> $\hat{G}$.

N. B. - Fermé signifie fermé pour la topologie de la convergence compacte.

3. Mesure spectrale associée à une représentation unitaire π .

Les mots "fermé", "compact", ... signifient fermé, compact, ... pour la topologie de la convergence compacte.

3.1. <u>Notations</u> : On note $\mathcal{E}(F)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ associé au fermé F de $\hat{G}$ obtenu au corollaire 2.10. On rappelle que si $x \in \mathcal{H}$, $\overline{V(x)}$ est le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, engendré par les vecteurs $\pi(g)x$. Il est clair que pour tout $x \in \mathcal{E}(F)$, $\overline{V(x)} \subset \mathcal{E}(F)$. Plus précisément, il résulte du théorème 2.4 que $\mathcal{E}(F)$ s'identifie au sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par Ux lorsque $U \in \{\pi\}'$, et U est unitaire. (x quelconque dans $\mathcal{E}(F)$).

Un problème important est de savoir quand $\mathcal{E}(F)$ est non réduit à $\{0\}$. A cet effet, nous démontrons quelques lemmes.

3.2. LEMME : <u>Soit</u> $x \in \mathcal{H}$. <u>Pour toute fonction</u> $\alpha : \hat{G} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$, <u>continue</u>, <u>à support compact</u>, <u>il existe un</u> $x_\alpha \in \overline{V(x)}$ <u>tel que</u> $\mu_{x_\alpha} = |\alpha|^2 \mu_x$.

Soit $\varphi : \hat{G} \dashrightarrow \underset{\sim}{C}$ de la forme $\varphi = \sum_1^n \lambda_k g_k$ (où $g_k \in G \approx \hat{\hat{G}}$) ($\lambda_k \in \underset{\sim}{C}$) . On associe à φ l'opérateur $M_\varphi = \sum_1^n \lambda_k \pi(g_k)$. On a alors

$$b(M_\varphi x) = \sum_{p,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \langle \pi(g + g_p - g_q)x , x\rangle$$

et par conséquent,

$$\mu_{M_\varphi x} = \{\sum_{p,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q g_p \overline{g}_q\}\mu_\psi ,$$

soit

$$\mu_{M_\varphi \psi} = |\varphi|^2 \mu_\psi .$$

Or α est limite uniforme sur $\hat{G}$ de fonctions φ du type précédent.

D'autre part, $\|x\|^2 = b(x)(0) = \langle \mu_x , 1\rangle$, donc $\|M_\varphi x\|^2 = \langle \mu_x , |\varphi|^2\rangle$ et

$$\|(M_\varphi - M_{\varphi'})x\|^2 = \langle \mu_x , |\varphi - \varphi'|^2\rangle .$$

Si donc la suite φ_i converge uniformément sur $\hat{G}$, $M_{\varphi_i} x$ converge dans $\overline{V(x)}$. Si x_α désigne la limite obtenue, on a

$$\mu_{x_\alpha} = \lim \mu_{M_{\varphi_i} x} = \lim |\varphi_i|^2 \mu_x = |\alpha|^2 \mu_x .$$

De plus, pour tout $y \in V(x)$, $\|y\| = 1$, on a

$$\mu_{M_\alpha y} = |\alpha|^2 \mu_y , \text{ avec } M_\alpha = \text{lim forte sur } V(x) \text{ de } M_{\varphi_i} .$$

Donc

$$\|\pi_\alpha y\|^2 = \langle \mu_y , |\alpha|^2\rangle \leqslant \|\alpha\|_\infty^2$$

π_α est uniformément borné sur $V(x)$, donc se prolonge en un opérateur borné de $\overline{V(x)}$. Enfin, si $\widetilde{\alpha}$ est la conjuguée hermitienne de α , on a $M_{\widetilde{\alpha}} = (\pi_\alpha)^*$.

3.3. LEMME : <u>Soit</u> α <u>la fonction caractéristique d'un compact</u> K <u>de</u> $\hat{G}$. <u>Alors</u>, $\forall x$, $\exists x_\alpha \in \overline{V(x)}$, $\mu_{x_\alpha} = \alpha\mu_x$.

α est une limite décroissante d'une suite de fonctions continues positives à support compact. Soient α_n ces fonctions ; soit M_n l'opérateur associé à x (fixé) et $\sqrt{\alpha_n}$, par le lemme précédent. $\alpha_n \geqslant 0 \Longrightarrow M_n$ hermitien positif. Comme

$$\langle(\pi_p - \pi_q)x , x\rangle = \langle\mu_x , \sqrt{\alpha_p} - \sqrt{\alpha_q}\rangle ,$$

la suite M_n d'opérateurs bornés positifs est monotone décroissante. Soit $M = \lim_{n\to\infty} M_n$. M est borné et $\mu_{M\psi} = \alpha\mu_\psi$ avec $M\psi \in \overline{V(x)}$.

3.4. LEMME : <u>Soient</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>deux fermés de</u> $\hat{G}$. <u>Alors</u> $\mathcal{E}(F_1)$ <u>et</u> $\mathcal{E}(F_2)$ <u>sont orthogonaux si</u>, <u>et seulement si</u>, <u>pour tout</u> x_1 <u>de</u> $\mathcal{E}(F_1)$, <u>tout</u> x_2 <u>de</u> $\mathcal{E}(F_2)$, <u>les mesures</u> μ_{x_1} <u>et</u> μ_{x_2} <u>sont étrangères</u>.

Supposons $\mathcal{E}(F_1)$ et $\mathcal{E}(F_2)$ non orthogonaux : Il existe un couple (x_1 , x_2) de

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ tel que $x_1 \in \mathcal{E}(F_1)$, $x_2 \in \mathcal{E}(F_2)$ et $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_2'$ où $x_2' \in \mathcal{E}(F_2)^{\perp}$ et $\alpha \neq 0$. $\mathcal{E}(F_2)^{\perp}$ étant π-invariant, on a :

$$\mu_{x_1} = |\alpha|^2 \mu_{x_2} + |\beta|^2 \mu_{x_2'} .$$

Comme $\mu_{x_2}(F_2) = 1$, $\mu_{x_1}(F_2) > 0$, et les mesures μ_{x_1} et μ_{x_2} ne sont pas étrangères.

Supposons maintenant μ_{x_1} et μ_{x_2} non étrangères $(x_1 \in \mathcal{E}(F_1)$, $x_2 \in \mathcal{E}(F_2))$. Les mesures μ_{x_1} et μ_{x_2} sont $\sigma(L^{\infty}(G) , L^1(G))$ boréliennes ; il existe un K faiblement compact tel que $\mu_{x_1}(K) > 0$, $\mu_{x_2}(K) > 0$. Mais $K \subset P_1(G)$ et, comme sur $P_1(G)$ les topologies fortes et faibles coïncident, K est fortement compact. D'après le lemme 3.3, il existe $y \in \overline{V(x_1)} \subset (F_1)$ tel que $\mu_y(K) = \mu_{x_1}(K) > 0$. Il existe donc $y \neq 0$ tel que $y \in \mathcal{E}(F_1)$ et $y \in \mathcal{E}(F_2)$, ce qui montre que $\mathcal{E}(F_1)$ et $\mathcal{E}(F_2)$ ne sont pas orthogonaux.

3.5. COROLLAIRE : Soit F un fermé de $\hat{G}$. Alors, $\forall\, x \in \mathcal{E}(F)^{\perp}$, $\mu_x(F) = 0$.

Ce résultat est immédiat.

3.6. LEMME : Soient F un fermé de $\hat{G}$, et $E(F)$ le projecteur sur $\mathcal{E}(F)$. Alors, pour tout x de $\mathcal{H}$, on a

$$\langle E(F)x , x\rangle = \int_F d\mu_x = \|x\|^2 \int_F d\mu_{\tilde{x}} .$$

On peut supposer $\|x\| = 1$. Si $x \in \mathcal{E}(F)$, $E(F)x = x$ et $\int_F d\mu_x = 1$. Si $x \in \mathcal{E}(F)^{\perp}$, on a $\mu_x(F) = 0$ (Corollaire 3.5). Enfin, si x est quelconque, $x = \alpha u + \beta v$ où $u \in \mathcal{E}(F)$, $v \in \mathcal{E}(F)^{\perp}$. Ces espaces étant invariants par π , on a

$$\mu_x = |\alpha|^2 \mu_u + |\beta|^2 \mu_v$$

et donc

$$\mu_x(F) = |\alpha|^2 = \langle E(F)x , x\rangle .$$

Nous obtenons enfin le théorème de décomposition spectrale ([8], chap. VI, § 31, 7, théor. 6).

3.7. THÉORÈME : Soient G un groupe abélien localement compact, et π une représentation unitaire de G . Soient $\mathcal{T}(\hat{G})$ la tribu borélienne de $\hat{G}$ et $\mathcal{P}$ la famille des projecteurs de $\mathcal{H}$. Il existe une fonction $E : \mathcal{T}(\hat{G}) \longrightarrow \mathcal{P}$, et une seule, telle que :

1° $E(\emptyset) = 0_{\mathcal{H}}$, $E(\hat{G}) = E(sp(\pi)) = 1_{\mathcal{H}}$.

2° Si B_1 , $B_2 \in \mathcal{T}(\hat{G})$, $B_1 \subset B_2$, on a $E(B_1) \leq E(B_2)$.

3° Si B_n est une classe monotone de $\mathcal{T}(\hat{G})$, $E(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} E(B_n)$, cette dernière limite étant prise au sens de la topologie forte (ou faible) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

4° $\forall\, x \in \mathcal{H}$, $\forall\, B \in \mathcal{T}(G)$, $\langle E(B)x , x\rangle = \int_B d\mu_x = \mu_x(B)$.

5° $\forall\, x \in \mathcal{H}$, $b(x) = \int \chi \, d\mu_x(\chi)$.

L'existence de E résulte du lemme 3.6 et du fait que la tribu borélienne de $\hat{G}$ est engendrée par les compacts.

L'unicité est due à l'unicité de la mesure μ_x représentant $b(x)$.

Enfin, E est σ-additive car $\langle E(B)x \, , \, x\rangle = \int_B d\mu_x$, et μ_x est une mesure de probabilité sur X .

4. Mesure spectrale d'un opérateur normal.

On indique, dans ce paragraphe, comment le théorème précédent permet de retrouver le théorème classique de décomposition spectrale d'un opérateur normal.

4.1. DÉFINITION : Un opérateur L de domaine de définition $\mathcal{D}_L$ dense dans $\mathcal{H}$ est normal s'il est linéaire, fermé, et si $LL^* = L^* L$.

Par le théorème de Von Neumann, on sait que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{LL^*} = \mathcal{D}_{L^*L}$ est dense dans $\mathcal{H}$ (LL^* et $L^* L$ sont autoadjoints). Comme pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $\|Lx\| = \|L^* x\|$, on voit que $\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_{L^*}$. On peut donc écrire $L = A + iB$, $L^* = A - iB$ avec A et B autoadjoints, définis sur $\mathcal{D}_L$. Enfin, $\forall\, x \in \mathcal{D}$, $\langle (AB - BA)x \, , \, x\rangle = 0$, donc $AB = BA$.

4.2. LEMME : Soit A un opérateur autoadjoint. Alors $A_\rho = (1 + \rho^2 A^2)^{-1} A$ ($\rho \in \underset{\sim}{R}^+$) est autoadjoint, borné et converge fortement sur $\mathcal{D}$ vers A lorsque $\rho \rightarrow 0$ ($\mathcal{D}$ = domaine de A^2).

L'existence de A_ρ , et le fait que A_ρ soit borné, sont classiques. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que, pour tout x de $\mathcal{D}_{A^2}$, on a :

$$\|(A - A_\rho)x\| = \|\rho^2 A^2(1 + \rho^2 A^2)^{-1} Ax\| \leq \rho\|A^2 x\| .$$

4.3. LEMME : Soit π_ρ la fonction de $\underset{\sim}{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, définie par

$$\pi_\rho(u \, , \, v) = \exp i(uA_\rho + vB_\rho) .$$

π_ρ est une représentation unitaire de $\underset{\sim}{R}^2$ et possède, uniformément en u et v sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^2$, une limite forte notée π . On écrit

$$\pi(u \, , \, v) = \exp i(uA + vB) .$$

Il suffit de remarquer que $AB = BA \Rightarrow A_\rho B_\rho = B_\rho A_\rho$ sur $\mathcal{D}_{LL^*}$ qui est dense dans $\mathcal{H}$. L'existence de π résulte du lemme précédent. Comme $A_\rho B_\rho = B_\rho A_\rho$, π_ρ (et donc π) est une représentation unitaire de $\underset{\sim}{R}^2$.

4.4. DÉFINITION : La représentation π précédente est la représentation unitaire de $\underset{\sim}{R}^2$ associée à l'opérateur normal L .

Avant d'appliquer le paragraphe 3 à la représentation π , il faut préciser le spectre de π .

4.5. THÉORÈME : <u>Soient</u> L <u>un opérateur normal</u>, <u>et</u> π_L <u>la représentation unitaire de</u> $\underset{\sim}{R}^2$ <u>associée</u>. <u>Alors</u> $sp(\pi_L)$ <u>est le spectre de l'opérateur</u> L .

Soit $(\alpha , \beta) \in sp(\pi_L)$. En changeant L en $L-(\alpha + i\beta)\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}}$, on se ramène au cas où $(0 , 0) \in sp(\pi_L)$. $\underset{\sim}{R}^2$ étant σ-compact, il existe une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle \exp(i(uA + vB))\, x_n , x_n\rangle \to 1$ uniformément sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^2$, lorsque $n \to \infty$. Soit K un voisinage compact de l'origine dans $\underset{\sim}{R}^2$. On peut (lemme 3.3) supposer que $x_n \in \mathcal{E}(K)$. En ce cas, les transformées de Fourier $\hat{b}(x_n)$ de $b(x_n)$ convergent vers δ au sens des distributions à support compact. Par le théorème de Paley-Wiener, on voit que $((\partial^2 b)/\partial u^2)(x_n)(0)$ converge vers zéro lorsque $n \to \infty$. Donc $Ax_n \to 0$ quand $n \to \infty$. De même, $Bx_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc, $(0 , 0)$ appartient au spectre de L : $sp(\pi_L) \subset sp(L)$. Inversement, si $0 \in sp(L)$, il existe une suite x_n telle que $Lx_n \to 0$ (le spectre résiduel de L est vide, car L est normal). On a donc

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = 0 .$$

De plus,

$$\|\exp(iuA)\, x_n - x_n\| = 2\|\sin(\tfrac{uA}{2})\, x_n\| \leq |u|\|Ax_n\| .$$

Donc $b(x_n)$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^2$ si bien que $0 \in sp(\pi_L)$.

Appliquant enfin le théorème 3.7 on obtient le résultat suivant.

4.6. THÉORÈME : <u>Soit</u> $L = A + iB$ <u>un opérateur normal de</u> $\mathcal{H}$. <u>Alors, si</u>

$$E(\lambda , \mu) = E(]-\infty , \lambda] \times]-\infty , \mu])$$

<u>au sens du théorème</u> 3.7, <u>pour tout</u> x <u>de</u> $\mathcal{H}$, <u>la fonction</u> $(\lambda,\mu) \to \langle E(\lambda,\mu)x,x\rangle$ <u>est une fonction de répartition sur</u> $\underset{\sim}{R}^2$, <u>continue à droite</u>. <u>La mesure associée est la mesure spectrale de</u> L , <u>et l'on a</u>

1° $E(-\infty , -\infty) = 0_{\mathcal{H}}$, $E(+\infty , +\infty) = \underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}}$.

2° $\forall\, x \in \mathcal{H}$, $(\lambda , \mu) \to \langle E(\lambda , \mu)\, x , x\rangle$ <u>est continue à droite</u>.

3° $\forall\, x \in \mathcal{H}$, $\langle \exp(i(uA + vB))\, x , x\rangle = \iint \exp(i(u\lambda + v\mu))\, d\, \langle E(\lambda , \mu)\, x , x\rangle$.

5. Deux critères de normalité pour un opérateur.

Dans ce paragraphe, L désigne un opérateur que l'on sait mettre sous la forme $L = A + iB$, $L^* = A - iB$ (A + B autoadjoints). Autrement dit, L est un couple d'opérateurs autoadjoints. On a vu, au paragraphe 4, que L est normal si, et seulement si, la fonction $\pi_L(u , v) = \exp(i(uA + vB))$ est une représentation (unitaire) de $\underset{\sim}{R}^2$.

5.1. THÉORÈME [3] : L <u>est normal si</u>, <u>et seulement si</u>, <u>pour tout</u> x <u>de</u> $\mathcal{H}$, la

[3] Ce théorème est démontré, par une autre méthode, dans : BROISE (M.). - Sur les représentations unitaires des groupes abéliens, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3157-3160.

fonction $(u , v) \to \langle \pi_L(u , v)\, x , x\rangle$ est continue de type positif sur $\underset{\sim}{R}^2$.

La condition nécessaire est évidente.

Démontrer la condition suffisante revient à démontrer que tout projecteur $E_A(\lambda)$ de la famille spectrale de A commute avec tout projecteur de la famille spectrale de B, autrement dit que $E_A(\lambda)\, E_B(\mu)$ est hermitien pour tout couple (λ , μ) de $\underset{\sim}{R}^2$.

On pose

$$\omega_x(u , v) = \langle \pi_L(u , v)\, x , x\rangle ,$$

et

$$\hat{\omega}_x = \text{transformée de Fourier de } \omega_x .$$

$\hat{\omega}_x$ est une mesure positive finie par hypothèse.

Soient $x \in \mathcal{H}$ et $x = f + g$ sa décomposition suivant $E_A(\lambda)$ et $\underset{\sim}{1} - E_A(\lambda)$, $f = E_A(\lambda)\, x$, $g = x - f$. Puis on introduit

$$u_1 = E_B(\mu)\, f = E_B(\mu)\, E_A(\lambda)\, x \; ; \quad u_2 = E_B(\mu)[1 - E_A(\lambda)]\, x ,$$

$$v_1 = [1 - E_B(\mu)]\, E_A(\lambda)\, x , \quad v_2 = [1 - E_B(\mu)][1 - E_A(\lambda)]\, x .$$

On a $x = f + g = u_1 + v_1 + u_2 + v_2$; et $f = u_1 + v_1$, $g = u_2 + v_2$. Donc $u_1 = f - v_1$. Par conséquent, $\hat{\omega}_{u_1} + \hat{\omega}_{f+v_1} = 2\hat{\omega}_f + 2\hat{\omega}_{v_1}$. Les mesures $\hat{\omega}$ sont positives, donc $\hat{\omega}_{u_1} \leqslant 2(\hat{\omega}_f + \hat{\omega}_{v_1})$ si bien que :

$$\operatorname{supp} \hat{\omega}_{u_1} \subset \operatorname{supp} (\hat{\omega}_f) \cup \operatorname{supp} (\hat{\omega}_{v_1}) .$$

Or $\operatorname{supp} (\hat{\omega}_f) \subset]-\infty , \lambda] \times \underset{\sim}{R}$, et $\hat{\omega}_{v_1}$ est portée par $\underset{\sim}{R} \times]\mu , +\infty]$, donc

$$\hat{\omega}_{u_1} \text{ est portée par } (]-\infty , \lambda] \times \underset{\sim}{R}) \cup (\underset{\sim}{R} \times]\mu , \infty]) .$$

D'autre part, $\hat{\omega}_{u_1}$ est portée par $\underset{\sim}{R} \times]-\infty , \mu]$, donc

$$\hat{\omega}_{u_1} \text{ est portée par } \{(]-\infty , \lambda] \times \underset{\sim}{R}) \cup (\underset{\sim}{R} \times]\mu , \infty])\} \cap \{\underset{\sim}{R} \times]-\infty , \mu]\} ,$$

c'est-à-dire par $]-\infty , \lambda] \times]-\infty , \mu]$. On opère de même pour $\hat{\omega}_{u_2}$, $\hat{\omega}_{v_1}$, $\hat{\omega}_{v_2}$. On a :

$$\begin{array}{llll}
\hat{\omega}_{u_1} & \text{est portée par} &]-\infty , \lambda] \times]-\infty , \mu] \\
\hat{\omega}_{u_2} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} &]\lambda , \infty] \times]-\infty , \mu] \\
\hat{\omega}_{v_1} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} &]-\infty , \lambda] \times]\mu , \infty] \\
\hat{\omega}_{v_2} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} &]\lambda , \infty] \times]\mu , \infty] .
\end{array}$$

Il résulte du lemme 3.4, que u_1, u_2, v_1 et v_2 sont orthogonaux deux à deux, donc

$$\langle u_1 , u_1\rangle = \langle E_B(\mu)\, E_A(\lambda)\, x , x\rangle$$

est positif, et le théorème est démontré.

5.2. THÉORÈME : Soient A et B deux opérateurs autoadjoints tous deux définis sur un même domaine $\mathcal{D}$, dense dans $\mathcal{H}$. Alors $L = A + iB$ est normal si, et seulement si, $\mathcal{W}$, enveloppe convexe fermée (pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$) de la famille des fonctions $\omega_x : (u, v) \to \langle \exp(i(uA + vB))\, x, x\rangle$, $x \in \mathcal{B}_1$, est un simplexe de Choquet. Dans ces conditions, c'est une face fermée de $P^1(\underset{\sim}{R}^2)$.

La condition nécessaire et la conclusion résultent du théorème 2.6 et de la définition 4.4.

Condition suffisante : On suppose que $\mathcal{W}$ est un simplexe de Choquet. Soit F un compact de $\underset{\sim}{R}$. F détermine une face fermée $\underset{\sim}{F}_A$ de $\mathcal{W}_A$ (théorème 2.9), où $\mathcal{W}_A$ est la face de $P^1(\underset{\sim}{R})$ associée à la représentation $u \to \exp iuA$. Il est immédiat de vérifier que $\underset{\sim}{F}_A$ détermine une face $\underset{\sim}{F}$ fermée de $\mathcal{W}$: $\underset{\sim}{F} = \{\omega \in \mathcal{W} \; ; \; \omega(u, 0) \in \underset{\sim}{F}_A\}$. De plus, si F_1 et F_2 sont disjoints, $\underset{\sim}{F}_1$ et $\underset{\sim}{F}_2$ le sont également $(\{0\} \notin \underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2)$.

Soient F_1 et F_2 deux compacts disjoints de $\underset{\sim}{R}$, et soient $x \in \mathcal{E}_A(F_1)$ et $y \in \mathcal{E}_A(F_2)$ deux vecteurs de $\mathcal{H}_1$. x et y sont orthogonaux (lemme 3.4), et $\omega_x \in \underset{\sim}{F}_1$, $\omega_y \in \underset{\sim}{F}_2$. Or

$$\frac{1}{2}\{\omega_{(x+y)/\sqrt{2}} + \omega_{(x-y)/\sqrt{2}}\} = \frac{1}{2}(\omega_x + \omega_y)$$

appartient à la variété affine fermée engendrée par $\underset{\sim}{F}_1$ et $\underset{\sim}{F}_2$. Comme $\mathcal{W}$ est un simplexe, la trace sur $\mathcal{W}$ de cette variété est une face fermée $\underset{\sim}{F}$ de $\mathcal{W}$. Donc $\omega(x \pm y)/\sqrt{2} \in \underset{\sim}{F}$, et l'on a

$$\omega_{(x+y)/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,\omega_{x+y} = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 ,$$

où $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, $\omega_1 \in \underset{\sim}{F}_1$, $\omega_2 \in \underset{\sim}{F}_2$. Or

$$\omega_{x+y}(u, 0) = \omega_x(u, 0) + \omega_y(u, 0) ,$$

car $\mathcal{E}_A(F_1)$ et $\mathcal{E}_A(F_2)$ sont orthogonaux et invariants par A. Donc $\lambda = \frac{1}{2}$, et l'on a $\omega_{x+y} = \omega_1 + \omega_2$. On en déduit que :

$$\omega_{(\cos\theta)x+(\sin\theta)y} = \cos\theta\{(\sin\theta)\omega_1 + (\cos\theta - \sin\theta)\omega_x\} + \sin\theta\{(\cos\theta)\omega_2 - (\cos\theta - \sin\theta)\omega_y\} .$$

Mais $\omega_{(\cos\theta)x+(\sin\theta)y}$ appartient à F, donc se décompose de façon unique sous la forme

$$t(\theta)\,\omega_{3,\theta} + (1 - t(\theta))\,\omega_{4,\theta} , \text{ où } t(\theta) \in [0, 1] , \quad \omega_{3,\theta} \in \underset{\sim}{F}_1 , \quad \omega_{4,\theta} \in \underset{\sim}{F}_2 .$$

Par normalisation, on voit que $t(\theta) = \cos^2\theta$ et que :

$$(\sin\theta)\omega_1 + (\cos\theta - \sin\theta)\omega_x = (\cos\theta)\omega_{3,\theta} .$$

Le cas où θ tend vers $\pi/2$ montre que $\omega_1 = \omega_x$. De même, $\omega_2 = \omega_y$, et donc

$$\omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y .$$

On change y en iy pour obtenir $\omega_{x\pm iy} = \omega_x + \omega_y$, donc $\langle \exp(i(uA+vB))x, y\rangle = 0$. On en déduit que $\mathcal{E}_A(F_1)$ est invariant par B, pour tout F_1 compact. Comme $\underset{\sim}{R}$ est σ-compact, on en déduit aisément que L est normal.

6. Image numérique d'un opérateur.

On examine maintenant une application b, associée à un opérateur L, qui est une bc-application, mais telle que $b(\mathcal{H}_1)$ ne soit pas, en général, un simplexe.

6.1. Notations : A tout opérateur L de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on associe l'application b_L de $\mathcal{H}$ dans $\underset{\sim}{C}$, définie par $b_L(x) = \langle Lx , x\rangle$. Il est immédiat de vérifier que b_L est une b-application de $\mathcal{H}$ dans $\underset{\sim}{C}$.

6.2. DÉFINITION : On appelle image numérique de L, et l'on note $W(L)$ l'image de la sphère unité $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ par b_L :

$$W(L) = b_L(\mathcal{H}_1) .$$

6.3. PROPOSITION : b_L est une bc-application de $\mathcal{H}$ dans $\underset{\sim}{C}$.

On remarque tout d'abord que b_L est une fonction affine de L. On en déduit que $W(\alpha L_1 + \beta L_2) = \alpha W(L_1) + \beta W(L_2)$ (α et β complexes).

Soit (x , y) un couple de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$. On peut poser $b(y) = b(x) + r \exp i\alpha$ avec $r > 0$ ($r = 0$ sans intérêt). En changeant L en $\exp(- i\alpha)\ (L - b_L(x)\, 1_{\mathcal{H}})$, on est ramené au cas où $b_L(x) = 0$, $b_L(y) = r$. Soit $y' = \exp(i\varphi)\, y$, et déterminons φ de sorte que $b(\widehat{x + y'})$ appartienne à la droite définie par 0 et $b_L(y)$. Ceci signifie que $\exp i\varphi \langle Ly , x\rangle + \exp(- i\varphi) \langle Lx , y\rangle$ doit être réel. L étant borné peut s'écrire $L = A + iB$, où A et B sont autoadjoints. La condition devient :

$$\exp i\varphi \langle Ly , x\rangle + \exp(- i\varphi) \langle Lx , y\rangle = \exp(- i\varphi) \langle L^* x , y\rangle + \exp i\varphi \langle L^* y , x\rangle ,$$

soit

$$\operatorname{Re} \exp(- i\varphi) \langle Bx , y\rangle = 0 ,$$

condition aisée à satisfaire.

On remarque que le vecteur y' obtenu est de la forme $\exp(i\varphi)\, y$, donc appartient au sous-espace (complexe) $\{y\}$.

On applique cette remarque, et l'on utilise le théorème 1.5 pour obtenir ([4], [6]) le résultat ci-après.

6.4. THÉORÈME : Soit L un opérateur linéaire borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Alors

1° Pour tout sous-espace V de $\mathcal{H}$, $b_L(\mathcal{H}_1 \cap V)$ est convexe. En particulier, l'image numérique $W(L)$ est convexe.

2° $A \subset W(L)$ est une face si, et seulement si, $M(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$.

3° Pour tout A de $W(L)$, $M(F(A))$ est le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par $M(A)$.

6.5. Remarque : Si L est un opérateur non borné de $\mathcal{H}$, défini sur $\mathcal{D}$ et tel que L^* existe et soit défini sur $\mathcal{D}$ ($\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$), b_L n'est plus continue. Toutefois, b_L est encore une bc-application de $\mathcal{D}$ dans $\underset{\sim}{C}$, et (Cf. lemme 1.4) bien que b_L ne soit pas continue,

$$b_L(\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_1) \ \underline{\text{est convexe}}$$

(mais non borné).

7. Image numérique et valeurs spectrales.

On "situe" maintenant l'image numérique de L par rapport au spectre de L .

7.1. LEMME : Soit z un point frontière de $\overline{W(L)}$. Alors, il existe $\theta \in [0,2\pi[$ tel que la partie hermitienne de $\exp(i\theta)(L - z\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}})$ soit un opérateur positif.

On a vu (proposition 6.3) que $W(\exp(i\theta)(L - z\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}})) = \exp(i\theta)\{W(L) - z\}$. On peut donc supposer que $z = 0$. Soit Δ une droite d'appui du convexe $W(L)$; on peut effectuer une rotation dans $\underset{\sim}{C}$ autour de l'origine de sorte que $\exp(i\theta)\ W(L)$ soit dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$. Dans ces conditions, $\forall\ x \in \mathcal{H}$, $\mathrm{Re}\langle L'\ x,x\rangle \geqslant 0$ où $L' = \exp(i\theta)(L - z\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}})$, soit $\langle (L' + L'^*)x\ ,\ x\rangle \geqslant 0$, et le lemme est démontré.

7.2. THÉORÈME : Soit $\Sigma(L)$ l'enveloppe convexe fermée du spectre d'un opérateur borné L . Alors $\Sigma(L) \subset \overline{W(L)}$ et le spectre résiduel de L est intérieur à $W(L)$.

Soit z une valeur propre (resp. une valeur propre approchée) de L . Il existe alors un x (resp. une suite x_n) de $\mathcal{H}_1$ tel que $(L - z\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}})x = 0$ (resp. $\lim_{n\to\infty}(L - z\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}})\ x_n = 0$) , donc tel que $b_L(x) = z$ (resp. $b_L(x_n) \to z$) . Donc $z \in W(L)$ (resp. $\overline{W(L)}$) .

Si z appartient au spectre résiduel de L , $\overline{\mathrm{Im}(L - z)} \neq \mathcal{H}$, donc si $x \in \mathrm{Im}(L-z)^{\perp}$, $\langle (L - z)x\ ,\ x\rangle = 0$, soit $b_L(x) = z$.

Supposons z point frontière de $W(L)$ et valeur spectrale résiduelle. On a vu (lemme 7.1) que l'on peut se ramener au cas où $z = 0$ et $L = A + iB$ avec A positif. Il existe donc x_0 tel que $b_L(x_0) = z$, donc $b_A(x_0) = 0$. Comme A est positif, on a $Ax_0 = 0$. Or $x_0 \in \mathrm{Im}\ L^{\perp}$, donc $\forall\ y \in z$, $\langle Ly\ ,\ x_0\rangle = 0$, soit $\langle (A + iB)y\ ,\ x_0\rangle = 0$, donc $\langle By\ ,\ x_0\rangle = \langle y\ ,\ Bx_0\rangle = 0$, c'est-à-dire que $Bx_0 = \theta$, et 0 est valeur propre de L .

Comme tout point extrémal de $\Sigma(L)$ appartient au compact $\mathrm{sp}(L)$ qui est contenu dans $\overline{W(L)}$, le théorème est démontré ($\mathrm{sp}(L)$ = spectre de L) .

7.3. DÉFINITION : Un point extrémal z de $\overline{W(L)}$ est un VERTEX de $\overline{W(L)}$ si le cône fermé de sommet z engendré par $\overline{W(L)}$ est saillant.

7.4. THÉORÈME : Tout vertex de $\overline{W(L)}$ appartient au spectre approché de L .

On se ramène au cas où le vertex est 0 , et où $L = A + iB$ avec A positif.

" 0 est un vertex" implique " $\exists\ M$ réel positif tel que, pour tout x de $\mathcal{H}_1$, donc de $\mathcal{H}$, $|\langle Bx\ ,\ x\rangle| \leqslant M\langle Ax\ ,\ x\rangle$ ".

" $0 \in \overline{W(L)}$ " implique "il existe une suite x_n de $\mathcal{H}_1$ telle que $b_L(x_n) \to 0$ ". Comme

$$|\langle B(x_n + \lambda Bx_n) \, , \, x_n + \lambda Bx_n\rangle| \leqslant M\langle A(x_n + \lambda Bx_n) \, , \, x_n + \lambda Bx_n\rangle$$

et que $\langle Bx_n \, , \, x_n\rangle$ et Ax_n convergent vers zéro lorsque $n \to \infty$, on a :

$$(\lambda \text{ réel}) \quad \lim_{n\to\infty} |2\lambda\|Bx_n\|^2 + \lambda^2\langle B^3 x_n \, , \, x_n\rangle| \leqslant M\lambda^2 \lim_{n\to\infty}\langle ABx_n \, , \, Bx_n\rangle$$

(Ces limites existent, en extrayant au besoin une sous-suite, car A et B sont bornés). On a donc

$$2 \lim_{n\to\infty}\|Bx_n\|^2 + \lambda \lim_{n\to\infty}\langle B^3 x_n \, , \, x_n\rangle \leqslant M\lambda \lim_{n\to\infty}\langle ABx_n \, , \, Bx_n\rangle \, .$$

Ceci étant vrai pour tout λ , on voit que $\lim_{n\to\infty} Bx_n = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} Lx_n = 0$.

7.5. THÉORÈME : Si L est normal, $\overline{W(L)} = \Sigma(L)$ (L borné) .

Ce théorème est une conséquence triviale de la théorie spectrale des opérateurs normaux. On donne ici une démonstration indépendante de cette théorie.

Il suffit, étant donné que $\Sigma(L) \subset \overline{W(L)}$ qui est compact convexe, de montrer que tout point extrémal de $\overline{W(L)}$ appartient au spectre de L . On se ramène toujours au cas où 0 est un point extrémal de $\overline{W(L)}$, et $L = A + iB$ avec A positif. Il existe donc une suite x_n de $\mathcal{H}_1$ telle que $Ax_n \to 0$ et $b_L(x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

L étant borné, on peut supposer $\|B\| < 1$, de sorte que l'opérateur

$$C = B + i(1 - B^2)^{\frac{1}{2}}$$

existe, est borné, unitaire et commute avec tout opérateur commutant avec B , en particulier avec A , car L est normal. Soit $x_n^{\pm} = (\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}} \pm C)x_n$. On a

$$b_L(x_n^+) + b_L(x_n^-) = 2b_L(x_n) \ ;$$

0 étant extrémal et $\overline{W(L)}$ étant compact, il existe une sous-suite de x_n (notée encore x_n) telle que $\lim_{n\to\infty} b_L(x_n^+) = 0$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\{2b_B(x_n) + \langle(C + C^*)Bx_n \, , \, x_n\rangle\} = 0 \, ,$$

soit $\lim_{n\to\infty} \langle B^2 x_n \, , \, x_n\rangle = 0$. Donc $Lx_n \to 0$, et le théorème est démontré.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de l'opérateur U de ℓ^2 défini par $U(e_n) = e_{n+1}$. U est non normal, mais $\overline{W(U)} = \Sigma(U)$ = disque unité. Pour des réciproques de 7.5, voir [5], [7] et [10].

On achève ce paragraphe en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point extrémal de $\overline{W(L)}$ appartienne au spectre de L [9]. On démontre auparavant deux lemmes.

7.6. LEMME : Soit ω une fonction de type positif sur un groupe produit $G_1 \times G_2$. Soit e_1 (resp. e_2) l'élément neutre de G_1 (resp. G_2) . Alors, $\forall (g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$, on a

$$|\omega(g_1 , g_2)\, \omega(e_1 , e_2) - \omega(e_1 , g_2)\, \omega(g_1 , e_2)|^2$$
$$\leqslant (|\omega(e_1 , e_2)|^2 - |\omega(g_1 , e_2)|^2)(|\omega(e_1 , e_2)|^2 - |\omega(g_2 , g_1)|^2) .$$

Soient

$$\alpha = \omega(e_1,e_2) , \quad \beta = \omega(g_1,e_2) , \quad \gamma = \omega(e_1,g_2) \quad \text{et} \quad z = \omega(g_1,g_2) .$$

ω de type positif sur $G_1 \times G_2$ implique que la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & z \\ \bar{\beta} & \alpha & \gamma \\ \bar{z} & \bar{\gamma} & \alpha \end{bmatrix}$$

est positive. Son déterminant est donc positif, donc

$$\alpha^3 + (\beta\gamma\bar{z} + \bar{\beta}\bar{\gamma}z) - \alpha(|z|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2) \geqslant 0 ,$$

soit

$$|\alpha z - \beta\gamma|^2 \leqslant (\alpha^2 - |\beta|^2)(\alpha^2 - |\gamma|^2)$$

ce qui est la relation cherchée.

7.7. COROLLAIRE : Soit ω une fonction de type positif sur $G_1 \times G_2$ où G_1 est topologique abélien, telle que $g \to \omega(g , e_2)$ soit un caractère continu de G_1. Alors

$$\omega(g_1 , g_2) = \frac{\omega(e_1 , g_2)\, \omega(g_1 , e_2)}{\omega(e_1 , e_2)} \qquad (\omega \neq 0) .$$

Il suffit de remarquer que tout caractère continu de G_1 est de module constant (égal à 1) et d'utiliser le lemme 7.6.

7.8. LEMME : Soit φ_n une suite de fonctions de $\underset{\sim}{R}^p$ dans $\underset{\sim}{C}$, entières et de type exponentiel uniformément borné, telles que φ_n converge vers zéro pour la convergence compacte dans $\underset{\sim}{R}^p$. Alors, toutes les dérivées partielles à l'origine convergent vers zéro.

D'après les hypothèses faites, la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de φ_n converge vers zéro au sens des distributions à support compact ; il en va donc de même de la suite $x_1^{m_1} \ldots x_p^{m_p} \hat{\varphi}_n$, et l'on a le résultat par le théorème de Paley-Wiener appliqué aux distributions.

7.9. THÉORÈME : A toute suite x_n de $\mathcal{H}_1$ on associe la suite ω_n de fonctions continues bornées sur $\underset{\sim}{R}^2$, définies par $\omega_n(u , v) = \langle \exp(i(uA + vB))\, x_n , x_n \rangle$. Soit z un point extrémal de $\overline{W(L)}$; alors z appartient au spectre de L si, et seulement si, il existe une suite x_n de $\mathcal{H}_1$ telle que $b_L(x_n)$ converge vers z et ω_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction ω de type positif sur $\underset{\sim}{R}^2$, lorsque n tend vers l'infini. Dans ces conditions, ω est un caractère de $\underset{\sim}{R}^2$.

On se ramène au cas où $z = 0$ et $L = A + iB$ avec A positif.

Condition nécessaire : On sait (théorème 7.2) que 0 est une valeur propre ou une valeur propre approchée. Il existe donc une suite x_n telle que $Lx_n \to 0$. Comme A est positif et que $b_L(x_n) \to 0$, $Ax_n \to 0$, donc $Bx_n \to 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = 0 .$$

Or L est borné et

$$|\langle \exp(i(uA + vB))\, x_n , x_n\rangle - 1| \leqslant \exp(|u|\|A\| + |v|\|B\|)\{|u|\|Ax_n\| + |v|\|Bx_n\|\} ,$$

donc ω_n converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\underset{\sim}{R}^2$.

Condition suffisante : On a $\lim_{n\to\infty} b_L(x_n) = 0$ et $\omega_n \to \omega \gg 0$ sur $\underset{\sim}{R}^2$. A étant positif, on a $Ax_n \to 0$, donc $\omega_n(u , 0) \to 1$ uniformément sur tout compact. ω est donc une fonction continue de type positif sur $\underset{\sim}{R}^2$ telle que $\omega(u , 0) = 1$. Il en résulte que $\omega(u , v) = \omega(u , 0)\, \omega(0 , v)$, car $\omega(0 , 0) = 1$ (lemme 7.6). On a donc

$$\lim_{n\to\infty}[\omega_n(u , v) - \omega_n(u , 0)\, \omega_n(0 , v)] = 0$$

pour la convergence compacte. Les fonctions considérées étant uniformément bornées par 1, on a

$$\omega(u , v) = \lim_{n\to\infty}\langle \exp(ivB)x_n , x_n\rangle$$

et par le lemme 7.8, on en déduit que

$$\forall\, k \in N , \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{p,q,p+q=k}\langle B^p\, AB^q\, x_n , x_n\rangle = 0 .$$

On peut supposer $\|B\| < 1$ si bien que l'opérateur $C = B + i(\underset{\sim}{1}_{\mathcal{H}} - B^2)^{\frac{1}{2}}$ existe, est borné et unitaire. La série définissant C étant convergente et A étant borné, la série définissant $\langle C^* AC\, x_n , x_n\rangle$ converge uniformément en n. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\langle C^*\, AC\, x_n , x_n\rangle = 0 .$$

Soit $x_n^{\pm} = (1 \pm C)x_n$. On a

$$b_L(x_n^+) + b_L(x_n^-) = b_L(x_n) + b_L(Cx_n) .$$

0 est extrémal, $\overline{W(L)}$ compact, et $\lim_{n\to\infty} b_L(x_n) = \lim_{n\to\infty} b_L(Cx_n) = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} b_L(x_n^{+}) = 0$ (en extrayant au besoin une sous-suite). On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\langle B(C + C^*)\, x_n , x_n\rangle = 0 ,$$

soit $Bx_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc 0 appartient au spectre approché de L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BACHMAN (G.) and NARICI (L.). - Functional analysis. - New York, Academic Press, 1966 (Academic Press Textsbooks in Mathematics).

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. 2. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[3] DIXMIER (J.). - Les C^*-algèbres et leur représentations. - Paris, Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[4] DONOGHUE (W. F.). - On the numerical range of a bounded operator, Mich. math. J., t. 4, 1957, p. 261-263.

[5] DONOGHUE (W. F.). - On a problem of Nieminen. - Paris, Presses universitaires de France, 1963 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 16, p. 31-33).

[6] EMBRY (M. R.). - The numerical range of an operator, Pacific J. Math., t. 32, 1970, p. 647-650.

[7] MENG (C. H.). - A condition that a normal operator have a closed numerical range, Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 85-88.

[8] NAJMARK (M. A.). - Normed rings. - Groningen, P. Noordhoff, 1959.

[9] PIQUET (C.). - Sur l'image numérique d'un opérateur linéaire borné d'un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 1105-1108.

[10] STAMPFLI (J. G.). - Minimal range theorems for operators with thin spectra, Pacific J. Math., t. 23, 1967, p. 601-612.

Claude PIQUET
11 allée de Trévise
92330 SCEAUX